เฉลย: ทฤษฎีจำนวน

ตอนที่ 1: พื้นฐาน — การหารลงตัวและจำนวนเฉพาะ

1. $72 \div 6 = 12$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $6 \mid 72$
หรือใช้กฎ: 72 หารด้วย 2 ลงตัว (หลักหน่วย 2) และหารด้วย 3 ลงตัว ($7 + 2 = 9$) ดังนั้นหารด้วย 6 ลงตัว

2. $120 = 2 \times 60 = 2 \times 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 2 \times 15$
$= 2^3 \times 3 \times 5$

3. $\sqrt{127} \approx 11.3$ — ทดลองหารด้วยจำนวนเฉพาะ ≤ 11:
$2 \nmid 127$, $3 \nmid 127$ ($1 + 2 + 7 = 10$), $5 \nmid 127$, $7 \nmid 127$, $11 \nmid 127$
ไม่มีตัวใดหารลงตัว $\rightarrow$ 127 เป็นจำนวนเฉพาะ

ตอนที่ 2: การประยุกต์ — GCD/LCM และสมภาค

4. $48 = 2^4 \times 3$ $\quad 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
GCD $= 2^{\min(4,2)} \times 3^{\min(1,2)} = 2^2 \times 3 = 12$
LCM $= 2^{\max(4,2)} \times 3^{\max(1,2)} \times 5 = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$

5. $144 = 1 \times 89 + 55 \quad \rightarrow$ GCD(89, 55)
$89 = 1 \times 55 + 34 \quad \rightarrow$ GCD(55, 34)
$55 = 1 \times 34 + 21 \quad \rightarrow$ GCD(34, 21)
$34 = 1 \times 21 + 13 \quad \rightarrow$ GCD(21, 13)
$21 = 1 \times 13 + 8 \quad \rightarrow$ GCD(13, 8)
$13 = 1 \times 8 + 5 \quad \rightarrow$ GCD(8, 5)
$8 = 1 \times 5 + 3 \quad \rightarrow$ GCD(5, 3)
$5 = 1 \times 3 + 2 \quad \rightarrow$ GCD(3, 2)
$3 = 1 \times 2 + 1 \quad \rightarrow$ GCD(2, 1)
$2 = 2 \times 1 + 0 \quad \rightarrow$ GCD = 1

6. $17 \equiv 3 \pmod 7$ $\quad (17 = 2 \times 7 + 3)$
$23 \equiv 2 \pmod 7$ $\quad (23 = 3 \times 7 + 2)$
$17 \times 23 \equiv 3 \times 2 = 6 \pmod 7$

7. 3^n mod 10: วัฏจักร $\{3, 9, 7, 1\}$ $\quad (3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27 \equiv 7,\ 3^4 = 81 \equiv 1)$
$2024 \div 4 = 506$ เศษ 0 $\quad \rightarrow \quad 3^{2024} \equiv 3^4 \equiv 1 \pmod{10}$
หลักหน่วยคือ 1

8. ใช้ Fermat: $2^4 \equiv 1 \pmod 5$ $\quad (p = 5$ เป็นจำนวนเฉพาะ$)$
$100 = 4 \times 25 \quad \rightarrow \quad 2^{100} = (2^4)^{25} \equiv 1^{25} \equiv 1 \pmod 5$

9. $364 \div 7 = 52$ เศษ 0
เศษ 0 หมายถึงวนกลับมาที่เดิม
ดังนั้นวันที่ 31 ธันวาคม 2025 เป็น วันพุธ เช่นกัน

10. 7^n mod 10: วัฏจักร $\{7, 9, 3, 1\}$ $\quad 2026 \div 4 = 506$ เศษ 2 $\quad \rightarrow \quad 7^{2026} \equiv 9$
9^n mod 10: วัฏจักร $\{9, 1\}$ (สลับ 9 กับ 1) $\quad 2026$ เป็นเลขคู่ $\quad \rightarrow \quad 9^{2026} \equiv 1$
$9 + 1 = 10 \equiv 0 \pmod{10}$
หลักหน่วยคือ 0