เซต

Sets — นิยาม, การดำเนินการของเซต, กฎทางพีชคณิต, แผนภาพเวนน์

None W. (Yuan)

สารบัญ (Outline)

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต
   - นิยามและการเขียนเซต
   - สับเซตและเซตกำลัง
   - ช่วงของจำนวนจริง (Intervals)
2. การดำเนินการของเซต (Set Operations)
   - ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และคอมพลีเมนต์
3. กฎทางพีชคณิตของเซต (Laws of Set Algebra)
   - สมบัติพื้นฐาน
   - กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's Laws)
4. ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)
5. หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก (Inclusion-Exclusion)
6. สรุป

ก่อนเรียน (Prerequisites)

สิ่งที่ควรรู้ก่อนเรียน

- ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ — การอ่านและเขียนสัญลักษณ์
- ตรรกศาสตร์พื้นฐาน — “และ”, “หรือ”, “ไม่” (มีประโยชน์ในการเข้าใจการดำเนินการของเซต)

เซตคืออะไร?

เซต คือ **กลุ่มของสิ่งของ** ที่เรารวบรวมเข้าด้วยกัน สิ่งของที่อยู่ในเซตเรียกว่า **สมาชิก** (element)

เซตเป็นแนวคิดพื้นฐานที่สุดในคณิตศาสตร์ — ทุกอย่างสร้างมาจากเซต!

ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต

นิยามและการเขียนเซต

การเขียนเซต

วิธีเขียนเซต

มี 2 วิธีหลักในการเขียนเซต:

1. แบบแจกแจงสมาชิก (Roster Form)

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2. แบบบอกเงื่อนไข (Set-Builder Form)

$$A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนนับ และ } x \leq 5\}$$

สัญลักษณ์ $\in$ แปลว่า "เป็นสมาชิกของ" เช่น $3 \in A$

สัญลักษณ์ $\notin$ แปลว่า "ไม่เป็นสมาชิกของ" เช่น $7 \notin A$

เซตจำกัดและเซตอนันต์

นิยาม

เซตจำกัด (Finite Set) คือเซตที่มีจำนวนสมาชิก **เท่ากับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ** สามารถนับจำนวนสมาชิกได้

เซตอนันต์ (Infinite Set) คือเซตที่ **ไม่ใช่เซตจำกัด** มีจำนวนสมาชิกไม่สิ้นสุด

เซตจำกัด

- $A = \{1, 2, 3\} \qquad (|A| = 3)$
- $B = \{x \mid x$ เป็นวันใน 1 สัปดาห์$\} \qquad (|B| = 7)$
- เซตว่าง $\emptyset \qquad (|\emptyset| = 0)$

เซตอนันต์

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{R}$ = เซตของจำนวนจริง

เซตที่สำคัญ

เซตพื้นฐานที่ควรรู้จัก

- **เซตว่าง (Empty Set)**: $\emptyset$ หรือ $\{\}$ — เซตที่ไม่มีสมาชิกเลย
- **เอกภพสัมพัทธ์ (Universal Set)**: U — เซตที่บรรจุทุกอย่างที่เรากำลังพิจารณา

ข้อควรระวัง

$\emptyset \neq \{\emptyset\}$

$\emptyset$ คือเซตว่าง (มีสมาชิก 0 ตัว)

$\{\emptyset\}$ คือเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว (สมาชิกนั้นคือเซตว่าง)

เปรียบเหมือน: กล่องเปล่า $\neq$ กล่องที่บรรจุกล่องเปล่าอีกใบ

สับเซตและเซตกำลัง

สับเซต (Subset)

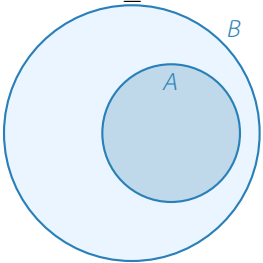
นิยาม

A เป็น **สับเซต** ของ B ($A \subseteq B$) ก็ต่อเมื่อ **สมาชิกทุกตัวของ** A **เป็นสมาชิกของ** B

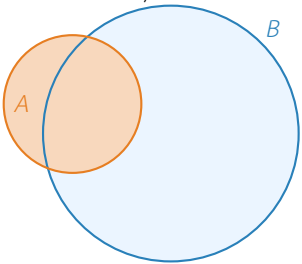
$A \subseteq B \iff$ สำหรับทุก x, ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$

สับเซตแท้ (Proper Subset): $A \subset B$ หมายถึง $A \subseteq B$ แต่ $A \neq B$

$A \subseteq B$



$A \nsubseteq B$



เซตกำลัง (Power Set)

นิยาม

เซตกำลัง ของ A ($P(A)$) คือ **เซตของสับเซตทั้งหมด** ของ A

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

จำนวนสมาชิก: $|P(A)| = 2^{|A|}$

ตัวอย่าง

ถ้า $A = \{1, 2\}$ แล้ว

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$|P(A)| = 2^2 = 4$ (มีสมาชิก 4 ตัว)

ช่วงของจำนวนจริง (Intervals)

ช่วง (Intervals) — สับเซตของ $\mathbb{R}$

นิยาม

ช่วง (Interval) คือสับเซตของจำนวนจริงที่ประกอบด้วยจำนวนจริงทุกจำนวน ที่อยู่ระหว่างค่าที่กำหนดสองค่า การเขียนช่วงใช้เครื่องหมายวงเล็บดังนี้:

- [หรือ] = **รวมจุดปลาย** (closed) — ใช้กับ $\leq$ หรือ $\geq$
- (หรือ) = **ไม่รวมจุดปลาย** (open) — ใช้กับ $<$ หรือ $>$

ช่วงจำกัด (Bounded Intervals)

$$[1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$
$$[1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$$
$$(1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$$
$$(1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$$

ช่วงอนันต์ (Unbounded Intervals)

$$[1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$
$$(1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$
$$(-\infty, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$$
$$(-\infty, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$$
$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

ตัวอย่าง: การเขียนช่วง

ตัวอย่างการเขียนช่วงแบบต่าง ๆ

1. **ช่วง** $[1, 2)$ — จำนวนจริงตั้งแต่ 1 ถึง 2
   - $1 \in [1, 2)$ เพราะ $1 \geq 1$ (รวมจุดปลายซ้าย)
   - $2 \notin [1, 2)$ เพราะ $2 \not< 2$ (ไม่รวมจุดปลายขวา)
   - $1.5 \in [1, 2)$ เพราะ $1 \leq 1.5 < 2$
2. **ช่วง** $(-\infty, 5]$ — จำนวนจริงทั้งหมดที่ ≤ 5
   - $5 \in (-\infty, 5], \quad 0 \in (-\infty, 5], \quad -100 \in (-\infty, 5]$
   - $6 \notin (-\infty, 5]$ เพราะ $6 > 5$
3. **ช่วง** $(1, \infty)$ — จำนวนจริงทั้งหมดที่ > 1
   - $2 \in (1, \infty), \quad 100 \in (1, \infty)$
   - $1 \notin (1, \infty)$ เพราะต้องมากกว่า 1 อย่างเดียว (ไม่รวม 1)

การดำเนินการของเซต (Set Operations)

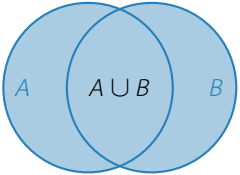
ยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และคอมพลีเมนต์

ยูเนียน (Union)

นิยาม

ยูเนียน ของ A และ B ($A \cup B$) คือเซตของสมาชิกที่อยู่ใน A **หรือ** อยู่ใน B (หรือทั้งคู่)

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$



ตัวอย่าง

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 4, 5\}$

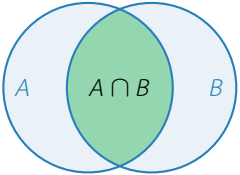
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

อินเตอร์เซกชัน (Intersection)

นิยาม

อินเตอร์เซกชัน ของ A และ B ($A \cap B$) คือเซตของสมาชิกที่อยู่ใน A **และ** อยู่ใน B

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$$



ตัวอย่าง

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{3, 4, 5\}$$

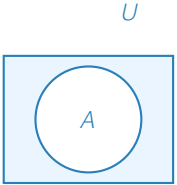
$$A \cap B = \{3\}$$

คอมพลีเมนต์ (Complement)

นิยาม

คอมพลีเมนต์ ของ A (A' หรือ A^c หรือ $\overline{A}$) คือเซตของสมาชิกใน U ที่ **ไม่อยู่ใน** A

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



A'

ตัวอย่าง

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$A = \{1, 2\}$$
$$A' = \{3, 4, 5\}$$

ผลต่างของเซต (Set Difference)

นิยาม

ผลต่าง $A - B$ (หรือ $A \setminus B$) คือเซตของสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ **ไม่อยู่ใน** B

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

ตัวอย่าง

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$A - B = \{1, 2\}$ (สมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B)

$B - A = \{5, 6\}$ (สมาชิกที่อยู่ใน B แต่ไม่อยู่ใน A)

สังเกต: $A - B \neq B - A$ (โดยทั่วไป)

กฎทางพีชคณิตของเซต (Laws of Set Algebra)

สมบัติพื้นฐาน

สมบัติการสลับที่และการเปลี่ยนหมู่

สมบัติการสลับที่ (Commutative Laws)

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (Associative Laws)

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

จำง่าย ๆ

- **สลับที่** = สลับลำดับแล้วผลลัพธ์เหมือนเดิม (เหมือน $a + b = b + a$)
- **เปลี่ยนหมู่** = จัดกลุ่มใหม่แล้วผลลัพธ์เหมือนเดิม (เหมือน $(a + b) + c = a + (b + c)$)

สมบัติการแจกแจงและนิจพล

สมบัติการแจกแจง (Distributive Laws)

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

สมบัตินิจพล (Identity Laws)

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cap U = A$
3. $A \cup U = U$
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$

กฎเดอมอร์แกน (De Morgan’s Laws)

กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's Laws)

กฎเดอมอร์แกน — สำคัญมาก!

1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

วิธีจำ

กระจายนิเสธเข้าไป แล้วกลับเครื่องหมาย: $\cup$ กลายเป็น $\cap$, $\cap$ กลายเป็น $\cup$

เหมือนกับ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ ในตรรกศาสตร์!

ตัวอย่าง: กฎเดอมอร์แกน

ตรวจสอบ

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A = \{1, 2\}, \quad B = \{2, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3\} \quad \Rightarrow \quad (A \cup B)' = \{4, 5\}$

$A' = \{3, 4, 5\}, \quad B' = \{1, 4, 5\} \quad \Rightarrow \quad A' \cap B' = \{4, 5\}$

ดังนั้น $(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \checkmark$

กฎอื่น ๆ ที่สำคัญ

Complement Laws

1. $A \cup A' = U$
2. $A \cap A' = \emptyset$
3. $(A')' = A$
4. $\emptyset' = U, \qquad U' = \emptyset$

กฎอื่น ๆ (ต่อ)

Idempotent Laws

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$

Absorption Laws (การดูดซึม)

1. $A \cup (A \cap B) = A$
2. $A \cap (A \cup B) = A$

Absorption

A “ดูดซึม” B เข้าไป — ถ้า A อยู่แล้ว ไม่ว่าจะ $\cup$ หรือ $\cap$ กับ B ผลลัพธ์ก็ยังเป็น A (เมื่อ B ถูกดูดซึมโดย A)

ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)

ผลคูณคาร์ทีเซียน

นิยาม

ผลคูณคาร์ทีเซียน ของ A และ B ($A \times B$) คือเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$

จำนวนสมาชิก: $|A \times B| = |A| \times |B|$

ตัวอย่าง

$A = \{1, 2\}, \quad B = \{x, y\}$

$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$

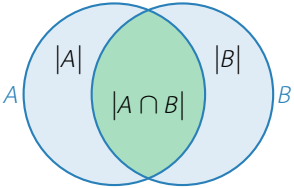
สังเกต: $A \times B \neq B \times A$ โดยทั่วไป (ลำดับสำคัญ)

หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก (Inclusion-Exclusion)

จำนวนสมาชิกของยูเนียน

หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก สำหรับ 2 เซต

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



เหตุผล

เมื่อบวก $|A| + |B|$ สมาชิกใน $A \cap B$ ถูกนับ **ซ้ำ 2 ครั้ง** จึงต้องลบออก 1 ครั้ง

ตัวอย่าง: Inclusion-Exclusion

โจทย์

ในการสำรวจนักเรียน 100 คน พบว่าชอบคณิตศาสตร์ 60 คน ชอบคอมพิวเตอร์ 45 คน และชอบทั้งสองวิชา 20 คน จงหาจำนวนนักเรียนที่

(ก) ชอบคณิตศาสตร์หรือคอมพิวเตอร์

(ข) ไม่ชอบทั้งสองวิชา

วิธีทำ

ให้ M = ชอบคณิตศาสตร์, C = ชอบคอมพิวเตอร์

$|M| = 60, |C| = 45, |M \cap C| = 20$

(ก) $|M \cup C| = 60 + 45 - 20 = 85$ คน

(ข) ไม่ชอบทั้งสอง = ทั้งหมด - ชอบอย่างน้อยหนึ่ง $= 100 - 85 = 15$ คน

Inclusion-Exclusion สำหรับ 3 เซต

สูตรสำหรับ 3 เซต

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

หลักการ

- **บวก** สมาชิกของ 1 เซต ($|A| + |B| + |C|$)
- **ลบ** ส่วนที่ซ้ำกันของ 2 เซต ($-|A \cap B| - \ldots$)
- **บวกกลับ** ส่วนที่ซ้ำกันของ 3 เซต ($+|A \cap B \cap C|$)

หลักการ: **บวก-ลบ-บวก-ลบ สลับกันไป** ตามจำนวนเซตที่ซ้อนทับ

ตัวอย่าง: ข้อสอบจริง

โจทย์ปี 67 ข้อ 13

กำหนดจำนวนสมาชิกในเซต A, B, C และ $A \cup B$ เป็นดังนี้ $n(A) = 6, n(B) = 5, n(C) = 4$ และ $n(A \cup B) = 8$ เมื่อ $A \times B$ คือผลคูณคาร์ทีเซียนของ A และ B จงหา $n(A \times B) + n[(A \cap B) \times C] + n[(A - B) \times C]$

วิธีทำ

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 6 \times 5 = 30$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 6 + 5 - 8 = 3$$

$$n[(A \cap B) \times C] = n(A \cap B) \times n(C) = 3 \times 4 = 12$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 6 - 3 = 3$$

$$n[(A - B) \times C] = n(A - B) \times n(C) = 3 \times 4 = 12$$

$$n(A \times B) + n[(A \cap B) \times C] + n[(A - B) \times C] = 30 + 12 + 12 = 54$$

สรุป

สรุปเนื้อหา

สิ่งที่ได้เรียนรู้

1. **เซต**: กลุ่มของสิ่งของ — เซตจำกัด vs เซตอนันต์
2. **สับเซต & เซตกำลัง**: $A \subseteq B$, $|P(A)| = 2^{|A|}$
3. **การดำเนินการ**: $\cup$ (หรือ), $\cap$ (และ), $'$ (ไม่), $-$ (ผลต่าง), $\times$ (คาร์ทีเซียน)
4. **กฎเดอมอร์แกน**: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $\quad (A \cap B)' = A' \cup B'$
5. **Inclusion-Exclusion**: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

เอกสารนี้เป็นส่วนหนึ่งของเนื้อหาเตรียมสอบ **สอวน. คอมพิวเตอร์**