พหุนาม (Polynomials)

การดำเนินการ • การหาร • ทฤษฎีบทเศษเหลือ • การแยกตัวประกอบ • ทฤษฎีบททวินาม

None W. (Yuan)

สารบัญ (Outline)

1. นิยามและพื้นฐาน (Definition & Basics)
2. การดำเนินการของพหุนาม (Polynomial Operations)
3. การหารพหุนาม (Polynomial Division)
4. ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)
5. ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)
6. การแยกตัวประกอบ (Factorization)
7. ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)
8. ทฤษฎีบทรากตรรกยะ (Rational Root Theorem)
9. ตัวอย่างโจทย์ประยุกต์
10. สรุป

ก่อนเรียน (Prerequisites)

สิ่งที่ควรรู้ก่อนเรียน

- **จำนวนจริง** — การบวก ลบ คูณ หาร, สมบัติการแจกแจง
- **เลขยกกำลัง** — $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$, $(x^a)^b = x^{ab}$
- **สมการ** — การแก้สมการเชิงเส้นและสมการกำลังสอง

พหุนามคืออะไร?

พหุนาม คือนิพจน์ที่ประกอบด้วยตัวแปรยกกำลังด้วยจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ คูณกับค่าคงที่ แล้วบวกกัน เช่น $3x^3 - 5x^2 + 2x - 7$

นิยามและพื้นฐาน

Definition & Basics

พหุนามคืออะไร?

นิยาม: พหุนามตัวแปรเดียว (Polynomial in One Variable)

พหุนาม คือนิพจน์ที่อยู่ในรูป

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

โดย $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ (สัมประสิทธิ์), $a_n \neq 0$, และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

คำศัพท์สำคัญ

- **ดีกรี (Degree)**: เลขชี้กำลังสูงสุด = n
- **สัมประสิทธิ์นำ**: a_n
- **พจน์คงที่**: a_0

ตัวอย่าง

$P(x) = 4x^5 - 3x^2 + 7x - 1$

ดีกรี $= 5$, สัมประสิทธิ์นำ $= 4$, พจน์คงที่ $= -1$

สิ่งที่ไม่ใช่พหุนาม

ข้อควรระวัง

นิพจน์ต่อไปนี้ **ไม่ใช่** พหุนาม:

- $x^{-2} + 3x$ — เลขชี้กำลังติดลบ
- $2x^{1/2} + 5$ — เลขชี้กำลังไม่เป็นจำนวนเต็ม
- $\frac{1}{x} + x^2$ — x^{-1} คือเลขชี้กำลังติดลบ
- $3^x + x$ — ตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง (exponential)

จำง่าย ๆ

เลขชี้กำลังของ x ต้องเป็น **จำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ** $(0, 1, 2, 3, \ldots)$ เท่านั้น!

การจำแนกพหุนามตามจำนวนพจน์

เอกนาม (Monomial)

$5x^3, \quad -2x, \quad 7$

1 พจน์

ทวินาม (Binomial)

$x^2 + 4, \quad 3x^3 - 2x$

2 พจน์

ไตรนาม (Trinomial)

$x^2 + 5x + 6$

$2x^3 - x^2 + 3$

3 พจน์

การจำแนกตามดีกรี

- ดีกรี 0: **ค่าคงที่** (constant) — เช่น $5, -3$
- ดีกรี 1: **เชิงเส้น** (linear) — เช่น $2x + 1$
- ดีกรี 2: **กำลังสอง** (quadratic) — เช่น $x^2 - 4x + 3$
- ดีกรี 3: **กำลังสาม** (cubic) — เช่น $x^3 + 2x^2 - x + 5$

การดำเนินการของพหุนาม

Polynomial Operations

การบวกและการลบพหุนาม

วิธีทำ

บวก/ลบพจน์ที่เหมือนกัน (พจน์ที่มีตัวแปรและเลขชี้กำลังเดียวกัน) — บวกหรือลบสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่เหมือนกัน

ตัวอย่าง

การบวก: $(3x^3 - 5x^2 + 2x - 1) + (2x^3 + 4x^2 - 3x + 6) = 5x^3 - x^2 - x + 5$

การลบ: $(4x^3 + 2x - 5) - (x^3 - 3x^2 + x + 2) = 3x^3 + 3x^2 + x - 7$

การคูณพหุนาม

วิธีทำ

ใช้สมบัติการแจกแจง (Distributive Property): ทุกพจน์คูณกับทุกพจน์ของอีกพหุนาม แล้วรวมพจน์ที่เหมือนกัน

ตัวอย่าง

เอกนาม × พหุนาม: $3x^2(2x^3 - 5x + 4) = 6x^5 - 15x^3 + 12x^2$

ทวินาม × ทวินาม: $(2x+3)(x^2-4x+5) = 2x^3-8x^2+10x+3x^2-12x+15 = 2x^3-5x^2-2x+15$

การหารพหุนาม

Polynomial Division

การหารยาว (Long Division)

หารพจน์แรก $\rightarrow$ คูณกลับ $\rightarrow$ ลบ $\rightarrow$ ดึงลงมา $\rightarrow$ ทำซ้ำ

ตัวอย่าง: การหารยาว

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x - 2 \\
\hline
x - 2 & x^3 - 4x^2 + 2x + 5 \\
 & -(x^3 - 2x^2) \\
\hline
 & -2x^2 + 2x \\
 & -(-2x^2 + 4x) \\
\hline
 & -2x + 5 \\
 & -(-2x + 4) \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

ตรวจคำตอบ

ผลหาร $= x^2 - 2x - 2$

เศษ $= 1$

$(x - 2)(x^2 - 2x - 2) + 1$

$= x^3 - 2x^2 - 2x - 2x^2 + 4x + 4 + 1$

$= x^3 - 4x^2 + 2x + 5 \quad \checkmark$

การหารสังเคราะห์ (Synthetic Division)

ใช้เมื่อตัวหารอยู่ในรูป $x - c$

วิธีลัดที่ใช้เฉพาะสัมประสิทธิ์ — เร็วกว่าการหารยาวเมื่อตัวหารเป็นเชิงเส้น

ตัวอย่างเดิม: การหารสังเคราะห์

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -4 & 2 & 5 \\ & & 2 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{1} \end{array}$$

ขั้นตอน: ดึงลงมา $\rightarrow$ คูณด้วย c $\rightarrow$ บวก $\rightarrow$ ทำซ้ำ

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+(-4)} -2 \xrightarrow{\times 2} -4 \xrightarrow{+2} -2 \xrightarrow{\times 2} -4 \xrightarrow{+5} 1$$

ผลหาร $= x^2 - 2x - 2$ **เศษ** $= 1$

ทฤษฎีบทเศษเหลือ

Remainder Theorem

ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ทฤษฎีบท

เมื่อหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $(x - c)$ **เศษที่ได้เท่ากับ** $P(c)$

ตัวอย่าง

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 5$ หารด้วย $(x - 2)$

วิธีที่ 1: หารยาว/หารสังเคราะห์ $\rightarrow$ เศษ $= 1$

วิธีที่ 2 (ทฤษฎีบทเศษเหลือ): $P(2) = 2^3 - 4(4) + 2(2) + 5 = 8 - 16 + 4 + 5 = 1$

ได้เศษ $= 1$ เท่ากัน!

ประโยชน์

ไม่ต้องหารจริง! แค่แทนค่า c ลงใน $P(x)$ ก็รู้เศษทันที

ตัวอย่าง: ทฤษฎีบทเศษเหลือ

โจทย์

จงหาเศษจากการหาร $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 7$ ด้วย $x + 1$

วิธีทำ

$x + 1 = x - (-1)$ ดังนั้น $c = -1$

$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) + 7$

$= 1 - 3(-1) + 2(1) + 1 + 7$

$= 1 + 3 + 2 + 1 + 7 = 14$

เศษ $= 14$

ทฤษฎีบทตัวประกอบ

Factor Theorem

ทฤษฎีบทตัวประกอบ

ทฤษฎีบท

$(x - c)$ เป็น **ตัวประกอบ** ของ $P(x)$ **ก็ต่อเมื่อ** $P(c) = 0$

ตัวอย่าง: เป็นตัวประกอบ

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

ดังนั้น $(x - 1)$ เป็นตัวประกอบ ✓

ตัวอย่าง: ไม่เป็นตัวประกอบ

$P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

$P(2) = 8 - 8 + 2 - 3 = -1 \neq 0$

ดังนั้น $(x - 2)$ ไม่เป็นตัวประกอบ

ความสัมพันธ์กับทฤษฎีบทเศษเหลือ

ถ้าเศษ $= 0$ แปลว่าหารลงตัว $\rightarrow$ ตัวหารเป็นตัวประกอบ

การใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบหาค่า k

โจทย์

กำหนด $P(x) = x^3 + kx^2 - 4x + 3$ ถ้า $(x + 1)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ จงหาค่าของ k

วิธีทำ

$(x + 1)$ เป็นตัวประกอบ ดังนั้น $P(-1) = 0$

$P(-1) = (-1)^3 + k(-1)^2 - 4(-1) + 3$

$= -1 + k + 4 + 3 = 0$

$k + 6 = 0$

$k = -6$

การแยกตัวประกอบ

Factorization

การแยกตัวประกอบ: วิธีพื้นฐาน

1. ดึงตัวร่วม

$$6x^3 - 9x^2 + 3x = 3x(2x^2 - 3x + 1)$$

2. จับกลุ่ม (Grouping)

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = x^2(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x^2+3)$$

3. ผลต่างกำลังสอง

$$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$$

$$4x^2 - 9y^2 = (2x-3y)(2x+3y)$$

4. กำลังสองสมบูรณ์

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \quad x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$$

การแยกตัวประกอบ: ผลบวก/ผลต่างกำลังสาม

สูตรและตัวอย่าง

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $\quad$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ $\quad$ $8x^3 + 27 = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

การแยกตัวประกอบ: $x^4 + 4$ และเทคนิคการจัดรูป

เทคนิค: $x^4 + 4$

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

แนวคิด

การทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์แล้วใช้ผลต่างกำลังสอง: บวกและลบ $4x^2$ เพื่อสร้าง $(x^2 + 2)^2$ แล้วใช้ $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

การแยกตัวประกอบโดยใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบ

แนวคิด

หาราก (root) ของพหุนามก่อน — ใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบ — แล้วหารเพื่อลดดีกรี

ตัวอย่าง: หารากและแยกตัวประกอบ

ทดลองแทนค่า: $P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0 \to (x + 1)$ เป็นตัวประกอบ!

หาร $P(x)$ ด้วย $(x + 1)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$

ทฤษฎีบททวินาม

Binomial Theorem

สัมประสิทธิ์ทวินามและสามเหลี่ยมปัสกาล

นิยาม: สัมประสิทธิ์ทวินาม

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (0 \le r \le n)$$

อ่านว่า "n choose r" — จำนวนวิธีเลือกของ r ชิ้นจาก n ชิ้น

สามเหลี่ยมปัสกาล (Pascal's Triangle)

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad 1 \\
n = 1: &\quad 1 \quad 1 \\
n = 2: &\quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
n = 3: &\quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n = 4: &\quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n = 5: &\quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{aligned}$$

สมบัติ

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ (สมมาตร)
- $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$
- แต่ละแถวรวมกัน $= 2^n$

ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบท

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

ตัวอย่าง: $(x+y)^3$

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} x y^2 + \binom{3}{3} y^3$$

$$= 1 \cdot x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + 1 \cdot y^3$$

$$= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$$

ตัวอย่าง: ทฤษฎีบททวินาม

โจทย์ 1

จงกระจาย $(2x-3)^4$

วิธีทำ

$(2x-3)^4 = \sum_{r=0}^{4} \binom{4}{r} (2x)^{4-r}(-3)^r$
$= 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$

ตัวอย่าง: การหาพจน์ที่ต้องการ

โจทย์

จงหาพจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(x+2)^8$

วิธีทำ

พจน์ที่ $r+1$: $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r \quad \rightarrow \quad r=4$: $\binom{8}{4}x^4(2)^4 = 70 \cdot x^4 \cdot 16 = 1{,}120x^4$

โจทย์ 2

จงหาพจน์กลางของการกระจาย $(2x-1)^6$

วิธีทำ

$n = 6$ มี 7 พจน์ $\rightarrow$ พจน์กลางคือพจน์ที่ 4 ($r = 3$)

$\binom{6}{3}(2x)^3(-1)^3 = 20 \cdot 8x^3 \cdot (-1) = -160x^3$

ทฤษฎีบทรากตรรกยะ

Rational Root Theorem

ทฤษฎีบทรากตรรกยะ

ทฤษฎีบท

ถ้าพหุนาม $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และ $\frac{p}{q}$ เป็นรากตรรกยะในรูปเศษส่วนอย่างต่ำแล้ว:

p **หาร** a_0 **ลงตัว** และ q **หาร** a_n **ลงตัว**

ตัวอย่าง: หารากตรรกยะ

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$: $a_n = 2, a_0 = 2$

รากที่เป็นไปได้: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}$

ทดสอบ: $P(1) \neq 0$, $P(-1) = 0$ ✓, $P(2) = 0$ ✓, $P(\frac{1}{2}) = 0$ ✓

$P(x) = (x+1)(x-2)(2x-1)$

ตัวอย่างโจทย์ประยุกต์

ตัวอย่าง: หาพหุนามจากรากที่กำหนด

โจทย์

จงสร้างพหุนามดีกรี 3 ที่มีสัมประสิทธิ์นำ $= 1$ และมีรากเป็น $2, -1, 4$

วิธีทำ

ราก $= 2, -1, 4$ ดังนั้นตัวประกอบคือ $(x-2), (x+1), (x-4)$

$P(x) = (x-2)(x+1)(x-4)$

$= (x^2 - x - 2)(x-4)$

$= x^3 - 4x^2 - x^2 + 4x - 2x + 8$

$= x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

ตัวอย่าง: หาค่า k จากเงื่อนไขเศษเหลือ

โจทย์

เมื่อหาร $P(x) = 2x^3 + kx^2 - 5x + 3$ ด้วย $(x - 2)$ เหลือเศษ 7 จงหาค่า k

วิธีทำ

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ: $P(2) = 7$

$$2(8) + k(4) - 5(2) + 3 = 7$$

$$16 + 4k - 10 + 3 = 7$$

$$4k + 9 = 7$$

$$4k = -2$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง: แยกตัวประกอบพหุนามดีกรี 4

โจทย์

จงแยกตัวประกอบของ $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

วิธีทำ

ให้ $y = x^2$: $\quad P(x) = y^2 - 5y + 4 = (y-1)(y-4)$

แทน $y = x^2$ กลับ: $\quad (x^2-1)(x^2-4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

เทคนิค

พหุนามในรูป $ax^{2n} + bx^n + c$ (quadratic in form) — ใช้การแทนค่าเพื่อลดดีกรี

สรุป

สรุปเนื้อหา

สิ่งที่ได้เรียนรู้

1. **นิยาม**: $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, ดีกรี, สัมประสิทธิ์
2. **การดำเนินการ**: บวก/ลบ (รวมพจน์เหมือน), คูณ (แจกแจง)
3. **การหาร**: หารยาว, หารสังเคราะห์ (ตัวหาร $x - c$)
4. **ทฤษฎีบทเศษเหลือ**: เศษจาก $(x - c) = P(c)$
5. **ทฤษฎีบทตัวประกอบ**: $P(c) = 0 \iff (x - c)$ เป็นตัวประกอบ
6. **การแยกตัวประกอบ**: ดึงตัวร่วม, จับกลุ่ม, ผลต่างกำลังสอง, กำลังสองสมบูรณ์, ผลบวก/ผลต่างกำลังสาม, ใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบ
7. **ทฤษฎีบททวินาม**: $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, สามเหลี่ยมปัสกาล, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
8. **ทฤษฎีบทรากตรรกยะ**: $\frac{p}{q}$ โดย $p \mid a_0$, $q \mid a_n$