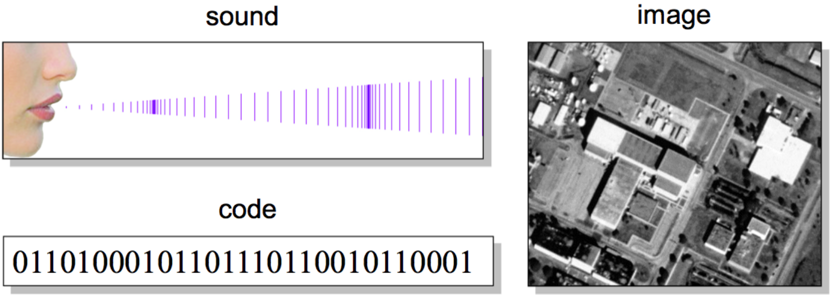
Xử lý ảnh - Biến đổi Fourier 1& 2 chiều

Tín hiệu

Là hiện tượng có thể đo được và nó có thể thay đổi theo thời gian hoặc không gian



Tín hiệu: biểu diễn không gian - thời gian (*Space - Time*) và biểu diễn miền tần số (*Frequency-Domain*)

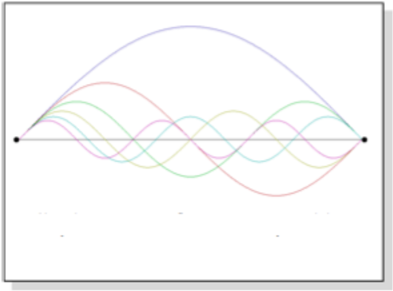
- Biểu diễn không gian/thời gian: là một đồ thị các phép đo tương ứng tại một thời điểm và/hoặc các vị trí trong không gian
- Biểu diễn miền tần số: là mô tả chính xác tín hiệu thông qua sự chuyển động sóng của nó

Nguồn gốc của âm thanh

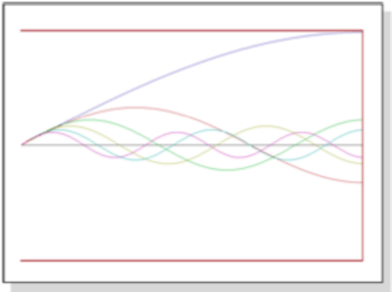
- Các rung động cơ học của đối tượng trong không khí
- Rung động: chuyển động đàn hồi bên trong của vật chất
- Các đối tượng rung động với các kiểu (*mode*) khác nhau
- *Mode* là một mẫu rung với hình dáng đặt biệt

Các mẫu rung: ví dụ

Chú ý rằng các *mode* là các sóng hình sin (*sinusoids*)

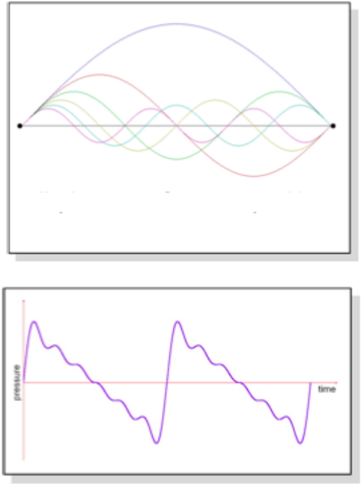


string modes

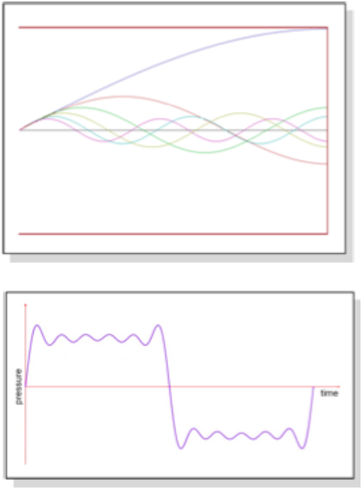


pipe modes

Sóng âm



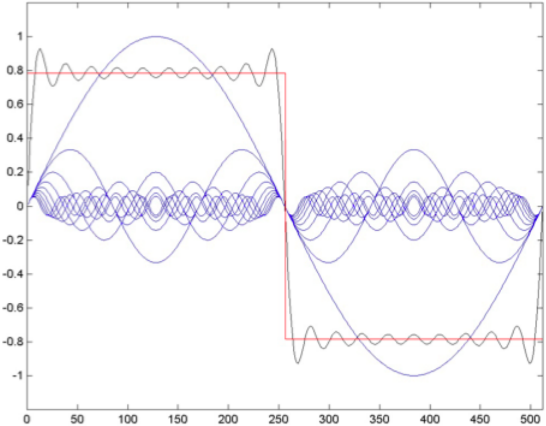
string sound



pipe sound

Mọi tín hiệu nào đều có biểu diễn miền tần số

$$sq(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(2n+1)t\right]$$



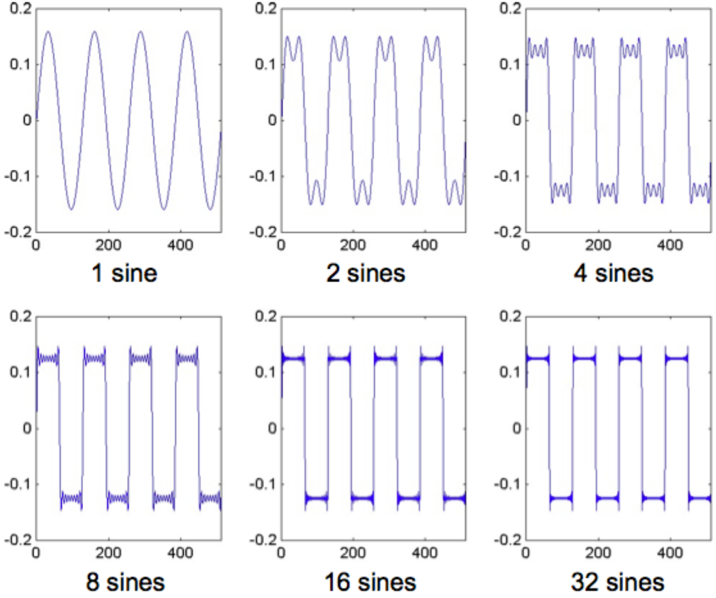
Biểu diễn miền tần số

- Bất kì tín hiệu tuần hoàn nào đều có thể được mô tả bằng tổng các hàm *sinusoids*

$$sq(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(2n+1)t\right]$$

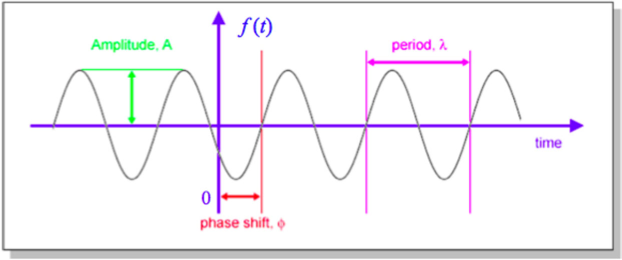
- Các *sinusoids* được gọi là các hàm cơ bản
- Các hệ số nhân gọi là các hệ số Fourier

Ví dụ


0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
0
200
400
1 sine
2 sines
4 sines
8 sines
16 sines
32 sines

Thành phần trong *sinusoids*

$$f(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}t - \phi\right)$$



- $\frac{1}{\lambda}$ là tần số của *sinusoids* (Hz)
- $\frac{2\pi}{\lambda}$ là tần số góc (radians/s)

Đo độ tương tự

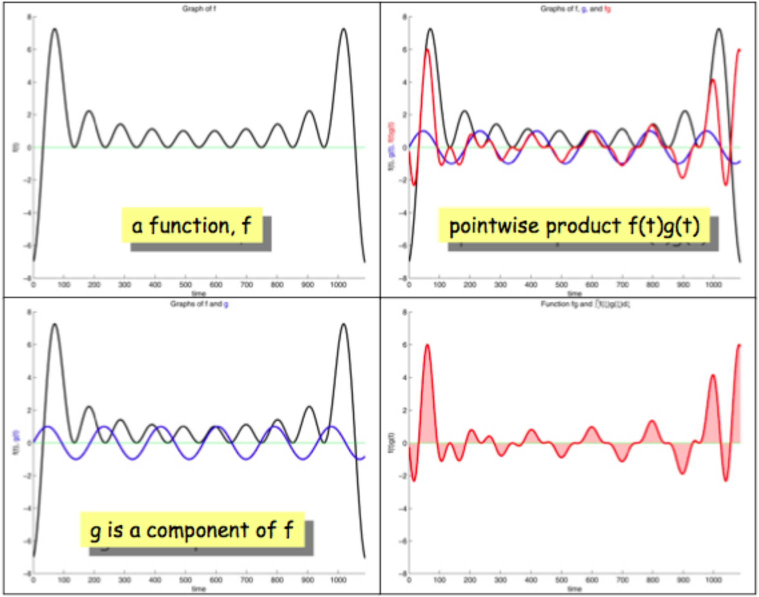
Độ tương tự giữa hai hàm f và g trong khoảng $(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2})$ được định nghĩa bởi:

$$< f, g >= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)g^*(t)dt$$

với $g^*(t)$ là liên hợp phức của $g(t)$

- $< f, g >$ được xem như một phép chiếu của f lên g
- Nếu f và g có cùng năng lượng, thì $< f, g >$ đạt giá trị lớn nhất khi $f = g$.

Độ tương tự - Ví dụ



Tích của hàm tuần hoàn và hàm *sinusoids*

$$< f, g >= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right) dt$$

$$< f, g >= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} t\right) dt$$

Các kết quả số thực cho biên độ hay độ lớn (*amplitude*) của hàm *sinusoids* trong hàm

Tích của hàm tuần hoàn và hàm *sinusoids*

$$
\begin{aligned}
< f, g > &= \int\limits_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}t\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}t\right)\right]dt \\
&= \int\limits_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}t}dt = \int\limits_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)e^{-i\omega t}dt
\end{aligned}
$$

Các kết quả số phức cho biên độ (*amplitude*) và pha (*phase*) của hàm *sinusoids* trong hàm

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t\right)$$

Tuần hoàn: $\exists \lambda \in R$ sao cho $f(t \pm n\lambda) = f(t)$

$$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \left[\cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t - \varphi_n\right)\right] dt \text{ với } n \geq 0$$

$$B_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) \left[\sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t - \varphi_n\right)\right] dt \text{ với } n \geq 0$$

Chuỗi Fourier phức

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| e^{+i\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t+\phi_n\right)}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t + \phi_n\right) + |C_n| \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t + \phi_n\right)$$

$$C_n = |C_n| e^{+i\phi_n} = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi n}{\lambda}t} dt$$

Trong đó: $i = \sqrt{-1}$; $C_n = |C_n|e^{+i\phi_n}$; $e^{\pm ix} = \cos x + i \sin x$ và $f(t + n\lambda) = f(t)$ với mọi số nguyên n

Mối quan hệ giữa chuỗi Fourier thực và phức

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right] \text{ với } \omega_n = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

$$= \frac{2}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\cos\omega_n\eta d\eta \cos\omega_n t + \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\sin\omega_n\eta d\eta \sin\omega_n t\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\left[\cos\omega_n\eta\cos\omega_n t + \sin\omega_n\eta\sin\omega_n t)\right] d\eta$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\cos(\omega_n\eta - \omega_n t) d\eta$$

Mối quan hệ giữa chuỗi Fourier thực và phức (tiếp)

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\omega_n \eta - \omega_n t\right)$$

Nên:

$$\int\limits_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \left[f(\eta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\omega_n \eta - \omega_n t\right) \right] d\eta = 0$$

Do đó:

$$-i \frac{1}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta) \sin\left(\omega_n \eta - \omega_n t\right) d\eta \right] = 0$$

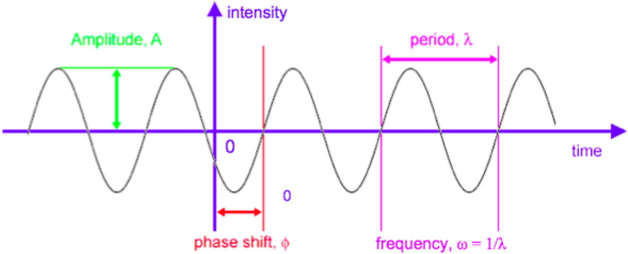
$$f(t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta) \cos\left(\omega_n \eta - \omega_n t\right) d\eta \right] - i \frac{1}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta) \sin\left(\omega_n \eta - \omega_n t\right) d\eta \right]$$

Mối quan hệ giữa chuỗi Fourier ảo và thực (tiếp)

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\boxed{\cos(\omega_n\eta-\omega_n t)}\,d\eta\right] - i\frac{1}{\lambda}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\boxed{\sin(\omega_n\eta-\omega_n t)}\,d\eta\right]\\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\boxed{[\cos\omega_n(\eta-t)-i\sin\omega_n(\eta-t)]\,d\eta}\\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)\boxed{e^{-i\omega_n(\eta-t)}}\,d\eta\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\boxed{\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(\eta)e^{-i\frac{2\pi n}{\lambda}\eta}\,d\eta}\,e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\boxed{C_n}\,e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|e^{i\phi_n}e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|e^{+i\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t+\phi_n\right)}
\end{aligned}
$$

Ý nghĩa các hệ số

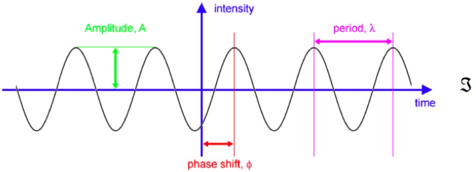
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t} \text{ với } C_n = |C_n| e^{+i\phi_n}$$

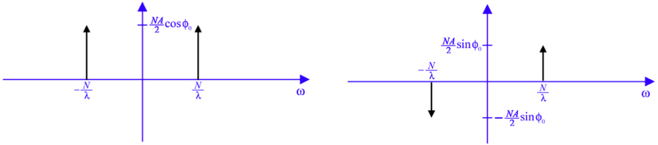


$$A = |C_n|, \text{ và } \omega_n = 2\pi n/\lambda$$

Phần thực + Phần ảo?

$$f(n) = A\cos[(2\pi n/\lambda) - \phi_0] \text{ với } n = 0, \dots, N\text{-}1$$



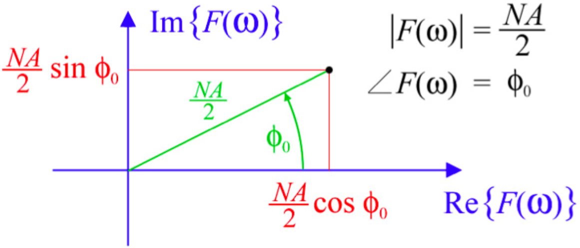


$Re\{F(\omega)\}$ $Im\{F(\omega)\}$

$$F(\omega) = (\frac{NA}{2}\cos\varphi)\left[\delta(\omega + N/\lambda) + \delta(\omega - N/\lambda)\right] + i(\frac{NA}{2}\sin\varphi)[-\delta(\omega + N/\lambda) + \delta(\omega - N/\lambda)]$$

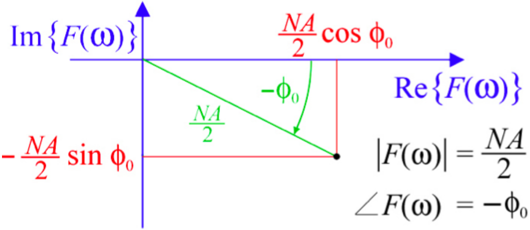
Phần thực + Phần ảo đến Biên độ & Pha

$$F(\omega = +N/\lambda) = \frac{NA}{2}\cos\phi_0 + i\frac{NA}{2}\sin\phi_0$$



Phần thực + phần ảo đến Biên độ & Pha

$$F(\omega = -N/\lambda) = \frac{NA}{2}\cos\phi_0 - i\frac{NA}{2}\sin\phi_0$$



Biến đổi Fourier

là phép biến đổi một tín hiệu không tuần hoàn thành tổng liên tục của các *simusoids*

$$F(\omega) = \left|F(\omega)\right| e^{i\Phi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i2\pi\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\cos(2\pi\omega t) + i \sin(2\pi\omega t)\right] dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right| e^{-i(2\pi\omega t + \Phi(\omega))} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\cos(2\pi\omega t) - i \sin(2\pi\omega t)\right] d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|F(\omega)\right| \left[\cos(2\pi\omega t + \Phi(\omega)) - i \sin(2\pi\omega t + \Phi(\omega))\right] d\omega$$

Tín hiệu rời rạc, $\{h_k | k = 0, 1, ..., N-1\}$, có chiều dài N hữu hạn, có thể biểu diễn thành tổng có trọng số của N *simusoids*, $\{e^{-i2\pi kn/N} | n = 0, ..., N-1\}$ như sau:

$$h_k = \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-i2\pi kn/N}$$

trong đó tập $\{H_n | n = 0, 1, ..., N-1\}$ là các hệ số Fourier

$$H_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{+i2\pi kn/N}$$

- Bài 1: Tính DFT của tín hiệu $x[k]$ có chiều dài $N = 4$ định nghĩa như sau:

$$x[k] = \begin{cases} 2 & \text{nếu } k = 0 \\ 3 & \text{nếu } k = 1 \\ -1 & \text{nếu } k = 2 \\ 1 & \text{nếu } k = 3 \end{cases}$$

- Bài 2: Tính inverse DFT của $X[r]$ được định nghĩa như sau:

$$X[r] = \begin{cases} 5 & \text{nếu } r = 0 \\ 3 - j2 & \text{nếu } r = 1 \\ -3 & \text{nếu } r = 2 \\ 3 + j2 & \text{nếu } r = 3 \end{cases}$$

- Bài 3^* Tính DFT của tín hiệu $x[k]$ có chiều dài N định nghĩa như sau:

$$x[k] = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq k \leq N_1 - 1 \\ 0 & \text{nếu } N_1 \leq k \leq N \end{cases}$$

Biến đổi Fourier hai chiều

Vài ứng dụng cơ bản của FT trong xử lý ảnh

- Giả thích tại sao quá trình giảm mẫu (*down-sampling*) có thể thêm hiệu ứng không tốt (*distortion*) lên một ảnh và làm sao để tránh được điều này
- Rất hữu ích cho bài toán giảm nhiễu, và các kiểu phục hồi ảnh khác
- Phát hiện các đặc trưng và đặc biệt phát hiện các cạnh

Gọi $\mathrm{I}(r,c)$ là một ảnh số (1 kênh màu) với R hàng và C cột. Khi đó $\mathrm{I}(r,c)$ có biểu diễn Fourier

$$\mathrm{I}(r,c) = \sum_{u=0}^{R-1}\sum_{v=0}^{C-1} \Im(v,u) e^{+i2\pi\left(\frac{vr}{R}+\frac{uc}{C}\right)}$$

trong đó

$$\Im(v,u) = \frac{1}{RC}\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{c=0}^{C-1} \mathrm{I}(r,c) e^{-i2\pi\left(\frac{vr}{R}+\frac{uc}{C}\right)}$$

là các hệ số Fourier

2D sinusoids?

Để đơn giản ta giả sử $R = C = N$. Khi đó

$$e^{\pm i2\pi(\frac{vr}{R}+\frac{uc}{C})} = e^{\pm i\frac{2\pi}{N}(vr+uc)} = e^{\pm i\frac{2\pi\omega}{N}(r\sin\theta+c\cos\theta)}$$

với

$$v = \omega sin\theta, u = \omega\cos\theta, \omega = \sqrt{v^2+u^2} \text{ và } \theta = tan^{-1}(\frac{v}{u})$$

Viết $\lambda = \frac{N}{\omega}$ thì ta có

$$e^{\pm i2\pi\frac{1}{\lambda}(r\sin\theta+c\cos\theta)} = \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(r\sin\theta+c\cos\theta\right)\right]\pm i\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(r\sin\theta+c\cos\theta\right)\right]$$

2D sinusoids ?

Phần thực

$$Re\{e^{\pm i2\pi\frac{1}{\lambda}(r\sin\theta+c\cos\theta)}\} = +\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(r\sin\theta + c\cos\theta)]$$

Phần ảo

$$Im\{e^{\pm i2\pi\frac{1}{\lambda}(r\sin\theta+c\cos\theta)}\} = \pm i\sin[\frac{2\pi}{\lambda}(r\sin\theta + c\cos\theta]$$