



CentraleSupélec

NONNENMACHER Alexandre

CentraleSupélec 2^{ème} année

Stage de 2A

Année 2025-2026

Etude et implémentation de stratégies de couverture

pour options sur cryptomonnaies

**Forvis Mazars
Levallois-Perret**

**Maître de stage : Guillaume Chartier
14/06/2025 – 19/09/2025**

Abstract

Le sujet de ce stage porte sur la conception et l'évaluation de stratégies automatiques de couverture (*hedging*) pour des options sur cryptomonnaies. L'étude se place du point de vue d'un vendeur de produits dérivés avancés souhaitant contrôler son risque de marché en ajustant dynamiquement des positions d'instruments de *hedge*, selon des règles systématiques, reproductibles et exploitables en pratique.

Afin d'isoler les effets des sensibilités et de valider la méthodologie dans un cadre maîtrisé, les tests sont menés sur des données simulées sous dynamique de Black–Scholes à volatilité constante et drift nul. Le rapport présente (i) le cadre théorique et les motivations économiques de la couverture, (ii) l'architecture logicielle et les choix de modélisation (marges, frais, portefeuille), et (iii) une analyse quantitative des performances selon plusieurs métriques : erreur de réPLICATION, frais, score et CDaR. L'objectif final est d'identifier des stratégies de couverture efficaces et de comprendre leurs limites.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une collaboration naissante entre Mazars et Crito, une structure en cours de création spécialisée dans le marché des dérivés avancés sur cryptomonnaies. Il a permis d'introduire ces problématiques auprès des équipes Quant de Forvis Mazars, d'ouvrir la voie à d'éventuelles missions futures autour du hedging, et de fournir une première base méthodologique et opérationnelle sur laquelle ces travaux pourront s'appuyer.

Contents

1	Introduction	4
2	Cadre théorique des options et de la volatilité	5
2.1	Pricing des options et volatilité implicite	5
2.2	Surface de volatilité implicite et rôle dans le hedging	5
2.3	Paramétrage SVI de la surface	5
2.4	Cadre théorique pour les simulations	7
3	Attribution du P&L	8
3.1	Cadre théorique général	8
3.2	Utilité pour le hedging	8
4	Stratégies de Hedging	11
4.1	Contexte	11
4.2	Principes généraux du hedging	11
4.2.1	Objectif	11
4.2.2	Sensibilités principales	11
4.3	Option asiatique géométrique discrète	12
4.4	Instruments de couverture	13
4.4.1	Présentation des instruments	13
4.4.2	Modélisation des instruments	14
4.4.3	Frais de transaction	14
4.5	Couverture Delta et Gamma	15
4.5.1	Modélisation du portefeuille	15
4.5.2	Neutralisation du Gamma	15
4.5.3	Neutralisation du Delta	15
4.6	RéPLICATION DES SENSIBILITÉS D'UN PRODUIT	16
4.6.1	Première approche	16
4.6.2	Optimisation du hedge Gamma	17
5	Implémentation	18
5.1	Architecture générale du code	18
5.2	Pipeline d'exécution et stockage des résultats	19
6	Évaluation de la performance des stratégies de couverture	21
6.1	Métriques de performance	21
6.2	Limites de l'évaluation statique et nécessité d'un critère de risque temporel	21
6.3	Drawdown du Score et définition de la CDaR	21
6.4	Résultats : Delta Hedging d'un call vanille	22

6.5 Résultats : Hedging d'un call asiatique	23
7 Conclusions	27
7.1 État actuel de l'outil	27
7.2 Perspectives d'amélioration	27
A Résolution du problème de Gamma hedging par Lagrangien	29

1 Introduction

Les cryptomonnaies ont donné naissance à un écosystème de produits dérivés, tels que les perpetual futures, les futures ou les options, qui offrent à la fois des opportunités de couverture et des sources de risque spécifiques. Comparés aux marchés financiers traditionnels, ces marchés présentent une liquidité hétérogène, des profils de volatilité marqués et des structures de coûts et de marges particulières. De plus, ils fonctionnent 24 heures sur 24 et 7 jours sur 7, ce qui rend les approches de desk classiques, basées sur des horaires de marché fixes et des points de contrôle intraday, largement inadaptées. La gestion et la couverture doivent donc être repensées pour tenir compte de cette continuité et de cette dynamique permanente. Dans ce contexte, le vendeur d'options a besoin d'outils robustes, systématiques et transparents pour gérer ses positions et couvrir efficacement les risques, tout en restant réactif aux conditions de marché.

Le présent travail s'inscrit dans le cadre d'une mission académique inspirée par une collaboration naissante entre Forvis Mazars et une structure en création, positionnée entre *market-making* et conception de produits dérivés crypto avancés. Cette structure vise à développer des instruments innovants sur des actifs très volatils, rendant indispensable une maîtrise fine des sensibilités et des mécanismes de couverture pour piloter les positions en continu.

L'objectif de ce projet est double. Premièrement, structurer une démarche de *hedging* automatique, modulable et reproductible, avec un focus initial sur le *delta* et le *gamma*. Deuxièmement, quantifier l'efficacité des couvertures mises en place à l'aide de métriques adaptées, afin de fournir une analyse rigoureuse de la performance des stratégies.

La structure du rapport reflète la logique de l'étude : après l'introduction, la Section 2 expose le cadre théorique relatif aux options et à la volatilité, la Section 3 présente l'attribution du P&L, et la Section 4 décrit les stratégies de couverture et la modélisation des instruments. Les sections finales traitent de l'implémentation, de l'évaluation des performances et des perspectives d'amélioration.

2 Cadre théorique des options et de la volatilité

2.1 Pricing des options et volatilité implicite

Le prix d'une option est déterminé par l'évaluation de son paiement futur attendu, pondéré par une mesure de risque appropriée. Le modèle classique de Black-Scholes fournit une formule analytique en supposant que le sous-jacent suit une dynamique log-normale [1] avec volatilité constante, que les marchés sont liquides et sans frictions, et qu'une couverture continue est possible. Ces hypothèses permettent des calculs explicites pour le prix des options et leurs sensibilités, mais elles sont rarement vérifiées dans la pratique, et encore moins sur les marchés de cryptomonnaies où la volatilité est élevée et les liquidités hétérogènes.

La *volatilité implicite* correspond à la volatilité que le modèle de Black-Scholes doit adopter pour que le prix théorique de l'option corresponde au prix observé sur le marché. Elle varie selon le strike et la maturité, ce qui explique les formes de *smile* et de *skew*. Étudier ces variations est important pour le vendeur d'options, car elles indiquent le coût du risque et aident à construire des stratégies de couverture efficaces.

2.2 Surface de volatilité implicite et rôle dans le hedging

Pour représenter l'ensemble des options disponibles, on construit la *surface de volatilité implicite* $v(k, T)$, qui donne, pour chaque maturité T et chaque log-moneyness $k = \ln(K/F_t)$ (avec F_t le prix forward), la volatilité implicite totale. Cette surface permet d'évaluer correctement des options de strikes et maturités différents, de calculer les sensibilités (*Greeks*) du portefeuille, et d'anticiper le coût d'une couverture dynamique.

Dans ce projet, l'analyse de la surface ne se limite pas au calcul de la volatilité implicite. L'objectif est d'extraire des paramètres représentatifs de sa forme et d'étudier leur évolution dans le temps. Ces paramètres traduisent les caractéristiques du marché et, à terme, pourraient être utilisés pour se couvrir contre les variations de volatilité elle-même. Autrement dit, la couverture ne se limite pas aux mouvements du sous-jacent, mais pourrait intégrer les risques implicites contenus dans la surface.

2.3 Paramétrage SVI de la surface

Pour paramétriser efficacement la surface par tranche de maturité tout en respectant les contraintes de non-arbitrage, nous utilisons le modèle *Stochastic Volatility Inspired* (SVI). La variance implicite totale $\omega(k, T)$ est représentée par cinq paramètres [2] :

$$\omega(k) = a + b \left(\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2} \right),$$

où $k = \ln(K/F_t)$ est la log-moneyness. Les conditions de non-arbitrage imposent : $b \geq 0$, $|\rho| < 1$, $\sigma > 0$, et $a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2} \geq 0$.

Chaque paramètre a une interprétation intuitive : a fixe le niveau minimal de variance, b contrôle la pente asymptotique, ρ régule l'asymétrie des ailes du smile, m translate horizontalement le smile, et σ ajuste la courbure autour de l'at-the-money. L'évolution dans le temps de ces paramètres reflète la dynamique des anticipations de marché et constitue une information précieuse pour la construction de stratégies de couverture avancées.

Dans ce projet académique, nous n'avons pas implémenté de couverture directe sur les paramètres SVI. Nous avons toutefois étudié l'influence de chacun d'eux sur la forme du smile, afin de comprendre comment les variations de marché peuvent affecter un portefeuille de dérivés. L'objectif final serait de se couvrir contre ces variations implicites, mais pour une démarche méthodologiquement progressive, nous nous concentrerons ici sur le delta et le gamma hedging, en supposant volatilité constante et drift nul.

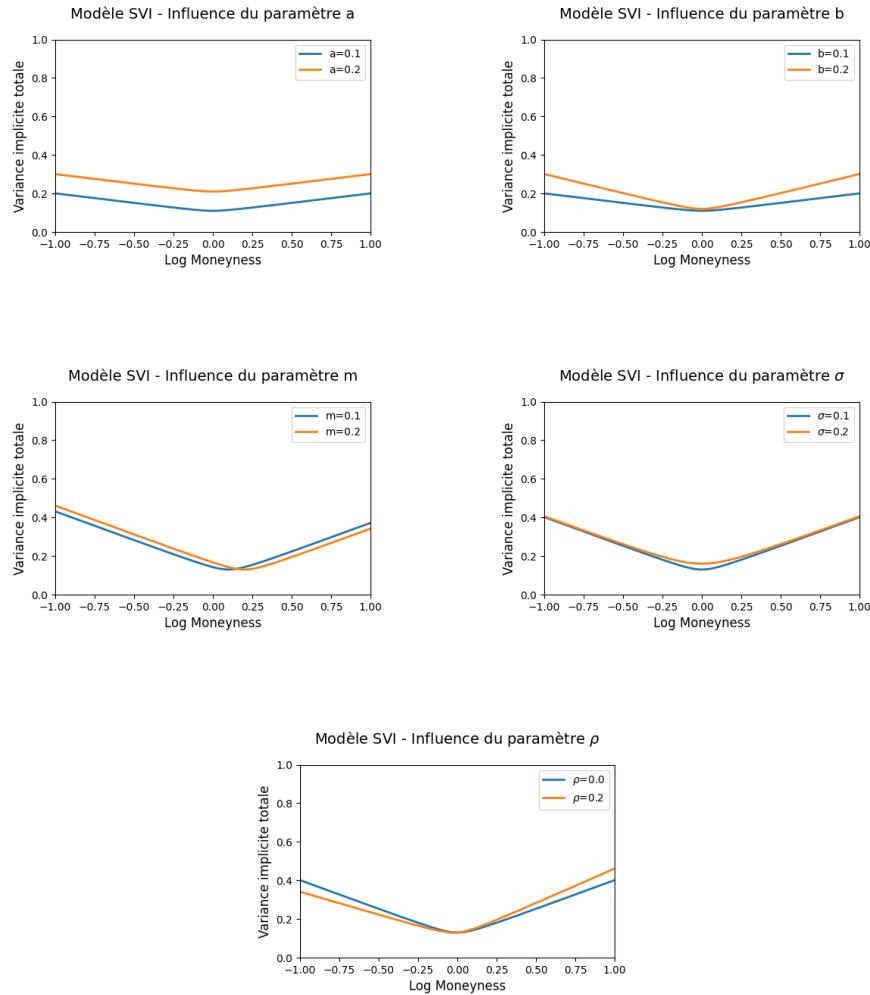


Figure 1: Influence des différents paramètres du modèle SVI sur la forme du smile de volatilité implicite.

2.4 Cadre théorique pour les simulations

Pour isoler les effets de couverture et assurer une analyse rigoureuse, nous avons choisi de travailler sur des données simulées. Cette approche incrémentale permet de contrôler précisément les hypothèses, de générer plusieurs trajectoires pour obtenir des distributions statistiques robustes, et de distinguer l'effet des modèles des imperfections de marché, comme la liquidité limitée ou les sauts exogènes. Dans un deuxième temps, cette démarche ouvre la voie à l'intégration de volatilité non constante, de drift stochastique et d'autres extensions du modèle afin de se rapprocher progressivement de la complexité des marchés réels.

Sous le modèle de Black-Scholes à volatilité constante σ et drift nul, le sous-jacent S_t suit la dynamique :

$$dS_t = \sigma S_t dW_t,$$

où W_t est un mouvement brownien standard. La simulation numérique utilise la discrétisation d'Euler, avec un pas $\Delta t = 1$ h. Ce choix constitue un compromis raisonnable : un pas trop grand dégraderait la précision des trajectoires et des payoffs path-dependent, tandis qu'un pas trop petit augmenterait considérablement le temps de calcul. La discrétisation horaire permet de capturer correctement les variations intra-journalières tout en maintenant des performances de calcul acceptables. De cette discrétisation, on tire :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot \exp \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_t \right), \quad Z_t \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Cette approche permet donc de calculer les prix et sensibilités des produits dérivés et de tester différentes stratégies de couverture delta et gamma dans un cadre contrôlé. L'introduction du SVI et l'étude de ses paramètres préparent le terrain pour des extensions futures, où la couverture pourrait être adaptée aux variations de volatilité implicite observées sur le marché.

3 Attribution du P&L

3.1 Cadre théorique général

L'attribution du P&L (*Profit and Loss*) consiste à décomposer la variation de valeur d'un produit dérivé en contributions liées aux différents facteurs de risque qui influencent son prix [1, 3]. Dans un cadre général, la valeur d'un produit dérivé peut dépendre de plusieurs variables de marché, telles que le prix du sous-jacent S_t , la volatilité implicite σ_t , le taux d'intérêt r_t , ainsi que d'autres facteurs exogènes notés $(X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n)$. On note donc :

$$V_t = V(t, S_t, \sigma_t, r_t, X_t^1, \dots, X_t^n).$$

Pour formaliser l'ensemble des facteurs de risque, posons l'ensemble des variables stochastiques

$$\xi_t = (\xi_t^1, \dots, \xi_t^m) = (S_t, \sigma_t, r_t, X_t^1, \dots, X_t^n), \quad m = 3 + n.$$

Le lemme d'Itô multivarié s'écrit alors

$$dV_t = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^m \frac{\partial V}{\partial \xi^i} d\xi_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^i \partial \xi^j} d\langle \xi^i, \xi^j \rangle_t. \quad (1)$$

Chaque terme correspond à la contribution d'un facteur de risque spécifique et permet de définir les sensibilités classiques, également appelées *Greeks* :

- **Delta** : $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, sensibilité du prix du produit à une variation infinitésimale du sous-jacent.
- **Gamma** : $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$, mesure la variation du **Delta** par rapport au prix du sous-jacent. Il représente la convexité de l'option et indique la sensibilité du portefeuille aux variations quadratiques du sous-jacent.
- **Théta** : $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$, sensibilité à l'écoulement du temps.
- **Vega** : $\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$, sensibilité à la volatilité implicite.
- **Rho** : $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$, sensibilité au taux d'intérêt.
- **Sensibilités aux autres facteurs** : $\frac{\partial V}{\partial X^i}$, représentant la variation de valeur due à d'autres facteurs de marché spécifiques.

L'attribution du PL consiste donc à approximer la variation de valeur du produit par la somme des contributions de ces facteurs.

3.2 Utilité pour le hedging

Dans le contexte de Crito, vendre un produit dérivé correspond à s'engager à payer sa valeur à tout instant. La mise en place de notre portefeuille de couverture consiste à construire un portefeuille Π_t qui reproduit au mieux la valeur du produit, en neutralisant les composantes de risque dominantes.

Dans le cadre simplifié considéré ici (volatilité constante et drift nul), prenons un produit qui ne dépend que du sous-jacent S_t et du passage du temps, sans facteur de risque exogène. La variation infinitésimale de sa valeur V_t s'écrit alors :

$$dV_t \approx \Theta_{\text{produit}} dt + \Delta_{\text{produit}} dS_t + \frac{1}{2} \Gamma_{\text{produit}} d\langle S \rangle_t,$$

où $\Theta_{\text{produit}} = \partial V / \partial t$, $\Delta_{\text{produit}} = \partial V / \partial S$ et $\Gamma_{\text{produit}} = \partial^2 V / \partial S^2$.

Hedge Delta seul et volatilité réalisée

Dans un hedge qui ne neutralise que le Delta, le portefeuille est protégé contre les variations linéaires du sous-jacent, mais il reste sensible à la convexité du produit. Cette sensibilité est capturée par le Gamma. La variation du P&L dépend alors de la différence entre la volatilité réelle du marché et la volatilité implicite utilisée pour valoriser le produit et construire le hedge. On note σ_{impl} la volatilité implicite, c'est-à-dire la volatilité utilisée pour valoriser l'option et calculer le Delta, et σ_{realized} la volatilité réalisée, mesurée sur le sous-jacent sur la période considérée. Si la volatilité réalisée diffère de la volatilité implicite, un P&L résiduel apparaît même avec un Delta hedge parfait.

Pour un produit avec Gamma Γ_{produit} et prix du sous-jacent S_t , ce P&L résiduel peut s'écrire de manière infinitésimale comme :

$$d(\Pi_t - V_t) \approx \frac{1}{2} \Gamma_{\text{produit}} S_t^2 (\sigma_{\text{realized}}^2 - \sigma_{\text{impl}}^2) dt.$$

Cette expression montre que si la volatilité réalisée est supérieure à la volatilité implicite, le P&L est positif pour un produit long Gamma et négatif pour un produit short Gamma. Inversement, si la volatilité réalisée est inférieure à la volatilité implicite, le P&L est négatif pour un produit long Gamma et positif pour un produit short Gamma. Ainsi, le Delta hedge réduit l'exposition linéaire au sous-jacent, mais ne protège pas contre le risque lié à la convexité et aux écarts de volatilité. Cette observation souligne l'intérêt de compléter le hedge par un Gamma hedge lorsque l'on souhaite neutraliser complètement les variations du sous-jacent.

Hedge Delta-Gamma

Si le portefeuille est construit pour avoir le même Delta et le même Gamma que le produit de vente, sa variation infinitésimale est :

$$d\Pi_t \approx \Theta_{\text{hedge}} dt + \Delta_{\text{hedge}} dS_t + \frac{1}{2} \Gamma_{\text{hedge}} d\langle S \rangle_t,$$

avec $\Delta_{\text{hedge}} = \Delta_{\text{produit}}$ et $\Gamma_{\text{hedge}} = \Gamma_{\text{produit}}$. En soustrayant les deux expressions, on obtient :

$$d(\Pi_t - V_t) \approx (\Theta_{\text{hedge}} - \Theta_{\text{produit}}) dt.$$

Dans ce cadre, une couverture parfaite en Delta et Gamma neutralise toutes les contributions liées au sous-jacent, ne laissant subsister que la composante temporelle (Théta) dans le P&L [1]. Cette décomposition fournit un cadre clair pour évaluer la pertinence des stratégies de hedging mises en œuvre dans la suite du rapport.

4 Stratégies de Hedging

4.1 Contexte

Le cœur de ce stage est la mise en place d'une stratégie de couverture automatique appliquée à un portefeuille short d'options sur cryptomonnaies. Être vendeur d'options expose directement à des pertes potentielles si le sous-jacent évolue défavorablement. Comme vu précédemment l'objectif de la couverture est de réduire cette exposition en neutralisant les principales sensibilités (ou *Greeks*) du produit. Nous allons nous pencher sur la couverture d'une option asiatique. Les hypothèses relatives au marché sont les mêmes que précédemment, à savoir une volatilité constante, un drift nul et un sous-jacent évoluant suivant une loi log-normale issue du modèle de BlackScholes. L'objectif est de modéliser une stratégie qui déterminera quand hedger, des instruments de couvertures, des frais de transaction et de tester l'efficacité de la couverture suivant des métriques à définir.

4.2 Principes généraux du hedging

4.2.1 Objectif

Le hedging vise à stabiliser la valeur d'un portefeuille en compensant les effets des variations du marché. Plus précisément, il s'agit de neutraliser les sensibilités principales de l'option vendue afin que la valeur du portefeuille de couverture évolue en miroir de celle de la liability.

4.2.2 Sensibilités principales

Les sensibilités couvertes dans ce projet sont :

- **Delta (Δ)** : mesure la sensibilité au prix du sous-jacent. Une couverture delta permet de neutraliser les mouvements linéaires.
- **Gamma (Γ)** : mesure la variation du Delta par rapport au prix du sous-jacent. Un Gamma élevé signifie que le Delta peut évoluer rapidement pour de petits mouvements du sous-jacent. En prenant en compte le Gamma dans la couverture, on limite les pertes dues aux mouvements brusques. .

La couverture repose donc sur la neutralisation combinée du Delta et du Gamma. L'extension à d'autres sensibilités, comme le Vega dans un modèle sans volatilité constante, constitue une perspective naturelle.

4.3 Option asiatique géométrique discrète

On considère une option asiatique géométrique discrète portant sur la moyenne géométrique des prix du sous-jacent observés en des dates de fixing $\{t_1, \dots, t_n\}$ [1, 4]. On note

$$G = \left(\prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{1/n},$$

et l'on s'intéresse à un call de payoff $C_T = \max(G - K, 0)$ à l'échéance T (avec, par convention, $t_n = T$). Le sous-jacent évolue selon un mouvement brownien géométrique avec $r = q = 0$ et volatilité constante :

$$S_t = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right).$$

En prenant les logarithmes, la moyenne logarithmique s'écrit

$$\ln G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln S_{t_i} = \ln S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 \bar{t} + \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n W_{t_i},$$

où $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$. La quantité $\ln G$ est une combinaison linéaire de variables gaussiennes et est donc normalement distribuée [4]. On a alors

$$\ln G \sim \mathcal{N}(\mu_G, \nu_G^2),$$

avec, sous $r = q = 0$ et σ constant,

$$\mu_G = \ln S_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 \bar{t}, \quad \nu_G^2 = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(t_i, t_j).$$

La variable G est donc log-normale avec ces paramètres, ce qui autorise l'application de la formule de type Black pour évaluer l'espérance du payoff $\mathbb{E}[(G - K)^+]$ [4].

Lorsque certaines dates de fixing sont déjà connues, l'analyse précédente reste valide en adaptant le strike effectif et la pondération de la moyenne [1, 5]. Dans ce cas, l'option peut être décomposée en deux périodes : une première, passée, de durée t_1 , pendant laquelle la moyenne partielle \bar{S}_{t_1} est connue, et une seconde, à venir, de durée t_2 , correspondant au temps restant jusqu'à l'échéance ($t_1 + t_2 = T$). Le payoff peut alors être réécrit comme :

$$\max\left(\frac{t_1 \bar{S}_{t_1} + t_2 S_{\text{moy},t_2}}{t_1 + t_2} - K, 0\right),$$

où S_{moy,t_2} désigne la moyenne du sous-jacent sur la période restante. Cette expression est équivalente à :

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2} \max(S_{\text{moy},t_2} - K^*, 0),$$

avec un strike ajusté défini par :

$$K^* = \frac{t_1 + t_2}{t_2} K - \frac{t_1}{t_2} \bar{S}_{t_1}.$$

Lorsque $K^* > 0$, l'option peut être évaluée comme une option asiatique nouvellement émise sur la période restante, avec prix d'exercice K^* et une pondération multiplicative $\frac{t_2}{t_1+t_2}$. Si K^* est négatif, l'option est certaine d'être exercée et sa valeur correspond alors à la valeur actualisée du gain déterministe sur la période restante [3].

4.4 Instruments de couverture

4.4.1 Présentation des instruments

Futures. Nous utilisons des contrats futures pour couvrir le Delta. De manière générale, l'exposition d'un futur au sous-jacent n'est pas exactement unitaire et dépend du drift. Dans notre étude, nous faisons l'hypothèse de drift nul, ce qui rend l'exposition linéaire et le Delta par contrat égal à 1.

Options. Nous utilisons des options pour ajuster le profil de convexité du produit vendu. En sélectionnant un ensemble d'options dont le Gamma total correspond à celui du produit, on vise à reproduire la convexité du produit de manière précise.

Compte de cash. Le cash, représenté par un stablecoin de type USDT, constitue le support de liquidité. Il permet de financer les marges requises par les futures et de payer les primes d'options de hedge. A la vente d'un produit, il est crédité de son prix. Idéalement, le prix du produit doit être suffisant pour financer le hedge, néanmoins il peut arriver que l'on doive fournir de l'argent en plus, par exemple en cas de maintenance margins trop fréquentes.

Deribit. Deribit est l'une des principales plateformes d'échange de produits dérivés sur cryptomonnaies, notamment sur Bitcoin et Ethereum. Réputée pour sa liquidité sur les options et futures, elle joue un rôle central dans la structuration du marché dérivé crypto, en fournissant des prix de référence, des courbes de volatilité et un cadre de gestion des marges comparable à celui des marchés traditionnels.

Nous introduisons un compte Deribit qui est utilisé pour la gestion des futures, et plus particulièrement des marges. Il représente de l'argent immobilisé. Des transferts du compte de cash vers Deribit surviennent dès qu'il faut mobiliser de l'argent supplémentaire pour conserver des positions sur futures. Les transferts de Deribit vers le compte de cash surviennent uniquement à maturité, quand les futures expirent et que les marges sont rapatriées.

4.4.2 Modélisation des instruments

Options de couverture Les options de couverture sont des options vanilles européennes. Dans le cadre de ce stage, nous avons pris des options de même maturité que le produit de vente. Nous considérons donc comme options de couverture deux calls vanilles européens, de strike autour de celui du produit de vente. Un panier d'options plus conséquent peut être envisagé, mais nous nous sommes concentré sur ces deux options de couverture dans un premier temps.

Gestion des futures. Un future est représenté par son prix d'achat et sa maturité. Ici, nous prendrons des maturités fixes pour les futures, égale à la maturité du produit de vente. Nous avons retenu une approche où un contrat future est ouvert pour chaque niveau de sous-jacent. Par exemple, si nous sommes à un instant t , avec sous-jacent égal à S_t et que nous devons réaliser un delta hedge, nous ouvrirons une position future au prix d'achat $S_t e^{r(T-t)}$. Cette approche suppose que des contrats futures sont disponibles en continu pour tout niveau du sous-jacent.

Gestion des marges. Chaque transaction sur future requiert le blocage d'une marge initiale :

$$IM_t = \alpha \cdot |q_t| \cdot S_t, \quad \alpha = 4\%[6].$$

où q_t représente la quantité correspondante à la transaction, et S_t le niveau du sous-jacent au moment de la transaction.

La marge initiale est débitée du cash, et bloquée sur le compte Deribit.

Une marge de maintenance est également définie :

$$MM_t = \beta \cdot IM_t, \quad \beta = 80\%[6].$$

On suit l'equity du compte de marge, défini comme la somme du collatéral et du P&L non réalisé. Si l'equity devient inférieur à MM_t , un appel de marge est déclenché et un transfert de cash vers Deribit est effectué pour restaurer l'IM.

4.4.3 Frais de transaction

Les frais de transaction sont modélisés comme un pourcentage du nominal :

$$\text{Frais}_{\text{futures}} = 3.5 \text{ bps}, \quad \text{Frais}_{\text{options}} = 2.5 \text{ bps}[6].$$

Il peut-être à première vue surprenant que les options présentent des frais inférieurs aux futures. Cela provient d'une politique de Deribit de développer le marché optionnel des cryptomonnaies. Ainsi, une transaction de nominal N et de quantité δq induit un coût :

$$\text{Frais} = N \times \text{fee} \times \delta q.$$

Les frais de transaction ne sont pas débités du cash, ils sont gérés à part et constituent à eux seuls une métrique d'efficacité d'une couverture. De cette manière, on peut séparer l'erreur de couverture (différence de prix entre produit et instruments de couverture) des frais payés.

4.5 Couverture Delta et Gamma

4.5.1 Modélisation du portefeuille

Soit V_t la valeur de l'option vendue et Π_t celle du portefeuille de couverture. Le portefeuille de couverture regroupe l'ensemble des instruments présentés précédemment. Au moment de la vente de l'option, une première couverture est mise en place ; celle-ci doit ensuite être réajustée à des instants futurs, car les sensibilités du produit évoluent avec le temps et le niveau du sous-jacent.

Dans le cas d'un call asiatique géométrique discret, la valeur V_t dépend non seulement du niveau instantané S_t , mais également de la moyenne géométrique déjà réalisée. La variation du portefeuille total s'écrit alors :

$$dP_t = d(\Pi_t - V_t) = \Delta_t^{\text{tot}} dS_t + \frac{1}{2} \Gamma_t^{\text{tot}} d\langle S \rangle_t + \Theta_t^{\text{tot}} dt - \Upsilon_t^{\text{tot}} dG_t,$$

où Δ_t^{tot} et Γ_t^{tot} désignent respectivement le delta et le gamma du portefeuille global, Θ_t^{tot} son theta, et Υ_t^{tot} la sensibilité à la moyenne géométrique discrète G_t .

La couverture cherche à imposer $\Delta_t^{\text{tot}} = 0$ et $\Gamma_t^{\text{tot}} = 0$ afin de neutraliser les risques directionnels et convexes. Le terme Υ_t^{tot} ne peut pas être couvert parfaitement avec les instruments de couverture considérée.

4.5.2 Neutralisation du Gamma

Pour neutraliser le Gamma, on sélectionne un panier de k options de hedge (dans notre cas $k = 2$). On cherche des positions $w_{i,t}$ telles que le Gamma total du portefeuille soit nul, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^k w_{i,t} \Gamma_{i,t} = \Gamma_{\text{liability},t},$$

où $\Gamma_{i,t}$ et $\Gamma_{\text{liability},t}$ désignent respectivement le Gamma de l'option de couverture i et le Gamma du produit de vente au temps t .

4.5.3 Neutralisation du Delta

Une fois le Gamma neutralisé par les options, le portefeuille induit un delta additionnel. Ce delta est compensé par une position inverse en contrats futures :

$$\Delta_{\text{futures},t} = \Delta_{\text{liability},t} - \Delta_{\text{options},t}.$$

Ainsi, le portefeuille total est maintenu delta-neutre.

4.6 Réplique des sensibilités d'un produit

4.6.1 Première approche

Nous venons de voir que pour contrôler les variations d'un produit P , nous avons besoin de repliquer ses sensibilités. La question à laquelle nous cherchons à répondre ici est comment obtenir les positions à allouer à nos instruments de couverture afin de repliquer les sensibilités du produit de vente.

Prenons le cas général où nous disposons donc d'un produit P à couvrir à partir de ses sensibilités (ρ_1, \dots, ρ_n) , et supposons que nous avons m instruments de hedge à disposition, que nous notons (H_1, \dots, H_m) . Alors, l'écriture matricielle proposée ci-dessous offre une première approche d'obtention des quantités $w_i, i \in [1, n]$ à détenir.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial \rho_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial \rho_n} \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_1} & \cdots & \frac{\partial H_m}{\partial \rho_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_1}{\partial \rho_n} & \cdots & \frac{\partial H_m}{\partial \rho_n} \end{pmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}}_X$$

À partir de $A = BX$, on obtient par multiplication à gauche par B^\top :

$$B^\top A = B^\top BX$$

Si la matrice $B^\top B$ est inversible, alors :

$$X = (B^\top B)^{-1} B^\top A$$

Sinon, on peut chercher une solution approchée en minimisant :

$$\min_X \|A - BX\|_F^2$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius.

Ces méthodes permettent de repliquer les sensibilités d'un produit de manière efficace. Néanmoins, elles peuvent être très instables, et engendrer de grands rebalancements de quantité entre deux instants. Dans un modèle qui impose des frais à chaque transaction, nous souhaitons contrôler au maximum ces rebalancements.

4.6.2 Optimisation du hedge Gamma

Lorsque t est un instant de rebalancement du Gamma, on cherche la combinaison d'options de hedge minimisant le coût d'ajustement par rapport au portefeuille précédent. On résout alors :

$$\min_{w_{i,t}} \sum_{i=1}^k ((w_{i,t} - w_{i,t-1}) \text{Prix}_{i,t})^2$$

sous la contrainte :

$$\sum_{i=1}^k w_{i,t} \Gamma_{i,t} = \Gamma_{\text{liability},t},$$

où $\text{Prix}_{i,t}$ désigne le prix d'un contrat d'option i au temps t .

Ce problème peut être résolu analytiquement à l'aide de la méthode du Lagrangien, dont les détails de calcul sont présentés en Annexe A ou numériquement à l'aide de bibliothèques Python standard telles que NumPy. La solution fournit les poids $w_{i,t}$ minimisant l'impact monétaire du rebalancement tout en assurant la neutralité du Gamma.

5 Implémentation

5.1 Architecture générale du code

L'ensemble du code a été structuré selon une logique modulaire, inspirée des standards utilisés dans les travaux académiques en ingénierie financière. Chaque composant répond à une responsabilité unique, permettant une meilleure maintenabilité, une extension facilitée et une reproductibilité des résultats (Figures 2).

Classe Simulation. La première composante de l'architecture concerne la génération des trajectoires du sous-jacent S_t . Celles-ci sont simulées au moyen d'un mouvement brownien géométrique, discrétisé sur une grille temporelle intra-journalière avec un pas d'une heure. Ce choix constitue un compromis entre réalisme et coût de calcul : il est suffisamment fin pour capturer les variations intraday du sous-jacent, permettre le recalcul régulier des sensibilités, déclencher les rebalancements de portefeuille et comptabiliser les frais de transaction au moment où ils se produisent. Un pas de simulation trop large réduit la fidélité des trajectoires et sous-estime la variation quadratique du sous-jacent, qui est directement responsable du P&L résiduel via le gamma.

Classe Market. Ce module constitue le cœur de l'infrastructure de marché en centralisant l'état courant, défini par le quadruplet (S_t, t, σ, r) . Il assure la mise à jour continue des informations de marché pertinentes tout en conservant un historique minimal, garantissant ainsi un équilibre entre précision et efficacité mémoire. Cette architecture permet au portefeuille de couverture de disposer à tout instant d'une vision cohérente et fiable du marché.

Classe Products. Les instruments financiers sont modélisés sous forme de classes dédiées : **Call**, **Future** et **Asian**. Chaque classe fournit une interface cohérente en mettant à disposition les mêmes méthodes (`price`, `delta`, `gamma`, `theta`), ce qui permet au portefeuille de couverture de manipuler tous les produits de manière uniforme, indépendamment de leur type. Les sensibilités sont calculées par différences finies, tandis que les prix sont obtenus via le modèle de Black-Scholes.

Classe HedgePortfolio. Le portefeuille regroupe l'ensemble des instruments utilisés pour répliquer le payoff de l'option : positions détenues, cash en banque, compte de marge, marges initiales et de maintenance (dans le cas des futures). La valeur totale du portefeuille, ou **equity**, sert de base au calcul de l'erreur de couverture et des appels de marge éventuels.

Classe Strategies. La logique de rebalancement est encapsulée dans ce module. Chaque stratégie implémente une fonction `rebalance` qui, en fonction de l'état courant du marché et du temps, détermine si un ajustement des positions doit être effectué. Plusieurs approches ont été codées : un rebalancement naïf (rééquilibrage à intervalles fixes) et une variante plus sophistiquée inspirée de règles de seuils de delta. Les résultats présentés concernent un rebalancement naïf.

Classe HedgeEfficiency. Ce module constitue le cœur de la simulation. Il orchestre l'ensemble des trajectoires simulées, exécute la stratégie de couverture sur chaque scénario et calcule les principales métriques d'évaluation : l'erreur de couverture cumulée (ErrCum) et les frais totaux engagés. C'est également ici que sont collectées les statistiques finales pour chaque simulation.

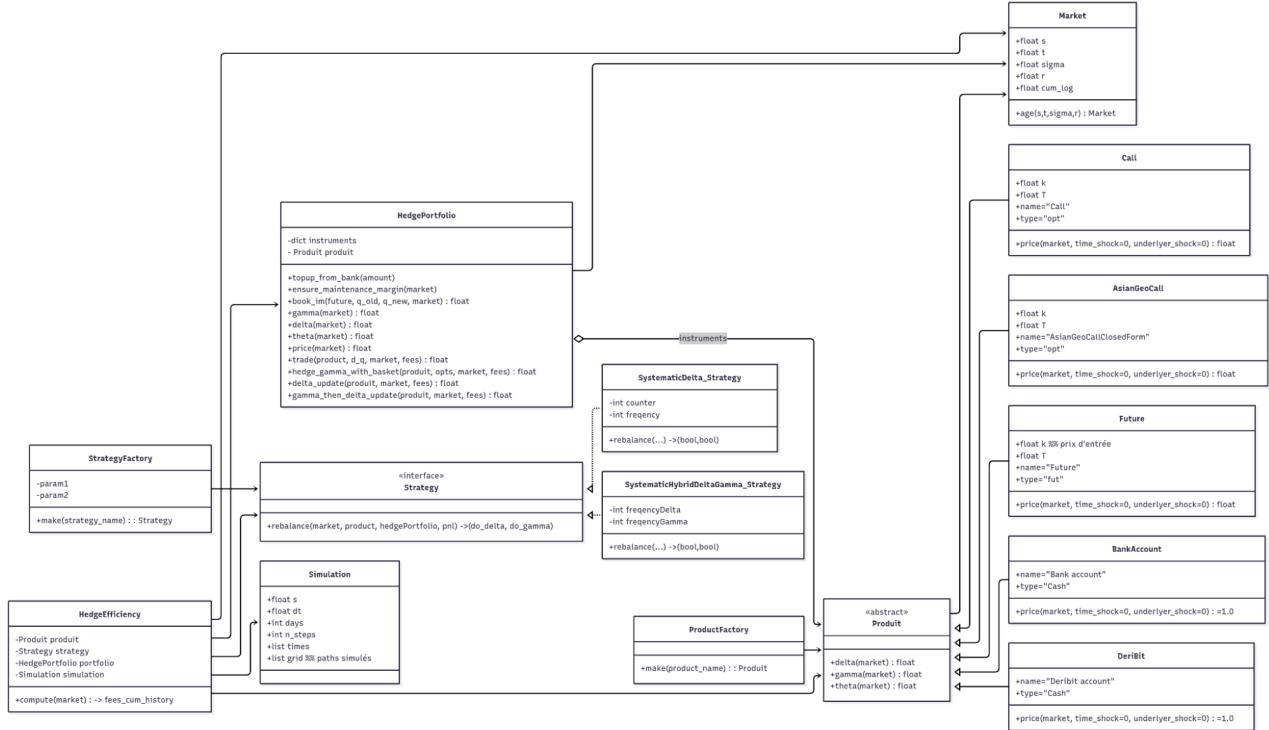


Figure 2: Schéma simplifié des interactions entre les principales classes.

5.2 Pipeline d'exécution et stockage des résultats

L'exécution des simulations est orchestrée à partir d'un module principal (`main`) conçu pour être générique et simple d'utilisation. Il permet de spécifier en argument les différents paramètres de simulation, le choix du produit et de la stratégie, et repose sur des factories pour instancier les objets correspondants. Les trajectoires sont simulées sur plusieurs seeds indépendantes - typiquement 500 - afin de pouvoir analyser des distributions et extraire des statistiques robustes. Pour accélérer le calcul, les simulations sont parallélisées à l'aide du module `multiprocessing` de Python via l'objet `Pool`, chaque processus exécutant un ensemble de seeds indépendantes et conservant son propre fichier de log horodaté et indexé par PID, garantissant traçabilité et reproductibilité. Les développements reposent sur plusieurs invariants garantissant la cohérence et la traçabilité des simulations : conservation du P&L total à chaque itération, ordre strict entre mise à jour du marché, valorisation et couverture, et contrôle systématique des marges après chaque opération.

Les résultats sont stockés selon deux formats complémentaires. Les données scalaires finales, telles que le numéro de seed, le produit étudié, la stratégie appliquée, les paramètres associés,

l’erreur de couverture cumulée et les frais totaux, sont enregistrées dans des fichiers CSV, directement exploitables pour produire des tableaux synthétiques et des graphiques de comparaison. Les trajectoires complètes de P&L et de frais sont conservées au format JSON, chaque ligne correspondant à une simulation indépendante. Ce format permet de reconstruire finement l’évolution des positions et des coûts, de recalculer l’erreur cumulée pour différentes fréquences de rebalancement, et d’extraire des statistiques détaillées sur le comportement du portefeuille.

6 Évaluation de la performance des stratégies de couverture

6.1 Métriques de performance

La performance des stratégies est évaluée selon deux axes principaux : la précision de réPLICATION et le coût de couverture.

L'erreur de réPLICATION cumulée à maturité, notée ErrCum, est définie par :

$$\text{ErrCum} = \Pi_T^{\text{hedge}} - V_T^{\text{produit}},$$

où Π_T^{hedge} est la valeur finale du portefeuille de couverture et V_T^{produit} la valeur du produit au temps T . Les coûts de transaction cumulés sont notés FeesCum.

Afin de disposer d'une métrique synthétique pour comparer les stratégies à maturité, nous définissons le Score final :

$$\text{Score} = |\text{ErrCum}| + \text{FeesCum}.$$

6.2 Limites de l'évaluation statique et nécessité d'un critère de risque temporel

Le Score à maturité permet de comparer les stratégies en termes de coût et de précision. Toutefois, il ne tient pas compte de l'évolution temporelle des pertes. Dans le cas d'usage du client, l'acheteur peut se retirer de la position à tout moment, potentiellement dans une phase défavorable pour le vendeur. Il est donc nécessaire de mesurer les pertes maximales subies au cours du temps et non uniquement à maturité.

6.3 Drawdown du Score et définition de la CDaR

Pour cela, nous considérons une version dynamique du Score :

$$\text{Score}(t) = |\Pi_t^{\text{hedge}} - V_t^{\text{produit}}| + \text{FeesCum}(t),$$

ce qui permet de suivre l'évolution cumulative de la réPLICATION et des coûts jusqu'au temps t . Sur cette trajectoire $\text{Score}(t)$, nous définissons le drawdown comme la perte relative à un maximum historique du Score :

$$DD(t) = \max_{s \leq t} \text{Score}(s) - \text{Score}(t).$$

Nous introduisons alors la Conditional Drawdown at Risk (CDaR), qui mesure la perte moyenne conditionnelle aux pires drawdowns d'une trajectoire, selon un quantile α :

$$\text{CDaR}_\alpha = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{i \in I_\alpha} DD_i,$$

où I_α désigne les N_α drawdowns les plus sévères de la trajectoire. Le calcul est effectué simulation par simulation, puis les CDaR sont comparées entre stratégies. La CDaR complète donc le Score final en quantifiant l'exposition au risque de pertes extrêmes dans le temps.

6.4 Résultats : Delta Hedging d'un call vanille

Le call vanille constitue un cas de référence pour évaluer l'impact de la fréquence de rebalancement sur la précision et le coût de couverture. Ici, on utilise uniquement les futures. Pour chaque fréquence, 500 trajectoires indépendantes ont été simulées afin d'obtenir des distributions fiables de ErrCum, FeesCum, du Score final et de la CDaR. Les résultats présentés concernent un call vanille européen de maturité 3 mois, de strike 107, avec un sous-jacent initial à 110 et une volatilité de 0,6.

Les résultats mettent en évidence un compromis classique entre précision de la réPLICATION et coût de transaction. Un paramètre de rebalancement faible correspond à une couverture plus fréquente, donc plus réactive, tandis qu'un paramètre élevé signifie que l'on ajuste moins souvent le portefeuille. Les Figures montrent que des rebalancements fréquents améliorent nettement la précision de réPLICATION (faible erreur P&L) mais génèrent des frais importants. À l'inverse, espacer les ajustements réduit les coûts mais laisse l'erreur se diffuser plus largement.

La Figure 3 montre ainsi que l'écart-type de l'erreur cumulée diminue lorsque le paramètre de rebalancement décroît (couverture plus fréquente). Toutefois, au-delà d'un certain seuil de fréquence, le gain supplémentaire devient marginal : couvrir encore plus souvent n'améliore presque plus la qualité de réPLICATION.

La Figure 4 met en évidence l'effet inverse sur les coûts : ceux-ci augmentent de manière quasi linéaire lorsque le paramètre de rebalancement diminue, en raison de la multiplication des opérations de hedge.

Enfin, la Figure 5 combine ces deux dimensions et suggère que la meilleure stratégie ne se situe ni dans une couverture trop rare ni dans une couverture extrêmement fréquente, mais à un niveau intermédiaire où le rapport précision/coût est optimal.

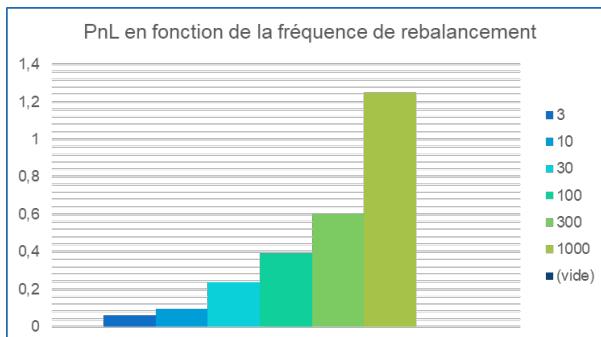


Figure 3: Écart type de l'erreur P&L en fonction du paramètre de rebalancement du call vanille.

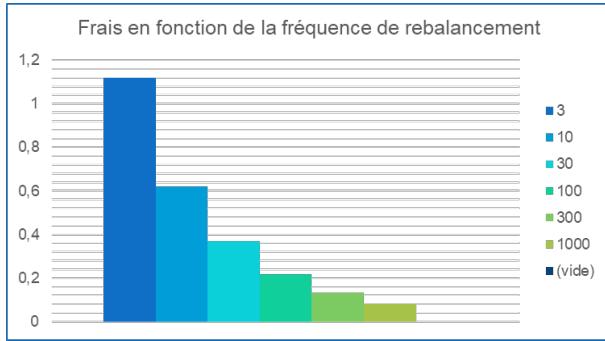


Figure 4: Frais moyens en fonction du paramètre de rebalancement du call vanille.

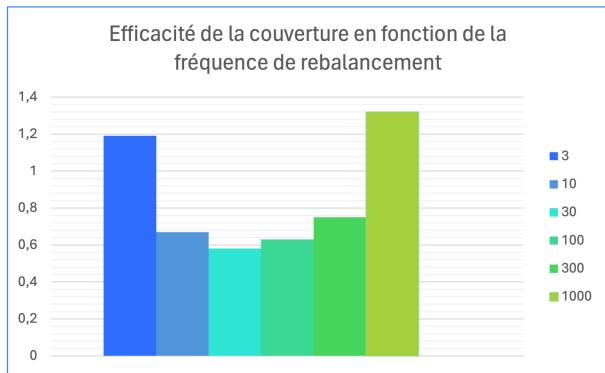


Figure 5: Ecart type P&L + Frais moyens en fonction du paramètre de rebalancement.

6.5 Résultats : Hedging d'un call asiatique

Pour le call asiatique géométrique, nous comparons les stratégies Delta Hedging et Delta-Gamma Hedging sur une grille de fréquences de rebalancement (p_1, p_2), où p_1 correspond au rebalancement du Delta et p_2 au rebalancement du Gamma. Par exemple $p_1 = 1$ signifie qu'on rebalance le Delta toutes les heures. Les 500 simulations par configuration permettent d'évaluer l'effet combiné des deux paramètres sur le Score final et la CDaR. Les résultats présentés concernent un call asiatique géométrique de maturité 3 mois, de strike 107, avec un sous-jacent initial à 110 et une volatilité de 0,6.

La couverture du Gamma permet de réduire significativement la variance de l'erreur de réplication par rapport à une stratégie purement Delta, mais elle s'accompagne de coûts de transaction plus élevés. Les figures 6 et 7 montrent très clairement que les stratégies Delta et Delta-Gamma se distinguent fortement au niveau des frais : la stratégie Gamma entraîne des frais importants mais une variance d'erreur faible, tandis que la stratégie Delta implique une variance d'erreur élevée mais des frais plus bas. En faisant varier la fréquence de rebalancement du Gamma, on constate qu'espacer les ajustements (par exemple de 20 h à 100 h) n'augmente pas drastiquement la variance de l'erreur P&L, tout en diminuant nettement les frais. Cela suggère l'existence d'un compromis optimal entre stabilité du P&L et coûts de couverture, ce qui motive

la construction d'une surface de Score afin d'identifier les paramètres de rebalancement les plus efficaces et d'optimiser le trade-off entre frais et précision de la couverture.

Pour une option asiatique, contrairement au call vanille, on observe que l'erreur P&L n'est pas centrée en zéro même avec une couverture Delta-Gamma. Cela s'explique par la dépendance du payoff à la moyenne des prix du sous-jacent, un terme non couvert par les options vanilles utilisées pour le hedging. La sensibilité à la moyenne étant positive pour un call asiatique, le hedging standard sous-réplique cet effet, générant un biais moyen d'environ 1%. Ce biais est relativement faible, mais il illustre la limite d'une couverture basée uniquement sur des instruments vanilles pour ce type de produit.

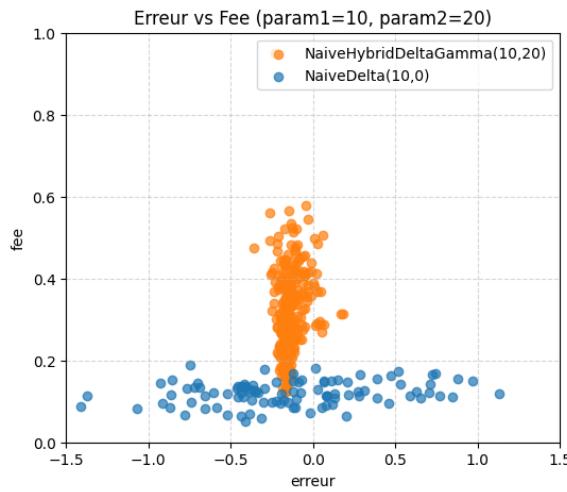


Figure 6: Erreur vs frais avec Gamma fréquent.

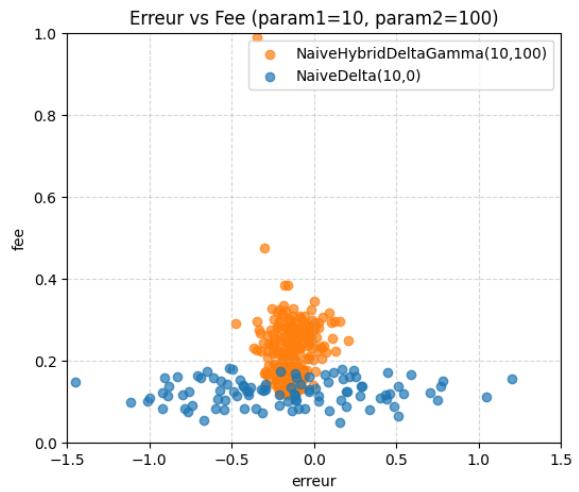


Figure 7: Erreur vs frais avec Gamma moins fréquent.

En comparant les deux approches, on observe que pour une fréquence de rebalancement du Gamma fixée, le quantile 90% du Score final est systématiquement plus élevé lorsque seule la couverture Delta est utilisée. Cela montre que l'ajout d'une couverture Gamma permet de réduire les pertes extrêmes et d'améliorer la robustesse de la stratégie, rendant le Delta-Gamma Hedging plus intéressant du point de vue du risque (Figure 8).

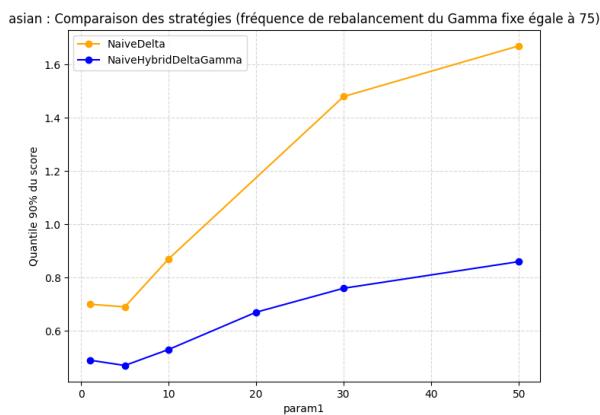
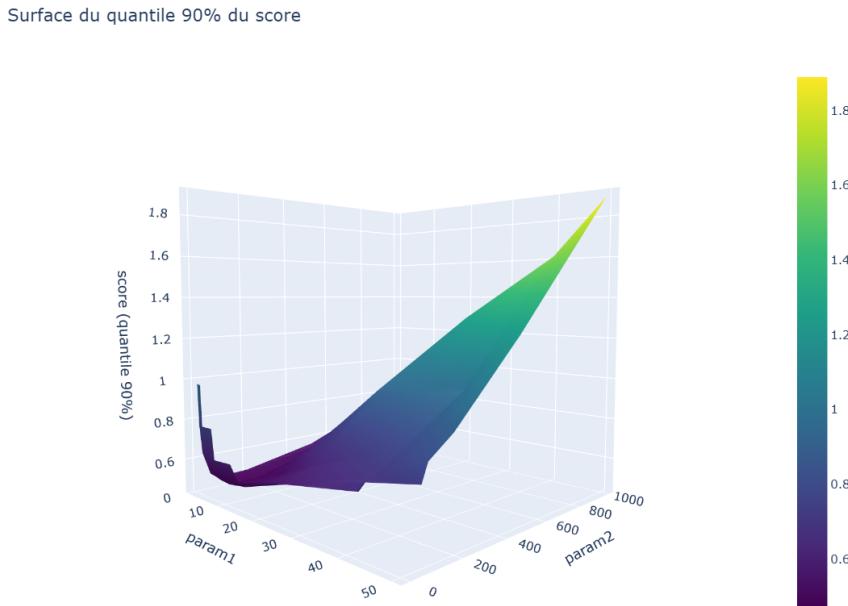


Figure 8: Comparaison Delta Hedging seul vs Delta-Gamma Hedging.

L'exploration systématique des couples (p_1, p_2) permet de construire une surface de quantile 90% du Score final, représentée en Figure 9. Cette visualisation met en évidence les zones de compromis optimales entre précision et coût, et montre que la combinaison d'un Delta modéré et d'un Gamma réactif offre généralement la meilleure performance globale. On observe sur cette surface un minimum de quantile de Score de 0.47; soit 5.2% du prix initial du produit, pour un rebalancement du Delta toutes les 5 heures et un rebalancement du Gamma tous les 3 jours environ. A noter que ces résultats sont évidemment dépendants des données de marché du produit, et que ce travail pourrait être réalisé pour chaque couple (strike, maturité) d'option asiatique.



Vidéo interactive

Figure 9: Surface du Score final (quantile 90%) en fonction des fréquences de rebalancement (p_1, p_2) .

Pour compléter l'analyse, nous présentons la surface moyenne de CDaR (Figure 10). Cette visualisation permet de comparer l'exposition aux pertes extrêmes selon la fréquence de rebalancement. On observe que certaines configurations intermédiaires de Delta et Gamma permettent de réduire significativement la CDaR, confirmant qu'un arbitrage optimal existe non seulement pour le Score final mais aussi pour la gestion du risque extrême. La région du minimum est sensiblement la même que pour le quantile de score, de même que sa valeur.

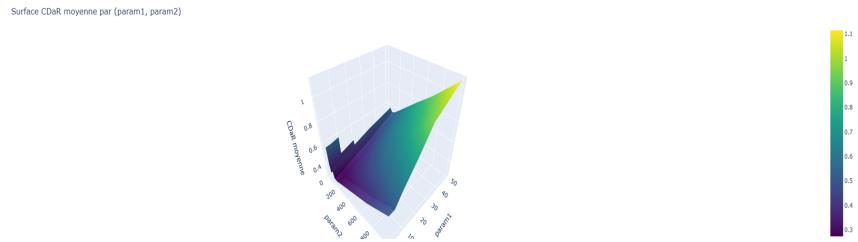


Figure 10: Surface de moyenne de CDaR pour les fréquences de rebalancement (p_1, p_2).

Cette double lecture, Score final pour les performances extrêmes à maturité et CDaR pour la modélisation des cas extrêmes au sein d'une trajectoire, permet de dégager des recommandations précises pour le choix des fréquences de rebalancement adaptées au contexte opérationnel du client.

7 Conclusions

7.1 État actuel de l'outil

Ce travail a permis de développer une infrastructure complète pour la couverture dynamique d'un produit dérivé donné. L'algorithme implémente plusieurs stratégies de rebalancement et fournit, pour chaque configuration de marché et de produit, les paramètres optimaux permettant de limiter le score. Les résultats numériques obtenus montrent que le quantile à 90% du score de performance atteint 0,47, soit environ 5,2% du prix initial du produit, tandis que la moyenne du score est de 0,37, soit 4,1% du prix initial. Ces valeurs sont particulièrement importantes car elles constituent une référence pour le client afin de fixer le prix du produit, en tenant compte du coût de la couverture nécessaire pour se protéger contre le risque. À titre d'exemple, l'outil permet d'implémenter des stratégies où le Gamma influence directement la fréquence de recalibrage du Delta : lorsque le Gamma est élevé, le Delta varie rapidement et nécessite des réajustements plus fréquents. Cette approche illustre la flexibilité et la modularité de l'infrastructure.

7.2 Perspectives d'amélioration

La modélisation actuelle repose sur certaines hypothèses simplificatrices, notamment un mouvement brownien géométrique à volatilité constante et drift nul. Ces hypothèses permettent de tester et valider la méthodologie de couverture dans un cadre maîtrisé, mais elles limitent la capacité de l'outil à reproduire certains aspects du marché réel. Par exemple, l'introduction d'un modèle de volatilité stochastique, de type Heston ou à terme structurel, offrirait une meilleure représentation des variations de volatilité et permettrait d'affiner le calcul des sensibilités pour des couvertures plus précises. De même, l'analyse des distributions simulées comparées aux données historiques du Bitcoin montre que le modèle log-normal sous-estime les queues de distribution et ne capture pas les sauts de prix observés sur le marché (Figures 11 et 12). Comprendre et quantifier l'impact de ces événements extrêmes sur le P&L résiduel constituerait un objectif pertinent pour des travaux futurs.

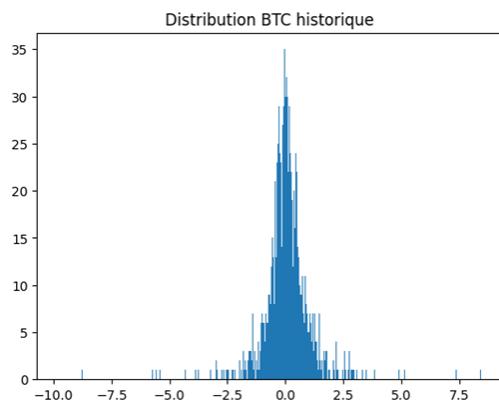


Figure 11: Distribution empirique BTC

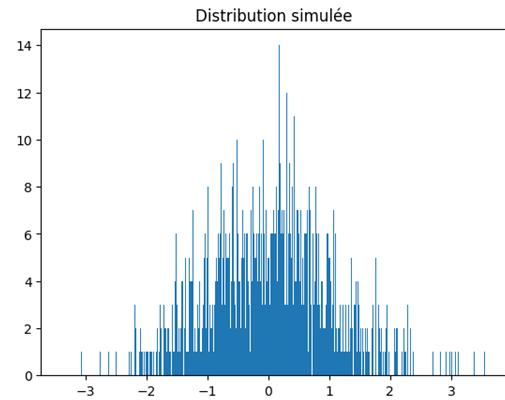


Figure 12: Distribution simulé BTC via Black-Scholes

References

- [1] Hull, J.C. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives* (10th ed.). Pearson.
- [2] Gatheral, J. (2006). *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. Wiley.
- [3] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.
- [4] Kemna, A.G.Z., & Vorst, A.C.F. (1990). *A pricing method for options based on average asset values*. Journal of Banking & Finance.
- [5] Turnbull, S.M., & Wakeman, L.M. (1991). *A quick algorithm for pricing European average options*. Journal of Financial and Quantitative Analysis.
- [6] Deribit. *Official Website*. <https://www.deribit.com>

A Résolution du problème de Gamma hedging par Lagrangien

Considérons le problème de minimisation du coût de transaction pour la neutralisation du Gamma à l'instant t :

$$\min_{w_{i,t}} \sum_{i=1}^k (w_{i,t} - w_{i,t-1})^2 P_{i,t}^2 \quad \text{sous la contrainte} \quad \sum_{i=1}^k w_{i,t} \Gamma_{i,t} - \Gamma_{\text{liability},t} = 0.$$

On introduit un multiplicateur de Lagrange λ et on construit le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(w_{1,t}, \dots, w_{k,t}, \lambda) = \sum_{i=1}^k (w_{i,t} - w_{i,t-1})^2 P_{i,t}^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^k w_{i,t} \Gamma_{i,t} - \Gamma_{\text{liability},t} \right).$$

La condition de premier ordre pour chaque i donne :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{i,t}} = 2(w_{i,t} - w_{i,t-1}) P_{i,t}^2 + \lambda \Gamma_{i,t} = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{i,t} = w_{i,t-1} - \frac{\lambda \Gamma_{i,t}}{2 P_{i,t}^2}.$$

En injectant cette expression dans la contrainte, on obtient λ :

$$\sum_{i=1}^k \left(w_{i,t-1} - \frac{\lambda \Gamma_{i,t}}{2 P_{i,t}^2} \right) \Gamma_{i,t} - \Gamma_{\text{liability},t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\sum_{i=1}^k w_{i,t-1} \Gamma_{i,t} - \Gamma_{\text{liability},t}}{\sum_{i=1}^k \frac{\Gamma_{i,t}^2}{2 P_{i,t}^2}}.$$

Enfin, les poids optimaux sont :

$$w_{i,t} = w_{i,t-1} - \frac{\Gamma_{i,t}}{2 P_{i,t}^2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^k w_{j,t-1} \Gamma_{j,t} - \Gamma_{\text{liability},t}}{\sum_{j=1}^k \frac{\Gamma_{j,t}^2}{2 P_{j,t}^2}}.$$