



Apuntes de Redes Neuronales Artificiales Handouts for Artificial Neural Networks

Dr. Juan Carlos Cuevas Tello

Agosto 2017

Última revisión: 4/Dic/2017

Índice

1.	Introducción	3
2.	El modelo de McCulloch & Pitts	4
3.	Aprendizaje: Regla Delta	ç
4.	Problemas no-lineales	12
5.	Redes Neuronales: Backpropagation	16
6	Comentarios finales	10

Resumen

These handouts are designed for people who is just starting involved with the topic artificial neural networks. We show how it works a single artificial neuron (McCulloch & Pitt model), mathematically and graphically. We do explain the delta rule, a learning algorithm to find the neuron weights. We also present some examples in MATLAB®/Octave. There are examples for classification task for lineal and non-lineal problems. At the end, we present an artificial neural network, a feed-forward neural network along its learning algorithm backpropagation.

Estos apuntes están diseñados para personas que por primera vez se introducen en el tema de las redes neuronales artificiales. Se muestra el funcionamiento básico de una neurona, matemáticamente y gráficamente. Se explica la Regla Delta, algoritmo de aprendizaje para encontrar los pesos de una neurona. También se muestran ejemplos en MATLAB®/Octave. Hay ejemplos para problemas de clasificación, para problemas lineales y no-lineales. En la parte final se muestra la arquitectura de red neuronal artificial conocida como backpropagation.

1. Introducción

Antes de hablar de redes neuronales artificiales es importante conocer como se constituye una célula, la neurona (Ver Figura 1).

Las Dendritas es la entrada de la información a la neurona, el Núcleo la procesa y la transmite a través del Axón. Las ramificaciones terminales del Axón se conectan a otras neuronas a través de un proceso conocido como *sinápsis*. En la sinápsis entran en juego los neurotransmisores como la dopamina, serotonina entre muchos otros.

Se dice que hay alrededor de 10^{11} neuronas en el cerebro humano y cada neurona puede recibir información de 5,000 a 15,000 entradas de axones de otras neuronas [1].

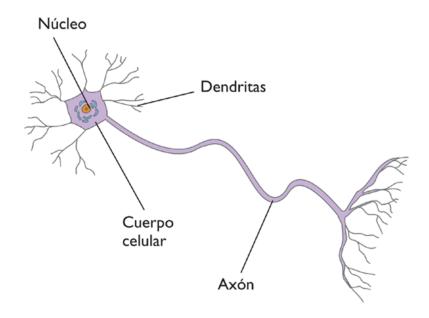


Figura 1. Una célula, una neurona. Fuente: http://nauronas.blogspot.mx/

2. El modelo de McCulloch & Pitts

La primera neurona artificial fue propuesta por Warren McCulloch y Walter Pitts en 1943 [1], conocida como el modelo de McCulloch & Pitts (MCP). El modelo se muestra en la Figura 2, se conoce también como TLU (Threshold Logic Unit) o LTU (Linear Threshold Unit) [1, 7].

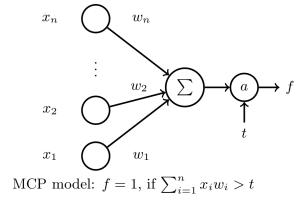


Figura 2. Modelo McCulloch & Pitts (MCP).

En la Figura 2, las entradas x_1, x_2, \ldots, x_n simulan las dendritas y la salida f la señal que viaja a través del axón.

Dependiendo de la función de activación a la neurona puede ser lineal o no-lineal. En la

Figura 2 se muestra la versión lineal. Es decir, se genera un f = 1 en la salida si $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i > t$, en caso contrario la neurona genera f = 0. Donde w_1, w_2, \ldots, w_n se conocen como pesos y t como el umbral (threshold).

2.1. Ejemplo: 2 entradas

Para mostrar el funcionamiento básico de una neurona artificial (MCP) en la Figura 3 se muestra el MCP para una compuerta lógica OR con dos entradas [1].

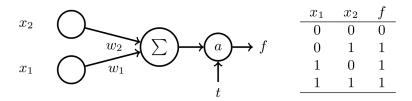


Figura 3. MCP y tabla de verdad (OR).

Sabemos que f = 1, si $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i > t$, así que si sustituimos los valores de x_i de la tabla de verdad (Figura 3) obtenemos las siguientes designaldades:

$$0(w_1) + 0(w_2) < t \quad 0 < t$$

$$0(w_1) + 1(w_2) > t \quad w_2 > t$$

$$1(w_1) + 0(w_2) > t \quad w_1 > t$$

$$1(w_1) + 1(w_2) > t \quad w_1 + w_2 > t$$

Se recomienda asignar valores a los pesos w_1, w_2 en el rango [-1, +1]. Posibles valores que cumplen con las designaldades son t = 0.5; $w_1 = 0.7$; $w_2 = 0.7$. Es decir, para el problema de la compuerta lógica OR de dos entradas x_1 y x_2 (Figura 3), la neurona que simula el comportamiento de f está dado por los pesos w_1 y w_2 y el umbral t.

2.1.1. Interpretación gráfica: clasificador lineal

Si reemplazamos los valores t = 0.5, $w_1 = 0.7$ y $w_2 = 0.7$ (OR) en el MCP $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i > t$, obtenemos:

$$0.7x_1 + 0.7x_2 = 0.5$$

$$x_2 = (0.5 - 0.7x_1)/0.7$$

 $x_2 = 0.5/0.7 - x_1$

Esto representa la ecuación de una recta. Si $x_1 = 0$, obtenemos el punto de corte de la recta en $x_2 = 0.71$. Ver recta de clasificación en la Figura 4.

En la Figura 5 se muestra el código de un script en MATLAB®/Octave para graficar la recta de la Figura 4.

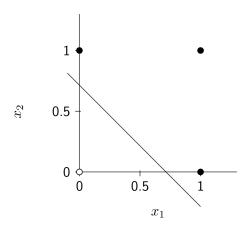


Figura 4. MCP: Clasificador lineal.

2.2. Ejemplo: 3 entradas

En la Figura 6 se muestra un ejemplo de una neurona (MCP) con tres entradas.

Las desigualdades de acuerdo al MCP son:

$$\begin{aligned} 0(w_1) + 0(w_2) + 0(w_3) &> t & 0 > t \\ 0(w_1) + 0(w_2) + 1(w_3) &> t & w_3 > t \\ 0(w_1) + 1(w_2) + 0(w_3) &< t & w_2 < t \\ 0(w_1) + 1(w_2) + 1(w_3) &< t & w_2 + w_3 < t \\ 1(w_1) + 0(w_2) + 0(w_3) &< t & w_1 < t \\ 1(w_1) + 0(w_2) + 1(w_3) &> t & w_1 + w_3 > t \\ 1(w_1) + 1(w_2) + 0(w_3) &< t & w_1 + w_2 < t \\ 1(w_1) + 1(w_2) + 1(w_3) &< t & w_1 + w_2 + w_3 < t \end{aligned}$$

```
% MATLAB/Octave script
% MCP OR
close all;
% Tabla de verdad de compuerta OR
x = [0 \ 0 \ 1 \ 1;
    0 1 0 1]; % Entradas, datos de entrenamiento
f = [0 1 1 1];  % Salida deseada (target)
tam = size(f,2); % # de muestras
figure;
hold on;
for i=1:tam,
    if(f(i) == 1),
       plot(x(1,i),x(2,i),'k*');
     else
       plot(x(1,i),x(2,i),'ko');
     end
end
x1 = -0.1:1.1,
x2=0.5/0.7 - x1; % ec. para obtener la recta
plot(x1,x2,'b');
xlabel('x 1');
ylabel('x_2');
title('MCP_OR')
grid on;
```

Figura 5. MATLAB®/Octave script: Ejemplo MCP, compuerta lógica OR de dos entradas.

Un conjunto posible de valores para los pesos es $\{w_1 = -0.6; w_2 = -1.5; w_3 = 0.6; t = -0.5\}$. El hiperplano para el MCP de tres entradas está dado por $x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = t$, ver la

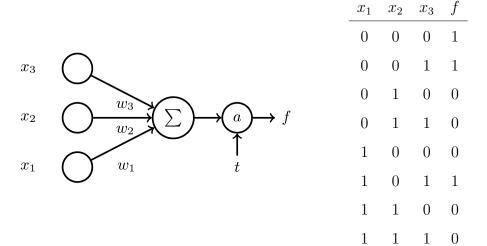


Figura 6. Ejemplo de tres entradas

Figura 7.

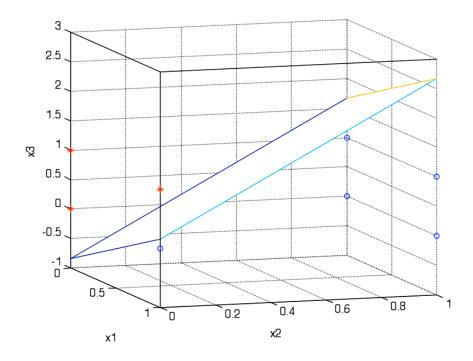


Figura 7. Hiperplano clasificador de un MCP de tres entradas, ver Figura 6.

El código para visualizar el hiperplano de la Figura 6 se muestra en la Figura 8.

```
% MATLAB/Octave script
clear;
hold on;
view(72,10);
[x,y] = meshgrid(0:1,0:1);
T=-0.5; w3=0.6; w2=-1.5; w1=-0.6;
z=(T-w1.*x-w2.*y)/w3;
mesh(x,y,z);
plot3(0,0,0,'r*');
plot3(0,0,1,'r*');
plot3(0,1,0,'bo');
plot3(0,1,1,'bo');
plot3(1,0,0,'bo');
plot3(1,0,1,'r*');
plot3(1,1,0,'bo');
plot3(1,1,1,'bo');
xlabel('x1');
ylabel('x2');
zlabel('x3');
plot3([1 1],[0 0],[-1 3],'k-');
plot3([0 1],[0 0],[3 3],'k-');
plot3([1 1],[0 1],[3 3],'k-');
grid on;
```

Figura 8. MATLAB®/Octave script: MCP ejemplo de tres entradas.

3. Aprendizaje: Regla Delta

En la sección anterior se describió el MCP. Los pesos de una neurona se encuentran a través de las desigualdades. Es un proceso manual que si extendemos los ejemplos a $4, 5, \ldots, n$

entradas, el número de desigualdades crece exponencialmente.

Por lo anterior no resulta práctico el MCP sin un algoritmo que permita encontrar los pesos de manera automática.

En 1962, Bernard Widrow y Ted Hoff propusieron la regla delta, un algoritmo iterativo (ver Algoritmo 1) para obtener los pesos de una neurona iterativamente (automáticamente), también conocida como regla de aprendizaje [10, 1].

Algoritmo 1: Regla Delta

- 1 Selecciona una entrada de la tabla de verdad;
- 2 Si se detecta un error, estimar que tan lejos está el MCP de la salida deseada ;
- 3 Ajustar los pesos 'activos' (i.e. cuando una entrada $x_i = 1$) para remover la porción d = (E + e)/2 del error;
- 4 Ir al paso 1, hasta que ninguna columna genere un error;

El factor de corrección d se define por el error E y una constante de aprendizaje e (similar al valor de temperatura en recocido simulado – simulated annealing) [6].

3.1. Ejemplo: neurona de 2 entradas

En la Figura 9 se muestra un ejemplo de neurona (MCP) de dos entradas [1], con este ejemplo se ejecutará el Algoritmo 1 (Regla Delta).

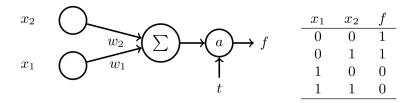


Figura 9. Ejemplo regla delta de 2 entradas para la Regla Delta.

Recordar que el MCP se define como $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i > t$, cuando una neurona se activa f = 1. Los pesos iniciales para el ejemplo de la regla delta son: $w_1 = 0.2$; $w_2 = -0.5$; t = 0.1. Los valores iniciales se definen de manera aleatoria (random), preferentemente en un rango de [-1, +1]. El valor de la constante de aprendizaje se establece a e = 0.1.

Cada iteración en la Tabla 1 corresponde a la ejecución de los tres pasos del Algoritmo 1.

■ Iteración 1

Iteración	Columna	Error	Corrección	Nuevo	Nuevo	Nuevo
	x_1, x_2	E	d = (E + e)/2	w_1	w_2	$\mid t \mid$
1	0,0	0.1	0.1	_	_	0
2	0,1	0.5	0.3	_	-0.2	-0.3
3	1,1	0.3	0.2	0	-0.4	-0.1
4	1,0	0.1	0.1	-0,1	_	0
5	0,1	0.4	0.25	_	-0.15	-0.25
6	1,0	0.15	0.125	-0,225	_	-0,125
7	0.1	0.025	0.0625	_	$\begin{bmatrix} -0.0875 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1875 \end{bmatrix}$

Tabla 1. Ejecución del Algoritmo 1: Regla Delta

- 1. Se selecciona la entrada 0,0 de la tabla de verdad en la Figura 9.
- 2. Los valores de x_1, x_2 se sustituyen en el MCP, $0(w_1) + 0(w_2) > t$, porque f = 1. Con los valores iniciales $w_1 = 0.2, w_2 = -0.5, t = 0.1$, la desigualdad resultante es 0 > 0.1. Por lo tanto el error es E = 0.1, porque no se satisface la desigualdad.
- 3. Los pesos 'activos', son solo t, dado que $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. Se aplica el factor de corrección d = (E + e)/2 = (0.1 + 0.1)/2 = 0.1 al valor de t. El razonamiento de la corrección es el siguiente: + > y < +, es decir a los pesos se les suma o se les resta la corrección dependiendo del tipo de desigualdad (> o <). En este caso, se le resta d a t, por lo tanto el nuevo valor de t = t d = 0.1 0.1 = 0 (ver Tabla 1).

■ Iteración 2

- 1. Se selecciona la entrada 0,1 de la tabla de verdad en la Figura 9.
- 2. Los valores de x_1, x_2 se sustituyen en el MCP, $0(w_1) + 1(w_2) > t$, porque f = 1. Con los valores actuales $w_1 = 0, 2, w_2 = -0, 5, t = 0$, la desigualdad resultante es -0, 5 > 0. Por lo tanto el error es E = 0, 5, porque no se satisface la desigualdad.
- 3. Los pesos 'activos', son w_2 y t, dado que $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$. Se aplica el factor de corrección d = (E + e)/2 = (0.5 + 0.1)/2 = 0.3 a w_2 y t. En este caso, se le suma

d a w_2 y se le resta d a t (ver Iteración 1), por lo tanto los nuevos valores son $w_2 = w_2 - d = -0.5 + 0.3 = -0.2$ y t = t - d = 0 - 0.3 = -0.3 (ver Tabla 1).

■ Iteración 3

- 1. Se selecciona la entrada 1,1 de la tabla de verdad en la Figura 9.
- 2. Los valores de x_1, x_2 se sustituyen en el MCP, $1(w_1) + 1(w_2) < t$, porque f = 0. Con los valores actuales $w_1 = 0, 2, w_2 = -0, 2, t = -0, 3$, la desigualdad resultante es 0, 2 + (-0, 2) < -0, 3, es decir 0 < -0, 3. Por lo tanto el error es E = 0, 3, porque no se satisface la desigualdad.
- 3. Los pesos 'activos', son w_1 , w_2 y t, dado que $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. Se aplica el factor de corrección d = (E + e)/2 = (0.3 + 0.1)/2 = 0.2 a w_1 , w_2 y t. En este caso, se le resta d a w_1 , w_2 y se le suma d a t (ver Iteración 1), por lo tanto los nuevos valores son $w_1 = w_1 d = 0.2 0.2 = 0$, $w_2 = w_2 d = -0.2 0.2 = -0.4$ y t = t + d = -0.3 + 0.2 = -0.1 (ver Tabla 1).

.

■ Iteración 7

• La Tabla 1 termina en la Iteración 7, porque los pesos obtenidos al finalizar la iteración ya no generan error. Las desigualdades para la tabla de verdad en la Figura 9 son:

$$0(w_1) + 0(w_2) > t$$
 $0 > t$ $0 > -0.1875$ $0(w_1) + 1(w_2) > t$ $w_2 > t$ $-0.0875 > -0.1875$ $1(w_1) + 0(w_2) < t$ $w_1 < t$ $-0.225 < -0.1875$ $1(w_1) + 1(w_2) < t$ $w_1 + w_2 < t$ $(-0.0875 - 0.225) < -0.1875$ Fodas las desigualdades se cumplen, es decir $E = 0$, se cumple el p

Todas las desigualdades se cumplen, es decir E=0, se cumple el paso 4 del Algoritmo 1 y termina.

4. Problemas no-lineales

Una neurona (MCP) funciona para la solución de problemas lineales, tal como se ilustra gráficamente en Figura 4 y Figura 6. Lo mismo para la Rela Delta del Algoritmo 1, funciona

para problemas lineales.

El problema del XOR es un problema no-lineal que una neurona (MCP) no puede resolver.

4.1. Ejemplo: XOR de 2 entradas

En la Figura 10 se muestra la tabla de verdad de la compuerta XOR para dos entradas, y en la Figura 11 se muestra gráficamente el problema XOR de dos entradas, claramente se ve que un clasificador lineal no resuelve el problema. Se requiere más de un clasificador lineal.

El MCP para las tabla de verdad de la Figura 10 genera las siguientes desigualdades:

$$0(w_1) + 0(w_2) < t \quad 0 < t$$

$$0(w_1) + 1(w_2) > t$$
 $w_2 > t$

$$1(w_1) + 0(w_2) > t$$
 $w_1 > t$

$$1(w_1) + 1(w_2) < t \quad w_1 + w_2 < t$$

Si t es positivo, por ejemplo t=1, entonces $w_1=2$ y $w_2=2$. Se cumplen las tres primeras desigualdades, 0<1, 2>1 y 2>1; pero no se cumple 4<1, porque es una contradicción que individualmente $w_1>t$ y $w_2>t$ y después juntas sean menor a t. Esta es una forma de demostrar matemáticamente a través del MCP y las desigualdades cuando un problema es no-lineal. Gráficamente se puede desmostrar a través de la Figura 11. Sin embargo, cuando tenemos $4,5,\ldots,n$ variables es imposible gráficarlo, el único camino es através de las desigualdades.

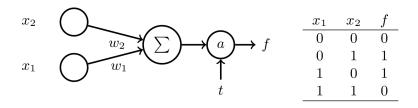


Figura 10. Neurona de dos entradas y tabla de verdad (XOR).

4.2. Ejemplo: 3 entradas

En la Figura 12 se muestra un ejemplo de una neurona (MCP) con tres entradas así como la tabla de verdad para un problema no-lineal.

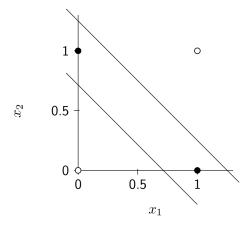
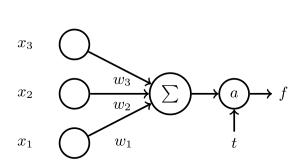


Figura 11. Compuerta XOR de dos entradas.



x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Figura 12. Ejemplo de tres entradas: no-lineal

Las desigualdades de acuerdo al MCP son:

$$0(w_1) + 0(w_2) + 0(w_3) > t \quad 0 > t$$

$$0(w_1) + 0(w_2) + 1(w_3) < t \quad w_3 < t$$

$$0(w_1) + 1(w_2) + 0(w_3) < t \quad w_2 < t$$

$$0(w_1) + 1(w_2) + 1(w_3) < t \quad w_2 + w_3 < t$$

$$1(w_1) + 0(w_2) + 0(w_3) < t \quad w_1 < t$$

$$1(w_1) + 0(w_2) + 1(w_3) < t \quad w_1 + w_3 < t$$

$$1(w_1) + 1(w_2) + 0(w_3) > t \quad w_1 + w_2 > t$$

$$1(w_1) + 1(w_2) + 1(w_3) < t \quad w_1 + w_2 + w_3 < t$$

Como t tiene que ser menor a cero, además $w_1 < t$ y $w_2 < t$. Por lo tanto la desigualdad $w_1+w_2 > t$ nunca será satisfecha, es decir es un problema linealmente no separable, no-lineal. El problema no-lineal de tres entradas de la Figura 12 se puede ver gráficamente en la Figura 13. Para lograr la separación se requiere un plano curvo (no-lineal) que cruce dos veces el plano x_1, x_2 , de tal forma que los puntos $(x_1 = 1, x_2 = 0)$ y $(x_1 = 1, x_2 = 1)$ (con $x_3 = 0$) queden por debajo del plano curvo y los demás puntos por arriba.

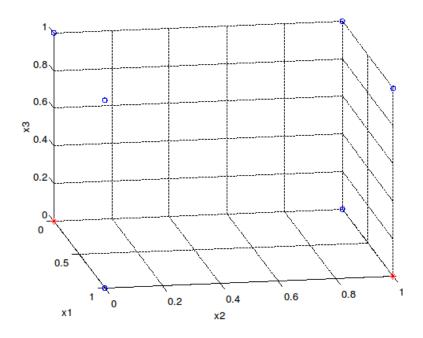


Figura 13. Problema no-lineal de tres entradas, ver tabla de verdad en la Figura 12.

El código para visualizar la Figura 13 se muestra en la Figura 14.

4.3. Perceptron

El problema del XOR es un problema no-lineal que un clasificador simple no puede resolver. En la literatura de redes neuronales artificiales, una neurona o perceptron, es el modelo matemático de una neurona más estudiado. El perceptron fue introducido por Frank Rosenblatt en 1957 [8]. Una década después, Marvin Minsky y Seymour Paper escribieron el famoso libro: Perceptrons. Ellos desmostraron que el perceptron no puede resolver el problema XOR [5].

Quizás esa publicación hizo que la investigación en el área de redes neuronales artificiales se

```
% MATLAB/Octave script
% Problema1 capitulo II, F4
hold on;
view(80,20);
plot3(0,0,0,'r*');
plot3(0,0,1,'bo');
plot3(0,1,0,'bo');
plot3(0,1,1,'bo');
plot3(1,0,0,'bo');
plot3(1,0,1,'bo');
plot3(1,1,0,'r*');
plot3(1,1,1,'bo');
xlabel('x1');
ylabel('x2');
zlabel('x3');
grid on;
```

Figura 14. MATLAB®/Octave script: ejemplo no-lineal de tres entradas.

detuviera hasta que apareció el algoritmo backpropagation [9, 2, 7, 3], casi 20 años después de la publicación de Minsky y Paper [5].

5. Redes Neuronales: Backpropagation

La complejidad o capacidad de clasificación de las redes neuronales artificiales depende de las cantidad de neuronas, ver la Figura 15. Una neurona (una capa – one layer) es un clasificador lineal, una red con estructura de dos o más capas (layers) permite resolver problemas nolineales.

El algoritmo de backpropagation es la generalización de la Regla Delta [7], descrita anteriormente. También se conoce como perceptron multicapa (Multilayer Perceptrons – MLP), red

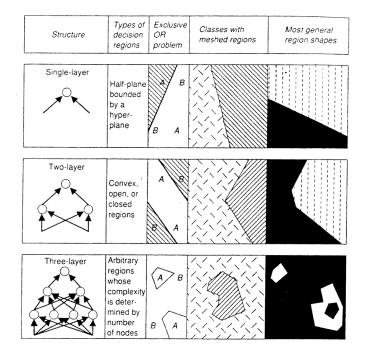


Figura 15. Capacidad de clasificación de las redes neuronales artificiales según su dimensión [4].

neuronal de retropropagación (Feed Forward Neural Networks – FFNN) [9, 2, 3].

5.1. Ejemplo XOR de dos entradas

En la Figura 16 se muestra una arquitectura de red neuronal que resuleve el problema de XOR de dos entradas.

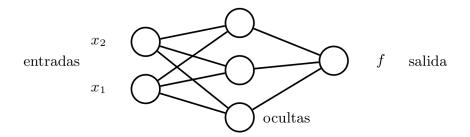


Figura 16. Arquitectura de red neuronal artificial, tipo backpropagation. Tiene dos entradas, una capa oculta y una salida.

En la Figura 17 se muestra el código en MATLAB® para resolver el problema de XOR de dos entradas.

Figura 17. Código MATLAB para resolver el problema de XOR de dos entradas con backpropagation.

5.2. Ejemplo: clasificador de figuras

En la Figura 18 se muestra una imagen (figura) de $[16 \times 16]$. El objetivo es crear un clasificador de imagenes a través de una red neuronal artificial, backpropagation.

La arquitectura de red neuronal artificial en la Figura 19 contiene: 16 entradas, 32 neuronas en la capa oculta y 30 salidas. El número de salidas determina la cantidad de imagenes que puede clasificar esta red. En cada salida se tiene un valor entre [0,1] el valor de umbral para decidir si es una imagen/figura válida es de 0.8 (threshold).

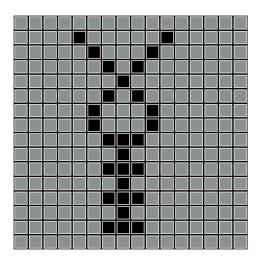


Figura 18. Ejemplo de imagen de 16×16 pixeles.

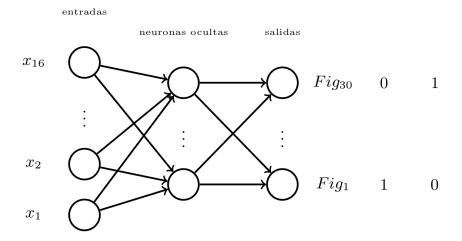


Figura 19. Red neuronal artificial para clasificar imagenes de 16×16 pixeles.

6. Comentarios finales

En estos apuntes se enfocan únicamente al funcionamiento de una neurona artificial, el modelo de McCulloch & Pitts (MCP), la regla delta y backpropagation.

Sin embargo, es importante resaltar que existen diversas tecnologías de redes neuornales artificiales y algoritmos de clasificación:

- Deep Neural Networks (DNN) iterativo
- Covolutional Neural Networks (CNN) iterativo
- Probabilistic Neural Networks (PNN) determinístico
- \blacksquare Support Vector Machines (SVM) determinístico
- Métodos Bayesianos
- Entre otros

Agradecimientos

Se agradece a Rogelio Fernando Cabañes, estudiante de movilidad de la Universidad Autónoma del Estado de México, por la revisión de los apuntes y sus observaciones. También se

agradece al programa "Estímulos al Desempeño del Personal Docente" de la UASLP, que gracias al programa fue posible la elaboración de estos apuntes.

Referencias

- [1] I. Aleksander and E. Horton. An Introduction to Neural Computing. Chapmand & Hal, 1992.
- [2] C. M. Bishop and G. E. Hinton. Neural Networks for Pattern Recognition. Clarendon Press, 1995.
- [3] S. Haykin. Neural Networks: A Comprehensive Foundation. Prentice Hall, 1999.
- [4] R. Lippmann. An introduction to computing with neural nets. *IEEE Magazine*, 4(2):4–22, 1987.
- [5] M. L. Minsky and S. A. Papert. *Perceptrons*. Cambridge, MA: MIT Press, 1969.
- [6] E. Rich and K. Knight. Inteligencia Artificial. Mc Graw Hill, 1994.
- [7] R. Rojas. Neural Networks: A Systematic Introduction. Springer-Verlag, 1996.
- [8] F. Rosenblatt. The perceptron—A perceiving and recognizing automaton. Technical Report 85-460-1, Cornell Aeronautical Laboratory, 1957.
- [9] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R.J. Williams. Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, 323(1):533–536, 1986.
- [10] B. Widrow and M.E. Hoff. Associative Storage and Retrieval of Digital Information in Networks of Adaptive 'neurons'. *Biological Prototypes and Synthetic Systems*, 1:160, 1962.