Preuve des propriétés algébriques

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites numériques, $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

1°/ $u_n \xrightarrow[n]{} l \Rightarrow |u_n| \longrightarrow |l|$

. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque :

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

de l'inégalité triangulaire on a : $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$

donc, pour $n \geq n_0$ il vient $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| < \varepsilon$.

ie $\forall \varepsilon > 0$; $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq n_0$: $||u_n| - |l|| < \varepsilon$. d'où $|u_n| \to |l|$.

remarquons toutefois que l'implication inverse n'est pas vraie :

soit la suite $u_n = (-1)^n$ qui est divergente car possède plus qu'une limite, cependant $|(-1)^n| = 1 \longrightarrow 1$.

2°/ $u_n \to 0 \Leftrightarrow |u_n| \longrightarrow 0$

on sait que $||u_n|| = |u_n|$

donc $\forall \varepsilon > 0$; $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq n_0$: $|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \ ||u_n|| < \varepsilon$

3°/ $\left.\begin{array}{l} u_n \to l \\ v_n \to l' \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \to l + l'$

on a : $\forall \varepsilon > 0$

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq n_1$: $|u_n - l| < \varepsilon/2$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq n_2$: $|v_n - l'| < \varepsilon/2$

on pose $n_3 = \max(n_1, n_2)$:

du fait que $|u_n + v_n - l - l'| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|$

il vient que $\forall n \geq n_3$: $|u_n + v_n - l - l'| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

d'où la convergence de la suite $u_n + v_n$ vers $l + l'$.

4°/ $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: si $u_n \to l \Rightarrow \lambda u_n \to \lambda l$

pour $\lambda \neq 0$ on sait que : $|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda| . |u_n - l|$.

du fait que $u_n \to l$ ie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$; $\forall n \geq n_0 \ |u_n - l| < \varepsilon/|\lambda|$

il vient que pour $n \geq n_0$: $|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda| . |u_n - l| < |\lambda| . \varepsilon/|\lambda| = \varepsilon$.

ie $\lambda u_n \to \lambda l$.

pour $\lambda = 0$ la suite λu_n est la suite nulle $\lambda u_n = 0 \to 0 = 0.l$.

5°/ si $u_n \to 0$
$(v_n)_n$ bornée $\Big\} \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n]{} 0$

$(v_n)_n$ bornée $\Rightarrow \exists M>0$; tel que $\forall n \in \mathbb{N}$: $|v_n| \leq M$.

$u_n \to 0 \iff \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0 : |u_n| < \varepsilon/M$

on a d'un autre côté : $|u_n v_n| = |u_n| . |v_n|$

donc : pour $n \geq n_0$: $|u_n . v_n| = |u_n| . |v_n| \leq M . \varepsilon/M = \varepsilon$.

ie $\forall \varepsilon>0, \exists n \geq n_0 ; \forall n \geq n_0 : |u_n v_n| < \varepsilon$.

d'où la convergence de $u_n v_n$ vers 0.

6°/ si $u_n \to l$
$v_n \to l'$ $\Big\} \Rightarrow u_n v_n \to l l'$

On suppose $l, l' \neq 0$
d'un côté on a :

$$|u_n v_n - ll'| = |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - ll'|$$
$$= |u_n (v_n - l') + l'(u_n - l)|$$
$$\leq |u_n| . |v_n - l'| + |l'| . |u_n - l|.$$

la suite u_n est convergente vers l donc bornée ie :

$$\exists M>0 ; \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| < M.$$

il vient alors : $|u_n v_n - ll'| \leq M . |v_n - l'| + |l'| . |u_n - l|$
d'un autre côté :
$u_n \to l$: $\forall \varepsilon>0 ; \exists n_1 : \forall n \geq n_1 : |u_n - l| < \varepsilon/2|l'|$

$v_n \to l'$; $\forall \varepsilon>0 ; \exists n_2 : \forall n \geq n_2 : |v_n - l'| < \varepsilon/2M$.

posons $n_3 = \max(n_1, n_2)$:

$\forall n \geq n_3$,
$$|u_n v_n - ll'| \leq M . \varepsilon/2M + |l'| . \varepsilon/2|l'| = \varepsilon.$$

la suite $(u_n v_n)_n$ est donc convergente vers ll'.

si à présent l'une au moins des deux limites l, l' est nulle, il suffit d'appliquer le point n° 5°/ id on aura $u_n v_n \to 0 = l . l'$.

7°/ si $u_n \to l$
$l \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow \begin{cases} 1/u_n \text{ définie à partir d'un certain rang.} \\ \frac{1}{u_n} \to 1/l. \end{cases}$

le fait d'avoir $l \neq 0$, ~~d'après~~ donc l est soit positive strictement ou strictement négative, il vient alors que u_n est du même signe que l pour n assez grand (à partir d'un certain rang).

on a : $u_n \to \ell$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} ; \forall n > n_\varepsilon : |u_n - \ell| < \varepsilon$

prenant $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$, il vient

$\exists n_0 ; \forall n \geq n_0 : \quad |u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{|\ell|}{2} < u_n - \ell < \frac{|\ell|}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \ell - \frac{|\ell|}{2} < u_n < \ell + \frac{|\ell|}{2}$

si $\ell > 0$: $\quad 0 < \frac{\ell}{2} < u_n < \frac{3\ell}{2}$ $\quad u_n$ strictement positive

si $\ell > 0$ $\quad \frac{3\ell}{2} < u_n < \ell/2 < 0$ $\quad u_n$ strictement negative.

et dans les deux cas on aura $\frac{|\ell|}{2} < |u_n| < \frac{3|\ell|}{2}$

il existe donc $m > 0$; tel que $\forall n > n_0 : m < |u_n|$, $m = \frac{|\ell|}{2} (\neq 0)$.

ainsi pour $n \geq n_0$ $\frac{1}{u_n}$ st bien definie.

de plus : $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \cdot |\ell|}$.

pour $n \geq n_0$: $\quad \frac{1}{|u_n|} \leq \frac{1}{m}$. , il vient donc

$\left|\frac{1}{u_n} - \ell\right| \leq \frac{|u_n - \ell|}{m \cdot |\ell|}$.

$u_n \to \ell$. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 : \forall n \geq n_1 \quad |u_n - \ell| < m \cdot |\ell| \cdot \varepsilon$.

alors pour $n_2 = \max(n_0, n_1)$: $\forall n > n_2$

$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{m \cdot |\ell| \cdot \varepsilon}{m \cdot |\ell|} = \varepsilon$

la suite $(1/u_n)_n$ st donc cv vers $1/\ell$

8°/ si $\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ v_n \to \ell' \\ \ell' \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_n/v_n \text{ st bien definie à partir d'un certain rang} \\ \text{et} \\ \frac{u_n}{v_n} \to \ell/\ell' \end{array}\right.$

on sait de 7°/ que $(1/v_n)_n$ st bien definie à partir d'un certain rang et que

$\frac{1}{v_n} \to \frac{1}{\ell'}$.

alors : $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} \cdot u_n \xrightarrow[n]{\text{d'après } 6°/} \frac{1}{\ell'} \cdot \ell = \ell/\ell'$.

9°/ $(z_n)_n \in \mathbb{C}$ une suite de nombre complexes.

on a $\forall n$: $z_n = Re(z_n) + i\, Im(z_n)$.

on pose : $x_n = Re(z_n)$, $y_n = Im(z_n)$.

$(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont alors deux suites réelles.

on a de plus : $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$: $|x| \leq |z|$ et $|y| \leq |z|$

~~donc~~ ~~$|x_n$~~

Supposons $z_n \longrightarrow L = l_1 + i l_2$.

ie $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_0 \quad |z_n - L| < \varepsilon$

$|z_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| (x_n - l_1) + i(y_n - l_2) \right| < \varepsilon$.

il vient du fait que $|x_n - l_1| \leq |z_n - L|$ et $|y_n - l_2| \leq |z_n - L|$

que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n \geq n_0$:

$$|x_n - l_1| < |z_n - L| < \varepsilon \text{ et } |y_n - l_2| < |z_n - L| < \varepsilon$$

les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont donc convergentes vers

$l_1 = Re(L)$ et $l_2 = Im(L)$.

à présent supposons : $x_n \longrightarrow l_1$ et $y_n \longrightarrow l_2$.

$\forall \varepsilon > 0$: $\exists n_1 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_1 \quad |x_n - l_1| < \varepsilon/2$

$\exists n_2 \in \mathbb{N} ; \forall n \geq n_2 \quad |y_n - l_2| < \varepsilon/2$

alors pour $n \geq \max(n_1, n_2)$:

$$|z_n - L| = \left| (x_n - l_1) + i(y_n - l_2) \right| < |x_n - l_1| + |y_n - l_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$(z_n)_n$ est donc CV vers $L = l_1 + i l_2$.

Complément sur les limites infinies.

Proposition 3

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites réelles

1) Si $u_n \xrightarrow[n]{} +\infty$ et si $(v_n)_n$ est minorée alors $u_n + v_n \xrightarrow[n]{} \infty$.

cas particulier :

- $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n]{} +\infty \\ v_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \xrightarrow[n]{} +\infty$

- $\left.\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n]{} +\infty \\ v_n \xrightarrow[n]{} l \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \xrightarrow[n]{} +\infty$

2/ Si $u_n \xrightarrow[n]{} +\infty$ et si $(\exists C \in \mathbb{R}_+^*;\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N \Rightarrow v_n \geq C)$

alors $u_n \cdot v_n \longrightarrow +\infty$.

cas particulier :

- $\left.\begin{array}{l} u_n \to +\infty \\ v_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow u_n v_n \xrightarrow[n]{} +\infty$

- $\left.\begin{array}{l} u_n \to +\infty \\ v_n \to \ell' \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right\} \Rightarrow u_n v_n \to +\infty$

3/ $u_n \to +\infty;\ \Rightarrow \frac{1}{u_n} \to 0$

4/ Si $u_n \to 0$ et si $(\exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq N \Rightarrow u_n > 0)$

alors $\frac{1}{u_n} \longrightarrow +\infty$.

Preuve :

1/ $(v_n)_n$ étant bornée ; $\exists m \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N}:\quad m \leq v_n$.

$u_n \to +\infty;\quad \forall A \in \mathbb{R};\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n:\ n \geq n_0:\quad u_n > A - m$.

soit $A \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n + m \leq u_n + v_n$

et pour $n \geq n_0$: $\quad \underbrace{A - m + m}_{=A} < u_n + m \leq u_n + v_n$

d'où $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0:\quad u_n + v_n > A$.

ie : $u_n + v_n \longrightarrow +\infty$.

cas particulier :

- $u_n \to +\infty$, $v_n \xrightarrow[n]{} +\infty$: pour tout $m \in \mathbb{R}$, $v_n \to +\infty$; il existe un certain rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0 : m < v_n$

$m' = \min\{m, v_0, \dots, v_{n_0 - 1}\}$.

Il vient $\forall n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n \geq m'$

(on rappel : une suite tendant vers $+\infty$ est minorée)

ainsi de ce qui précède $u_n + v_n \to +\infty$.

- $\left.\begin{array}{l} u_n \to +\infty \\ v_n \to \ell' \in \mathbb{R} \Rightarrow v_n \text{ est bornée donc minorée} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n + v_n \to +\infty$

2/ Si $u_n \xrightarrow[n]{} +\infty$ et si : $(\exists C \in \mathbb{R}_+^*;\ \exists N:\ n > N \Rightarrow v_n \geq C)$

ie v_n est à partir d'un certain rang positive et minorée par une constante positive non nulle.

on a : $u_n \to +\infty$.

$\forall A \in \mathbb{R}; \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0 : \quad u_n > \frac{A}{C}$

alors si on choisit : $n \geq Max(n_0, N)$ il vient

que $u_n v_n > \frac{A}{C} . C = A$

ie : $\lim_n u_n v_n = +\infty$

Cas particulier :

- $u_n \to +\infty$
  $v_n \to +\infty \Rightarrow (v_n)_n$ est Minorée et positive : car
  $\forall B \in \mathbb{R}; \exists N : \forall n > N : \quad v_n > B$.

  on choisie $B > 0$: par exemple $B = 1$. $\exists N : \forall n > N \quad v_n > 1$.

  et donc d'après ce qui précède $u_n v_n \to +\infty$.

- $u_n \to +\infty$
  $v_n \to \ell' \in \mathbb{R}^*_+ \Rightarrow \exists N ; \forall n : n > N : \quad |v_n - \ell'| < \ell'/2$

  $0 < \frac{\ell'}{2} < v_n < \frac{3\ell'}{2}$

  il suffit de prend $C = \ell'/2$.

  on aura $u_n v_n \to +\infty$.

3°/ $u_n \to +\infty$:

Soit $\varepsilon > 0$; $\forall \varepsilon > 0 ; \exists N ; \forall n > N : \quad u_n > 1/\varepsilon > 0$

$\Rightarrow -\varepsilon < 0 < \frac{1}{u_n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_n} \to 0$.

car : $\forall \varepsilon > 0, \exists N ; \forall n > N : \quad -\varepsilon < 1/u_n < \varepsilon$

4°/ si $u_n \to 0$; si $\exists N \in \mathbb{N} ; \forall n > N ; \quad u_n > 0$

on a : $\forall A \in \mathbb{R}$;

Soit $\varepsilon = 1/|A|$; $\exists n_0 ; \forall n > n_0 : \quad |u_n| < \varepsilon \; : \; -\varepsilon < u_n < \varepsilon$.

pour $n \geq Max(n_0, N)$: $\quad 0 < u_n < \varepsilon$

$\Rightarrow n > Max(n_0, N) : \quad \frac{1}{u_n} > 1/\varepsilon = |A| \geq A$

ie : $1/u_n \to +\infty$. $\quad \forall A \in \mathbb{R} ; \exists N' = Max(n_0, N) : \quad \frac{1}{u_n} > |A| \geq A$.

Suites de Cauchy.

Définition

Une Suite numérique est dite de Cauchy si elle satisfait à la condition suivante dite critère de Cauchy :

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall p, q \in \mathbb{N} ; p > q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$.

. En remarquant que si $p > q$ donc p peut s'écrire sous la forme $p = q + l$; et puisque p est arbitrairement plus grand que q donc $l \in \mathbb{N}^*$;

le critère de Cauchy peut se présenter sous la forme :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall q \in \mathbb{N}, \forall l \in \mathbb{N} : q \geq n_0 \Rightarrow |u_{q+l} - u_q| < \varepsilon .$$

Exemple

- La suite $(u_n = 1/n)_n$ est une suite de Cauchy. car :

Soit $\varepsilon > 0$: $q \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$.

$|u_{q+l} - u_q| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{q+l} - \frac{1}{q}\right| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \left|\frac{-l}{q(q+l)}\right| < \varepsilon . \Leftrightarrow \frac{l}{q(q+l)} < \varepsilon$.

sachant que $\forall l \in \mathbb{N} : \frac{l}{q+l} \leq 1$

ie $\frac{l}{q(q+l)} < \frac{1}{q}$.

il nous suffit donc de prendre $\frac{1}{q} < \varepsilon \Leftrightarrow q > E(1/\varepsilon) + 1$

pour avoir $\forall l$. $\frac{l}{q(q+l)} < \varepsilon$.

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 = E(1/\varepsilon) + 1 ; \forall l \in \mathbb{N} ; \forall q : q \geq n_0 \Rightarrow |u_{q+l} - u_q| < \varepsilon .$$

de même, on peut dans cet exemple travailler avec la 1ère forme du critère :

Soit $\varepsilon > 0$; $p, q \in \mathbb{N}$: $p > q$

$|u_p - u_q| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{p-q}{pq} < \varepsilon$.

on sait que $\frac{p-q}{p} \leq 1$ donc il suffit de prendre $\frac{1}{q} < \varepsilon$.

$q \geq E(1/\varepsilon)+1$ pour avoir :

$$\frac{p-q}{pq} < \frac{1}{q} < \varepsilon$$

Ainsi :

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 = E(1/\varepsilon)+1 ; \forall p, q \in \mathbb{N} : p > q \geq n_0 \Rightarrow |u_q - u_p| < \varepsilon$

- la suite $\left(v_n = \frac{n-1}{n+1}\right)_n$ est de Cauchy :

essayons la 1ère fois du critère :

soit $\varepsilon > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q$:

$$|u_p - u_q| = \left|\frac{p-1}{p+1} - \frac{q-1}{q+1}\right| = 2\left|\frac{p-q}{(p+1)(q+1)}\right| = 2 \cdot \frac{p-q}{(p+1)(q+1)}$$

et puisque $\frac{p-q}{p+1} \leq 1 \Rightarrow |u_p - u_q| < 2 \cdot \frac{1}{q+1}$

ainsi pour avoir $|u_p - u_q| < \varepsilon$, il suffit de prendre $2\frac{1}{q+1} < \varepsilon$

ie $q > E\left(\left|\frac{2}{\varepsilon} - 1\right|\right) + 1$.

de ce fait :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = E\left(\left|\frac{2}{\varepsilon} - 1\right|\right) + 1 ; \forall p, q : p > q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

remarque : remarquons à partir de ces deux exemples que c'est l'entier q (le plus petit) qui engendre l'existence de n_0, l'entier p lui même est dirigé et dépendant de q)

- Montrons à présent que la suite $u_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy :

il s'agit de travailler avec la négation du critère de Cauchy :

$$\exists \varepsilon_0 > 0 ; \forall n \in \mathbb{N} ; \exists p_n, q_n \in \mathbb{N} ; p_n > q_n \geq n \text{ et } |u_{p_n} - u_{q_n}| > \varepsilon_0$$

ie : pour montrer qu'une suite n'est pas de Cauchy, il suffit de ~~trouver~~ montrer que pour tout rang $n \in \mathbb{N}$, il existe des rangs p_n et q_n tels que : $|u_{p_n} - u_{q_n}| >$ à un certain réel positif.

Soit n un entier quelconque : (un rang arbitraire)

on : $2n+1 > 2n \geq n$

de plus $|u_{2n+1} - u_{2n}| = |-1-1| = 2 > 1$

la suite n'est donc pas de Cauchy.

- soit $w_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$; $n \geq 1$.

Soit p, q : $p > q$

$$|u_p - u_q| = \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{q}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{q+1} + \dots + \frac{1}{p}\right| \geq \frac{1}{q+1} + \dots + \frac{1}{p} \geq \underbrace{\frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}}$$

donc $|u_p - u_q| \geq \dfrac{p-q}{p}$.

ainsi si on choisie $\forall n$: $p = mn$ et $q = \ell n$, avec $m > \ell$

$$|u_p - u_q| \geq \frac{m-\ell}{m}$$

ex : $p = 2n$, $q = n$ $\quad \dfrac{p-q}{p} = \dfrac{n}{2n} = 1/2$.

La suite $(w_n)_n$ n'est donc pas de Cauchy.

Remarque du critère de Cauchy on peut voir :

$(u_n)_n$ est de Cauchy $\Leftrightarrow \lim\limits_{p,q \to +\infty} u_p - u_q = 0$

ou en d'autre terme :

$(u_n)_n$ est de Cauchy ssi $\forall \ell \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{q \to +\infty} |u_{q+\ell} - u_q| = 0$.

ainsi

Proposition : Soit $(u_n)_n$ une suite numérique.

S'il existe une suite $(a_q)_q$; telle que :

$$\begin{cases} a_q \xrightarrow[q]{} 0 \\ \forall \ell \in \mathbb{N} : |u_{q+\ell} - u_q| \leq a_q \end{cases}$$

la suite $(u_n)_n$ est alors de Cauchy.

Proposition :

Toute suite de Cauchy est une suite bornée :

Preuve

Soit $(u_n)_n$ de Cauchy :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 : \forall p, q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$.

on choisie $\varepsilon = 1$: $\exists n_0 : \forall p, q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < 1$.

pour $q = n_0$: $\forall p > n_0$: $|u_p - u_{n_0}| < 1$

$$u_{n_0} - 1 \leq u_p < 1 + u_{n_0}.$$

donc pour $n \geq n_0$ la suite $(u_n)_n$ est bornée.

de plus si on prend $M = Max\{|1 + u_{n_0}|, |1 - u_{n_0}|, |u_0|, \dots, |u_{n_0-1}|\}$

il vient que $\forall n \in \mathbb{N}$: $|u_n| < M$.

$(u_n)_n$ est alors bornée.

remarquons toutefois que la réciproque est fausse.

une suite peut être bornée sans qu'elle soit de Cauchy :

par exemple la suite : $(-1)^n$.

Proposition toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers une limite l.

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$; $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq n_0$: $|u_n - l| < \varepsilon/2$

on cherche à montrer que $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$; $p \geq q$.

$$|u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l|$$

ainsi si $p > q \geq n_0$ il vient.

$$|u_p - l| < \varepsilon/2 \text{ et } |u_q - l| < \varepsilon/2$$

et donc $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

en résumé $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall p > q \geq n_0 : \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

$(u_n)_n$ est donc de Cauchy.

La réciproque de cette proposition est toujours vraie dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, c'est l'une des plus grandes et merveilleuses propriétés de l'espace topologique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dit Espace Complet.

Théorème (Critère de ~~[illegible]~~ Convergence de Cauchy)

Pour qu'une suite numérique soit convergente il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy.

$$(u_n)_n \text{ convergente } \Leftrightarrow (u_n)_n \text{ de Cauchy.}$$

Remarque : le critère de convergence de Cauchy n'impose pas la connaissance de la limite au préalable.

La preuve de ce théorème ainsi que le théorème de Bolzano Weierstrass ~~peuvent être~~, existent dans tout manuel d'analyse qui se respecte : (on renvoie à Mr Hazi - Fizi Khelifa, J. M. Monier).

Suites adjacentes

Definition

Deux suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ sont dites adjacentes si et seulement si

→ $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont monotones de monotonies opposées

→ $\lim_n u_n - v_n = 0$.

Ex : $u_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$, $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

Proposition

Si deux suites réelles $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite.

De plus, en notant l cette limite commune, on a :

$$u_0 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n \dots \leq v_0$$

Preuve

On suppose $(u_n)_n \nearrow$, $(v_n)_n \searrow$.

on pose $w_n = u_n - v_n$

$w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - u_n + v_n - v_{n+1} \geq 0$

$(w_n)_n$ est donc croissante

de plus $\lim_n w_n = \lim_n (u_n - v_n) = 0$.

(w_n) est alors croissante, convergente vers 0, on en deduit que : $\forall n \in \mathbb{N} :$ $w_n \leq 0 \iff u_n \leq v_n$.

$u_0 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \dots \leq v_0$

il vient alors :

$(u_n)_n$ est majorée par v_0 donc convergente, posons $l = \lim_n u_n$

$(v_n)_n$ est ~~croissante~~ minorée par u_0 donc convergente, $l' = \lim_n v_n$

et du fait que $\lim_n u_n - v_n = 0$, on deduit que $l = l'$.

exemple :

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites réelles définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k! \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow (u_n)_n$ est croissante.

- $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n!}\left[\frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2}\right]$$

d'où $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n\,n!\,(n+1)^2} \leq 0$

la suite $(v_n)_n$ est donc décroissante.

- $u_n - v_n = -\frac{1}{n.n!} \xrightarrow[n]{} 0$

les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes.

donc convergentes vers la même limite, notons cette limite par e,

$$\lim_n u_n = \lim_n v_n = e.$$

→ Montrons que e est irrationnel.

procédons par l'absurde.

$e>0$, (car $u_n, v_n > 0$ et $u_0 = 1$)

Supposons l'existence d'un couple $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que.

$$e = p/q.$$

On sait que $\forall n$: $u_n \leq e \leq v_n$.

$$u_n \leq p/q \leq v_n.$$

pour $n=q$: $u_q \leq p/q \leq v_q$.

ou : $u_q = \sum_{k=0}^{q} \cancel{1/k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}$

(10)

la reduction au même dénominateur, assure l'existence d'un entier (39)

$a \in \mathbb{Z}^*$ tel que : $u_q = \frac{a}{q!}$

aussi ~~donc~~ $v_q = \frac{a}{q!} + \frac{1}{q \cdot q!}$.

Senc $\frac{a}{q!} \leq p/q \leq \frac{a}{q!} + \frac{1}{q \cdot q!}$.

en Multipliant par $q!$:

$a \leq p(q-1)! \leq a - \frac{1}{q} < a+1$

car $q \geq 1$.

il vient alors que entre de entier successive

a et $a+1$, existe les entier $p.(q-1)!$ et contradict

e est donc irrationnel.

Sous - Suite extraite.

Definition

Soient $(u_n)_n$ une suite numérique, constituite à partir de l'application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

φ une application definie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante : $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

alors l'application composée $\vartheta = u \circ \varphi$ definie une nouvelle suite $(\vartheta_n)_n$ telle que $\vartheta_n = u_{\varphi(n)}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "u"] & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\vartheta = u\circ\varphi"'] & \end{tikzcd} \quad : \vartheta(n) = u(\varphi(n))$$

cette suite notée en général $(u_{\varphi(n)})_n$ st appelée sous-suite extraite de $(u_n)_n$. et l'application φ st dite application d'extraction ou extractrice.

- Remarque: les termes de la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ sont des termes de la suite $(u_n)_n$, des termes spéciaux ayant la particularité que leurs ordre s'écrit sous la forme $\varphi(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$.
L'application φ, joue le rôle d'un filtre qui laisse tombér touts les termes de $(u_n)_n$ sauf ceux de la forme $(u_{\varphi(n)})$.

Exemple:

- $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont des sous-suits extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- $(u_{n^2})_n$ st extraite de $(u_n)_n$.

- $(u_{n^2-n})_n$ n'est pas extraite car l'application $\varphi : \varphi(n) = n^2 - n$ n'est pas injective. le terme u_0 se repet pour $n=0$ et $n=1$.

- $\left(\frac{1}{2^n+3}\right)_n$ st extraite de $\left(\frac{1}{n+3}\right)_n$ et de $\left(\frac{1}{n}\right)_n$

~~Remarque~~ - Proposition

- l'application d'extraction φ st injective, de plus:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geq n.$$

Preuve:

Soit n_1 et n_2 deux entiers distincts : $n_1 \neq n_2$.

la relation d'ordre étant totale donc:

on a: $n_1 > n_2$ ou $n_1 < n_2$.

L'application φ étant strictement croissantes

$$\varphi(n_1) > \varphi(n_2) \quad \text{ou} \quad \varphi(n_1) < \varphi(n_2)$$

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : \quad n_1 \neq n_2 \Rightarrow \varphi(n_1) \neq \varphi(n_2)$$

φ st donc bien injective.

de plus pour $n=0$: $\varphi(0) \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(0) \geq 0$

on suppose que pour un certain n donné : $\varphi(n) > n$.

et montrons que $\varphi(n+1) > n+1$.

on a: φ croissante strictement $\Rightarrow \varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$

alors forcement $\varphi(n+1) \geq n+1$

$$n+1 > \varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n. \quad \text{(impossible)}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{1}$$

il vient alors : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n) \geq n$.

Remarque: Si φ et ψ sont deux application d'extraction leurs composées $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$ sont des application d'extraction engendrant les deux sous-suite.

$$\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_n, \quad \left(u_{\psi(\varphi(n))}\right)_n.$$

Théorème: Si une suite $(u_n)_n$ converge vers une limite l alors toute sous-suite extraite converge vers l.

$$(u_n)_n \text{ CV vers } l \quad \xRightarrow[\varphi \text{ croissante}]{\forall \varphi : \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}} \quad \left(u_{\varphi(n)}\right)_n \text{ st convergente vers } l$$

$u_n \to l$

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n]{} l$$

Preuve

Soit $(U_n)_n$ une suite convergente vers l.

$\forall \varepsilon>0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

soit φ une application d'extraction quelconque.

alors $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \varphi(n) > \varphi(n_0) \geq n_0$.

il vient alors que $|U_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$.

donc : $\forall \varepsilon>0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N} ; n \geq n_0 \Rightarrow |U_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$.

la sous-suite extraite $(U_{\varphi(n)})_n$ st donc convergente vers l.

Corollaire : (~~existence~~) (La preuve se fait par l'absurde)

- Si pour une suite $(U_n)_n$, ils existent deux sous-suite extraits convergentes vers deux limites distinctes, alors cette suite $(U_n)_n$ st forcément divergente.
- Si d'une suite $(U_n)_n$; on peut extraire une sous-suite divergente, elle même st alors divergente.

Proposition : Soit $(U_n)_n$ une suite numérique alors :

la suite $(U_n)_n$ st convergente vers une limite l si et seulement si les deux sous-suite $(U_{2n})_n$, $(U_{2n+1})_n$ sont convergents et vers la même limite l.

Preuve $\Rightarrow$/ La condition st nécessaire d'après le théorème précédent

$\Leftarrow$/ si $(U_n)_n$ st convergente alors toutes sous-suite extraite st convergente vers la même limite en particulier $(U_{2n})_n$ et $(U_{2n+1})_n$.

$\Leftarrow$/ supposons les deux sous-suites (U_{2n}), $(U_{2n+1})_n$ convergentes une limite l. alors :

$\forall \varepsilon>0 ; \exists n_1 \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N} : p \geq n_1 \Rightarrow |U_{2p} - l| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon>0 ; \exists n_2 \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N} \; p \geq n_2 \Rightarrow |U_{2p+1} - l| < \varepsilon$.

posons $N = Max(2n_1, 2p_1+1)$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad n = 2p$ ou $n = 2p+1$

. Pour $n \geq N \Rightarrow \begin{cases} n \geq 2n_1 \\ \text{et} \\ n \geq 2n_2+1 \end{cases}$

. Si $n = 2p \Rightarrow n = 2p \geq 2n_1$

$\Rightarrow p \geq n_1$ donc $|U_{2p} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$

Si $n = 2p+1 \Rightarrow n = 2p+1 \geq 2n_2+1$

$\Rightarrow p \geq n_2$ donc $|U_{2p+1} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$.

De ce fait $\forall n \in \mathbb{N}$; $n > N \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$.

la suite $(U_n)_n$ st donc convergente vers ℓ.

Le second point de la précédente proposition peut se généralisé comme suit :

Proposition (Généralisation)

Soient $(U_n)_n$ une suite ~~réelle~~ et q un entier naturel strictement supérieur à 1, $(q \geq 2)$, alors :

Pour que $(U_n)_n$ soit convergente vers une limite ℓ, il faut et il suffit que toutes les sous-suite

$$(U_{qn})_n, (U_{qn+1})_n, (U_{qn+2})_n, \ldots, (U_{qn+q-1})_n$$

soient convergente vers ℓ.

Preuve (En généralisant la précédente preuve) :

$\Rightarrow$/ toujours grâce au th. si $(U_n)_n$ CV, toutes sous-suite st CV. vers la même limite.

$\Leftarrow$/ Soient $(U_{qn})_n, (U_{qn+1})_n, \ldots, (U_{qn+q-1})_n$ des sous-suites convergentes vers une limite commune ℓ, alors.

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall p \geq n_0 \Rightarrow |U_{qp} - \ell| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists n_1 \in \mathbb{N}$; $\forall p \geq n_1 \Rightarrow |U_{qp+1} - \ell| < \varepsilon$.

$\vdots$

$\forall \varepsilon > 0$; $\exists n_{q-1} \in \mathbb{N}$; $\forall p \geq n_{q-1} \Rightarrow |U_{qp+(q-1)} - \ell| < \varepsilon$.

Soit $N = Max(qn_0, qn_1+1, qn_2+2, \dots, qn_{q-1}+(q-1))$.

et n quelconque tel que $n \geq N$

alors : pour $n \in \mathbb{N}$, on $n = qp$ ou $n = qp+1$ ou $n = np+2, \dots$ ou $n = nq+(q-1)$

alors si $n = qp$ et $n \geq N \Rightarrow qp \geq qn_0 \Rightarrow p \geq n_0 \Rightarrow |u_{qp} - l| < \varepsilon \Leftrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

si $n = qp+1$ et $n \geq N \Rightarrow qp+1 \geq qn_1+1 \Rightarrow p \geq n_1 \Rightarrow |u_{qp+1} - l| < \varepsilon \Leftrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

⋮

si $n = qp+(q-1)$ et $n \geq N \Rightarrow qp+(q-1) \geq qn_{q-1}+(q-1) \Rightarrow p \geq n_{q-1} \Rightarrow |u_{qp+(q-1)} - l| < \varepsilon \Leftrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

la suite $(u_n)_n$ est donc convergente vers l.

exemples:

- $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

$n = 3k$; $k \in \mathbb{N}$: $u_{3k} = \sin\left(\frac{3k\pi}{3}\right) = \sin(k\pi) = (-1)^k$

$n = 3k+1$; $k \in \mathbb{N}$: $u_{3k+1} = \sin\left(\frac{(3k+1)\pi}{3}\right) = \sin(k\pi + \pi/3) = (-1)^k . \sin \pi/3$

$n = 3k+2$; $k \in \mathbb{N}$ $u_{3k+2} = \sin\left(\frac{(3k+2)\pi}{3}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = (-1)^k . \sin 2\pi/3$

il suffit de remarquer que l'une au moins des sous-suite $(u_{3k})_k, (u_{3k+1})_k, (u_{3k+2})_k$

par exemple $u_{3k} = (-1)^k$; n'admet pas de limite qd $k \to +\infty$, pour dire que $(u_n)_n$ est une suite divergente.

$u_{3k} \to \begin{cases} +1 & k \text{ pair} \\ -1 & k \text{ imp} \end{cases}$, $u_{3k+1} \to \begin{cases} \sin \pi/3 & k \text{ pair} \\ -\sin \pi/3 & k \text{ imp} \end{cases}$, $u_{3k+2} \to \begin{cases} \sin \pi/3, & k \text{ pair} \\ -\sin \pi/3, & k \text{ impair} \end{cases}$.

que représente l'ensemble $\{+1, -1, \sin \pi/3, -\sin \pi/3\}$ pour la suite $(u_n)_n$?

Definition :

Un nombre $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_n$ si celle-ci admet une sous-suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ convergente et de limite a.

exemple: dans l'exemple précédent les nombre de l'ensemble $\{+1, -1, \sin \pi/3, -\sin \pi/3\}$ sont tous des valeurs d'adhérence de la suite $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

Remarque toute suite admettant plus d'une valeur d'adhérence est une suite divergente, mais l'unicité de la valeur d'adhérence n'entraine pas nécessairement la convergence de la suite exemple : la suite $u_n = \begin{cases} 0 \ ; & n = 2p \\ n & si\ n = 2p+1 \end{cases}$

$(u_n)_n$ admet 0 pour seule valeur d'adhérence cependant elle diverge

$$V_n = \begin{cases} 1 + 1/n \ ; & n = 2p+1 \\ n^2+5 \ ; & n = 2p. \end{cases}$$

$(V_n)_n$ admet seulement 1 comme valeur d'adhérence et pourtant elle diverge.

$\omega_n = (-1)^n + 3$; elle admet 2 valeur d'adhérence donc elle diverge.

Une condition supplémentaire st imposée à la suite $(u_n)_n$ afin de pouvoir déduire la convergence, si unicité de la valeur d'adhérence à lieu.

théorème de Bolzano - Weierstrass

Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adherence "au moins"

Autrement dit :

De toute suite bornée, on peut etraire une sous - suite convergente.

à partir de la si une suite bornée admet une et une seule valeur d'adhérence elle st convergente. et on deduit le corollaire suivant

Corollaire

Une suite réelle bornée $(u_n)_n$ st convergente vers une limite l si et seulement si l st sa seule valeur d'adhérence.

Definition

On appelle limite superieure (resp inferieure) d'une suite réelle (u_n) la borne superieure (resp inferieure) de l'ensemble des ses valeurs d'adherence et on note par :

$$\overline{\lim_n} u_n = \lim_n \sup u_n \text{ la limite superieure}$$

$$\underline{\lim_n} u_n = \lim_n \inf u_n \text{ la limite inferieure.}$$

ex : $u_n = (-1)^n + 3$. les valeurs d'adherence sont $\{4, 2\}$.

$\overline{\lim_n} u_n = 4$, $\underline{\lim_n} u_n = 2$

exemples

- Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{\sin 4k}{4k} ; & \text{si } n = 4k \\ \dfrac{8k+4}{4k+3} ; & \text{si } n = 4k+1 \\ -3 , & \text{si } n = 4k+2 \\ e^{-4k-3} , & \text{si } n = 4k+3. \end{cases}$$

$(u_n)_n$ a pour valeurs d'adhérence : $-3, 0, 2$,

donc $\underline{\lim}_n u_n = -3$, $\overline{\lim}_n u_n = 2$.

- Determiner les valeurs d'adherence des suites :

$u_n = (-1)^n \left(1 + 1/n\right)$; $v_n = 1/n + (1+(-1)^n)$, $w_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

pour les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ on a :

Si $n = 2p$: $u_{2p} = 1 + 1/2p \xrightarrow[p]{} 1$, $v_{2p} = 1/2p + 2 \xrightarrow[p]{} 2$.

Si $n = 2p+1$ $u_{2p+1} = -1 - \frac{1}{2p+1} \longrightarrow -1$, $v_{2p+1} = \frac{1}{2p+1} \xrightarrow[p]{} 0$

valeurs d'adherence de $(u_n)_n = \{1 ; -1\}$. $\overline{\lim}_n u_n = 1$, $\underline{\lim} u_n = -1$

" " " $(v_n)_n = \{2, 0\}$, $\overline{\lim}_n v_n = 2$, $\underline{\lim} v_n = 0$.

pour la suite $(w_n)_n$; $w_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).\sin(n\pi/2)$

$$w_n = \sin(n\pi/4).\sin(n\pi/2) = \begin{cases} \sin(p\pi).\sin(2p\pi) = 0 & \text{si } n = 4p. \\ (-1)^{p} \sin\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{2} = (-1)^{p}\sin\pi/4 & \text{si } n = 4p+1 \end{cases}$$

$\to -\sin\pi/4 = -1/\sqrt{2}$ $p = 2k$

$\to \sin\pi/4 = 1/\sqrt{2}$ $p = 2k+1$

ce qu'on a fait en cours

on obtient les vs d'adherence $= \{0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\}$.

$\overline{\lim}_n w_n = \sqrt{2}/2$, $\underline{\lim}_n w_n = -\sqrt{2}/2$