Решение задачи Коши методом Адамса–Мултона.

Козлов Кирилл Андреевич 305 группа

17 апреля 2025 г.

Содержание

1 Вывод порядка погрешности аппроксимации схемы.

Рассмотрим схему:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{12}\left(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}\right),$$

где $f_n = f(t_n, u_n)$. Оценим порядок аппроксимации правой части. Подставим точное решение $u(t)$ и разложим $f(t_n, u(t_n)) = u'(t_n)$ в ряд Тейлора в окрестности t_n:

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= u'(t_n + h) = u'(t_n) + hu''(t_n) + \frac{h^2}{2}u^{(3)}(t_n) + \frac{h^3}{6}u^{(4)}(t_n) + \mathcal{O}(h^3),\\
f_n &= u'(t_n),\\
f_{n-1} &= u'(t_n - h) = u'(t_n) - hu''(t_n) + \frac{h^2}{2}u^{(3)}(t_n) - \frac{h^3}{6}u^{(4)}(t_n) + \mathcal{O}(h^3).
\end{aligned}$$

Подставим в правую часть схемы:

$$\frac{1}{12}\left(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}\right) = u'(t_n) + \frac{h}{2}u''(t_n) + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(t_n) + \frac{h^3}{12}u^{(4)}(t_n) + \mathcal{O}(h^3).$$

Аналогично разложим левую часть:

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} = u'(t_n) + \frac{h}{2}u''(t_n) + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(t_n) + \frac{h^3}{24}u^{(4)}(t_n) + \mathcal{O}(h^3).$$

Следовательно,разностный оператор:

$$\begin{aligned}
\Phi = &\left[u'(t_n) + \frac{h}{2}u''(t_n) + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(t_n) + \frac{h^3}{12}u^{(4)}(t_n) + \mathcal{O}(h^3)\right]\\
&- \left[u'(t_n) + \frac{h}{2}u''(t_n) + \frac{h^2}{6}u^{(3)}(t_n) + \frac{h^3}{24}u^{(4)}(t_n) + \mathcal{O}(h^3)\right]\\
= &\frac{h^3}{24}u^{(4)}(t_n)
\end{aligned}$$

то есть порядок погрешности аппроксимации равен:

$$\Phi = \mathcal{O}(h^3),$$

2 Область устойчивости схемы Адамса–Мултона 3-го порядка

Рассмотрим явную формулу многошаговой схемы Адамса–Мултона третьего порядка:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}\left(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}\right)$$

Применим её к тестовому уравнению:

$$u'(t) = \lambda u(t)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $f_n = \lambda u_n$, и схема принимает вид:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h\lambda}{12}\left(5u_{n+1} + 8u_n - u_{n-1}\right)$$

Перепишем в виде линейного однородного уравнения:

$$\left(1 - \frac{5}{12}h\lambda\right) u_{n+1} - \left(1 + \frac{8}{12}h\lambda\right) u_n + \frac{1}{12}h\lambda\, u_{n-1} = 0$$

Введём обозначение $z = h\lambda$. Тогда характеристическое уравнение:

$$\left(1 - \frac{5}{12}z\right) r^2 - \left(1 + \frac{8}{12}z\right) r + \frac{1}{12}z = 0$$

Схема будет устойчивой, если для заданного значения z оба корня r характеристического уравнения удовлетворяют условию:

$$|r| \leq 1$$

Построим область устойчивости схемы в комплексной плоскости $z = h\lambda$ с помощью C++ и визуализируем в Python.

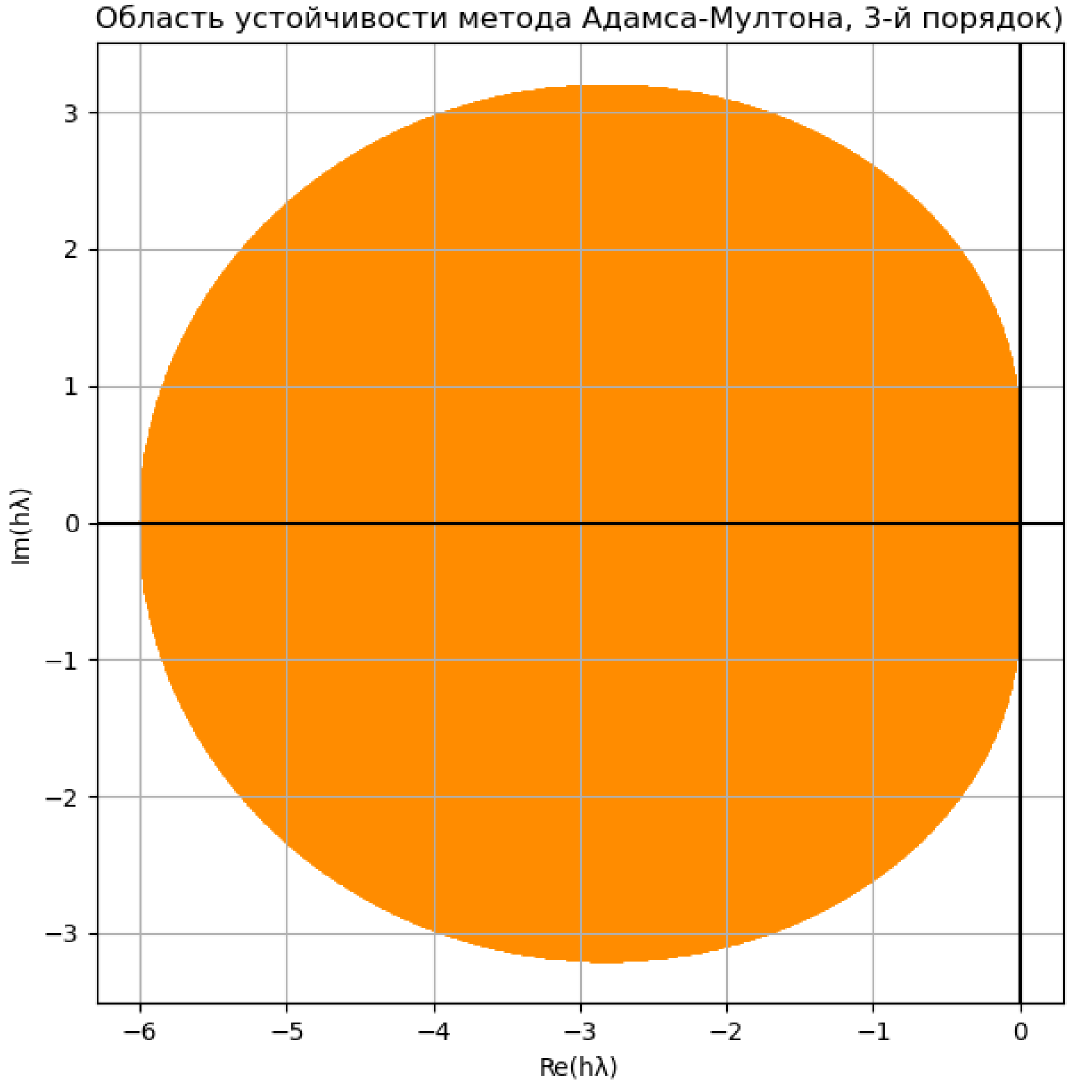

Рис. 1: График области устойчивости схемы

3 Численные эксперименты.

3.1 Случаи сходимости схемы.

Следующие графики демонстрируют эксперименты с правой частью $\frac{du}{dt} = 1.2u$ и разными шагами по времени τ.

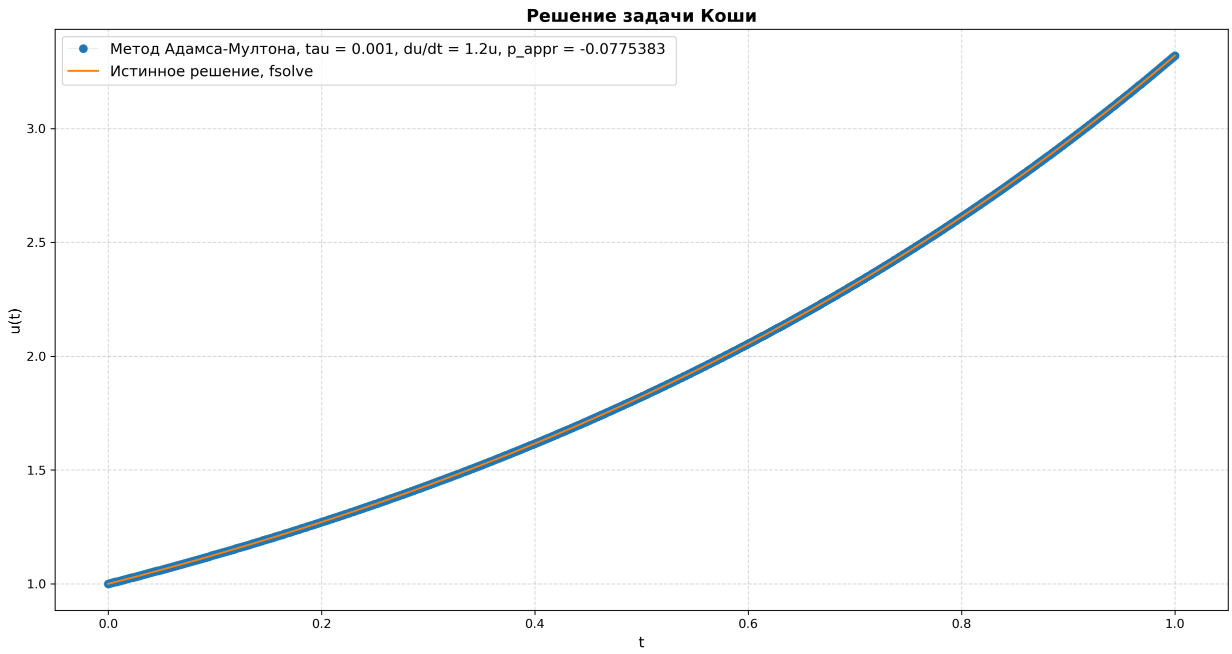

Рис. 2: $\tau = 0.001, \lambda = 1.2$

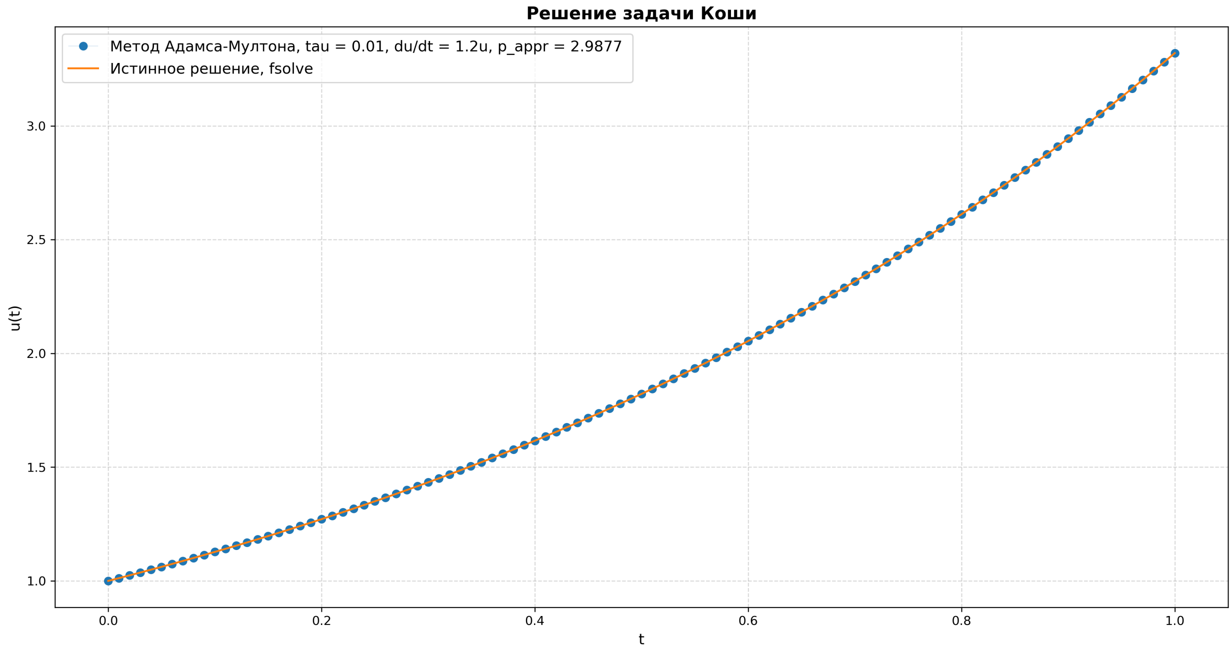

Рис. 3: $\tau = 0.01, \lambda = 1.2$

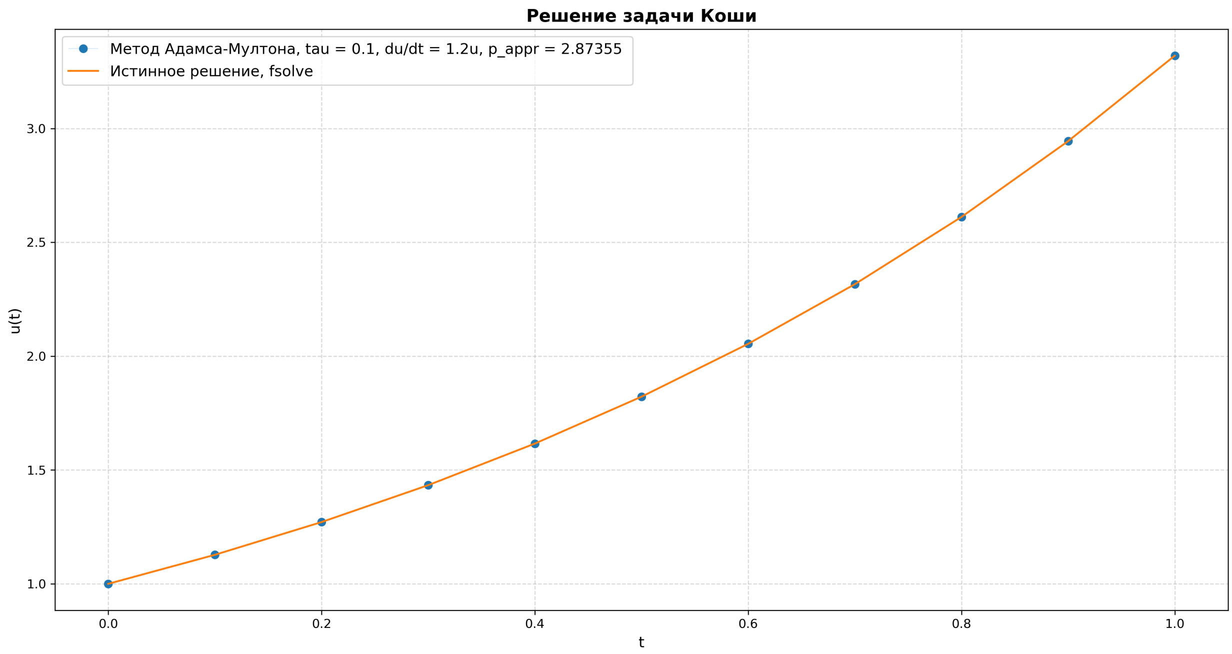

Рис. 4: $\tau = 0.1, \lambda = 1.2$

Следующие графики демонстрируют эксперименты с правой частью $\frac{du}{dt} = -1.2u$ и разными шагами по времени τ.

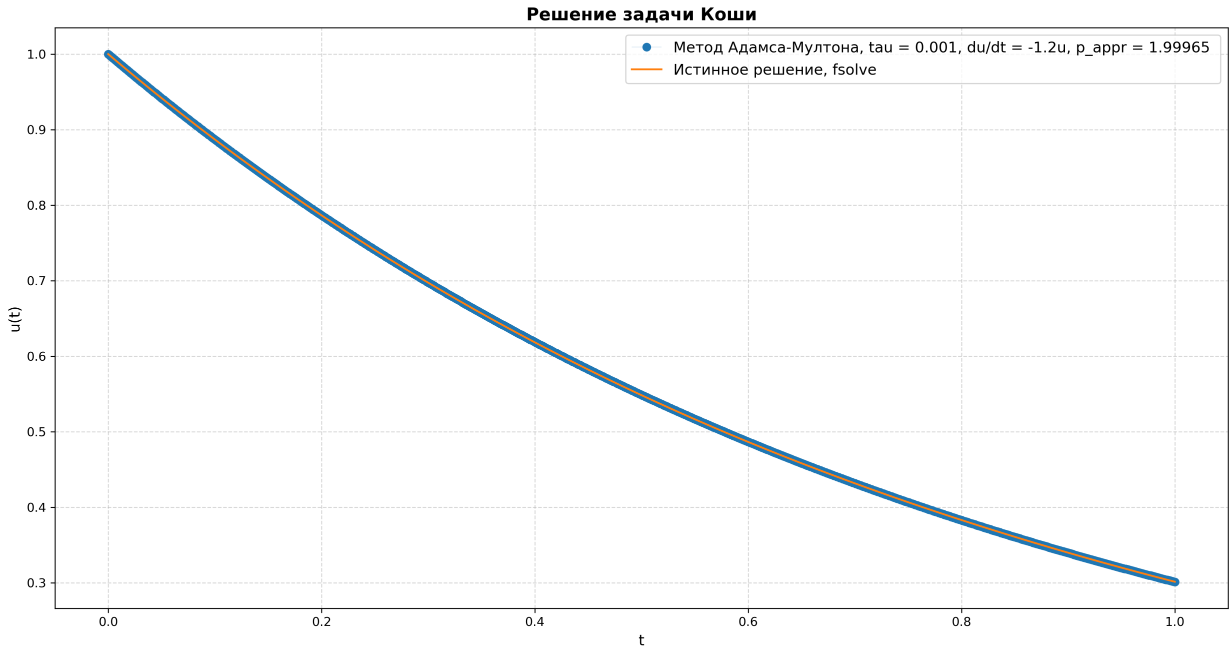

Рис. 5: $\tau = 0.001, \lambda = -1.2$

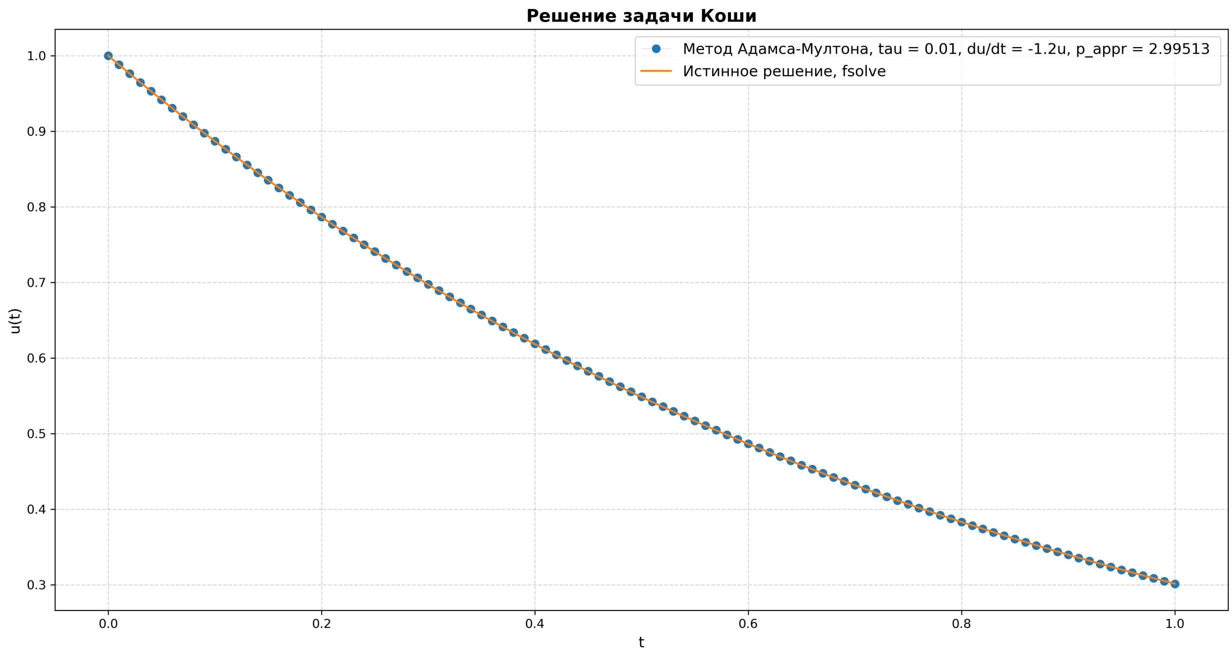

Рис. 6: $\tau = 0.01, \lambda = -1.2$

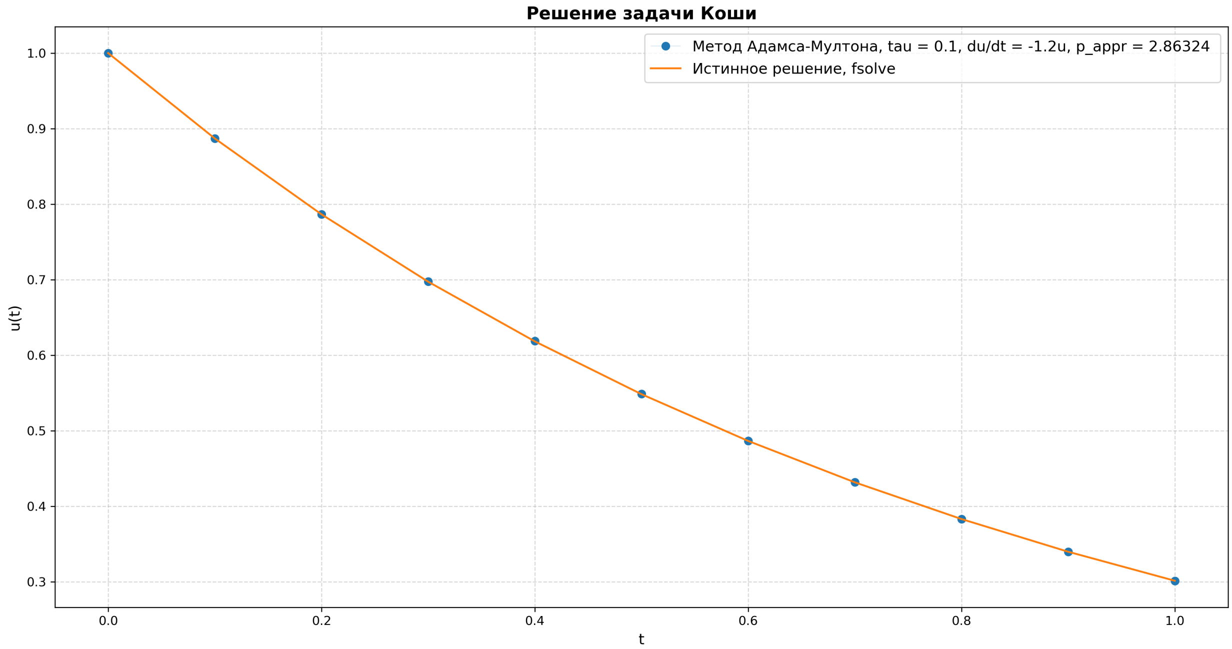

Рис. 7: $\tau = 0.1, \lambda = -1.2$

3.2 Случаи несходимости схемы.

Следующие графики демонстрируют эксперименты с несходимостью схемы.

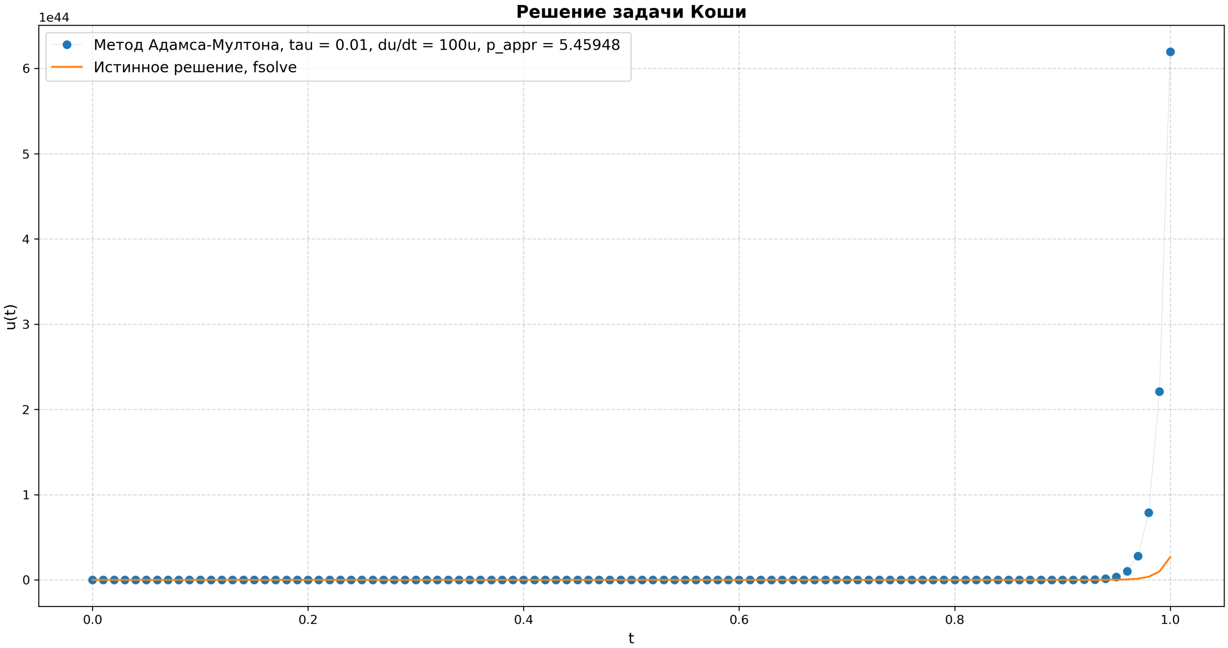

Рис. 8: $\tau = 0.01, \lambda = 100$

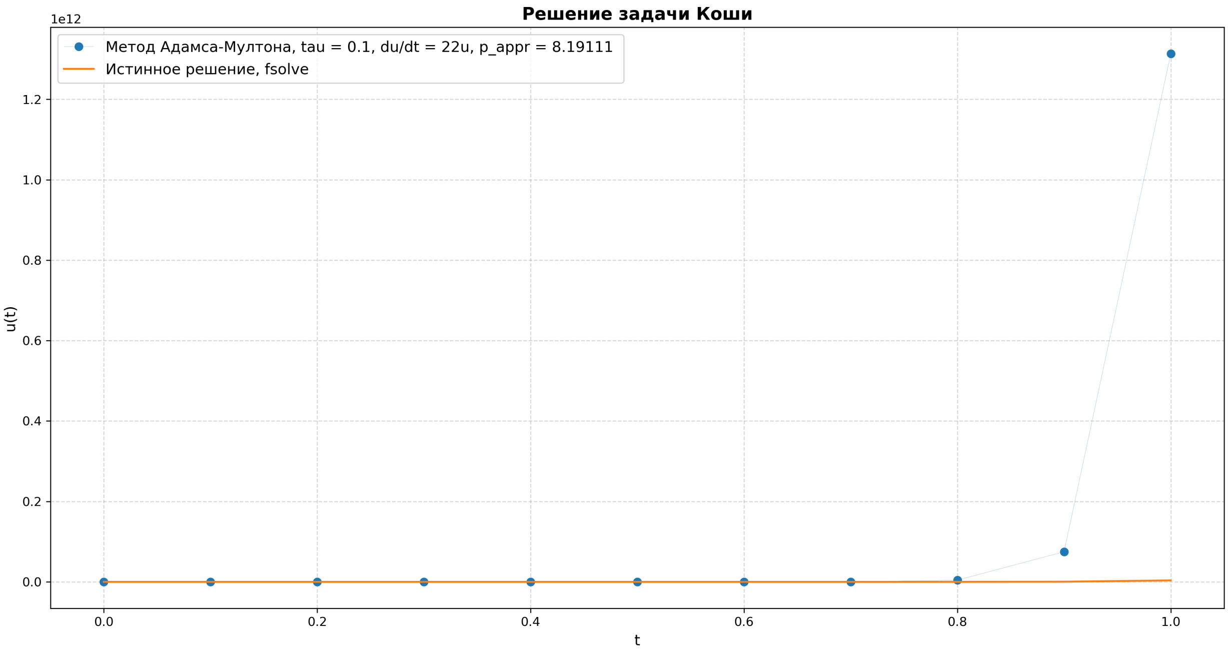

Рис. 9: $\tau = 0.1, \lambda = 22$

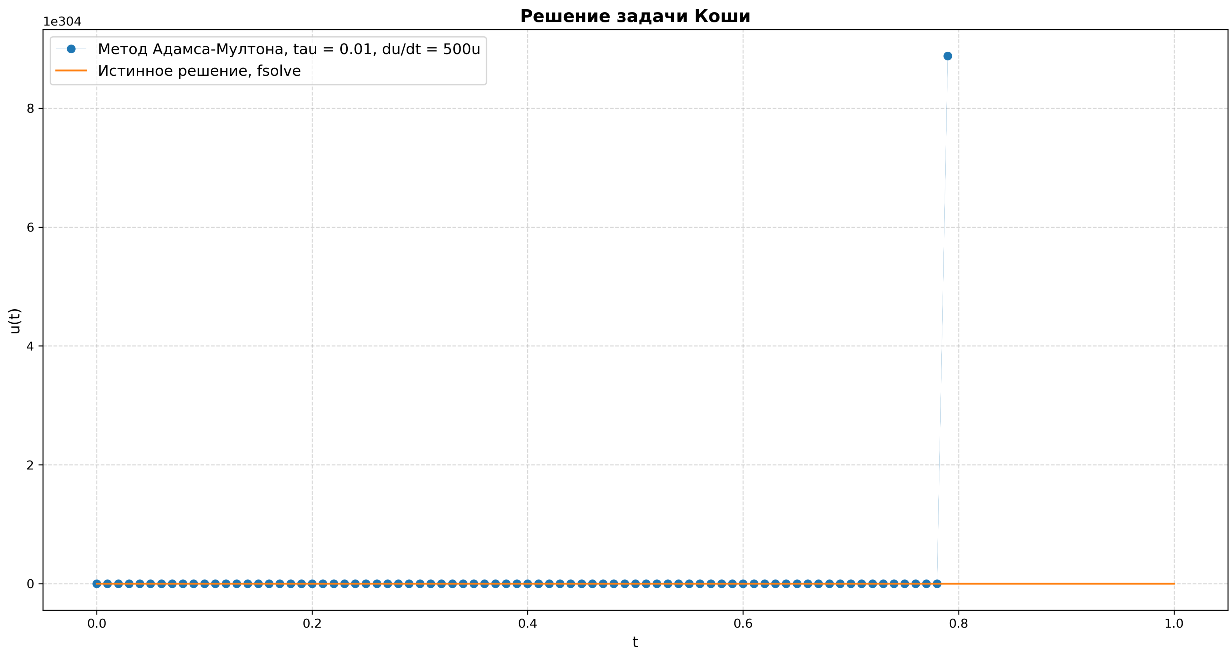

Рис. 10: $\tau = 0.01, \lambda = 500$

4 Оценка порядка сходимости схемы с помощью метода Рунге.

Пусть u_h — численное решение с шагом h, а $u_{h/2}$ — решение с шагом $h/2$. Тогда при выполнении условия:

$$|u - u_h| \approx Ch^p, \quad |u - u_{h/2}| \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^p,$$

можно исключить точное решение u и выразить порядок сходимости p как:

$$p \approx \log_2 \left| \frac{u_h - u_{h/2}}{u_{h/2} - u_{h/4}} \right|$$

Алгоритм

1. Выбрать три разных шага: h, $h/2$, $h/4$.
2. Для каждого из них посчитать приближённые решения: u_h, $u_{h/2}$ и $u_{h/4}$.
3. Вычислить порядок по формуле:

$$p \approx \log_2 \left(\frac{u_h - u_{h/2}}{u_{h/2} - u_{h/4}} \right).$$

4. При необходимости сравнить с теоретическим порядком метода.

В проведённом эксперименте для схемы Адамса–Мултона мы получили значение порядка, близкое к теоретическому значению $p = 3$. (при $\lambda < 0$ получается nan , т.к. берется полследняя точка - значение в очень близком расстоянии от нуля)