Отчёт по практическому заданию №3.
Решение стационарного уравнения диффузии.

Козлов Кирилл 305 группа

21 мая 2025 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Требуется численно решить краевую задачу для одномерного стационарного уравнения диффузии:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, \pi] \\ u(0) = 0, \qquad p(\pi)\dfrac{du}{dx}(\pi) + u(\pi) = 1 \end{cases}$$

Функция $p(x)$ определяется следующим образом:

$$p(x) = \begin{cases} (x - \frac{\pi}{2})^2, & \text{если } 0 \le x \le \frac{\pi}{3}, \\ x^2, & \text{если } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}, \\ 0.1 + (x-\pi)^2, & \text{если } \frac{2\pi}{3} < x \le \pi. \end{cases}$$

Функция $q(x)$ постоянна и равна:

$$q(x) = 1.$$

Функция $f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{если } 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 + \sin(x), & \text{если } \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

2 Консервативная схема

Внутренние узлы $x_i, i = 1, 2, \dots, N-1$:

$$h_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \hbar_i = \frac{h_{i-1} + h_i}{2}$$

Тогда схема имеет вид:

$$-\frac{1}{\hbar_i}\left[p\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i+1}-u_i}{h_i} - p\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}}\right] + \frac{1}{\hbar_i}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(q(x)u(x) - f(x)\right)\, dx = 0$$

где:

$$x_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i\pm1}}{2} \text{ — середины интервалов}, \quad u_0 = 0$$

Если аппроксимировать интеграл интегро-интерполяционным методом, то получим:

$$-p\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)\frac{u_{i+1}-u_i}{h_i} + p\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_i + h_{i+1}}{2}\left[q(x_i)\cdot u_i - f(x_i)\right] = 0$$

Аппроксимация правого граничного условия:

$$-\frac{p(x_N) - p(x_{N-1})}{2*h}u_N + \frac{p(x_N) - p(x_{N-1})}{2*h}u_{N-1} + \kappa p(x_{N-1})u_{N-1} + p(x_{N-1})g_0 + \frac{h}{2}(q(x_{N-1})u_{N-1} - f(x_{N-1})) = 0$$

3 Вывод погрешности аппроксимации схемы на неравномерных сетках

Для функций $p(x), u(x)$ разложим $p(x_{i\pm\frac{1}{2}}), u(x_{i\pm1})$ в ряд Тейлора:

$$p(x_{i+\frac{1}{2}}) = p(x_i) + \frac{h_i}{2}p'(x_i) + \frac{h_i^2}{8}p''(x_i) + O(h^3) \tag{1}$$

$$p(x_{i-\frac{1}{2}}) = p(x_i) - \frac{h_{i-1}}{2}p'(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{8}p''(x_i) + O(h^3) \tag{2}$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h_i u'(x_i) + \frac{h_i^2}{2}u''(x_i) + \frac{h_i^3}{6} + O(h^4) \tag{3}$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - h_{i-1}u'(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{2}u''(x_i) - \frac{h_{i-1}^3}{6} + O(h^4) \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Подставляя разложение, получаем:

$$
\begin{aligned}
\psi_i = & -\frac{1}{\hbar_i}\Bigg[\left(p(x_i) + \frac{h_i}{2}p'(x_i) + \frac{h_i^2}{8}p''(x_i) + O(h^3)\right)\left(u'(x_i) + \frac{h_i}{2}u''(x_i) + \frac{h_i^2}{6}u^{(3)}(x_i) + O(h^3)\right) \\
& - \left(p(x_i) - \frac{h_{i-1}}{2}p'(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{8}p''(x_i) + O(h^3)\right)\left(u'(x_i) - \frac{h_{i-1}}{2}u''(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{6}u^{(3)}(x_i) + O(h^3)\right)\Bigg] \\
& + \ q_i u_i - f_i = -\frac{1}{\hbar_i}\Bigg[p(x_i)\left(\hbar_i u''(x_i) + \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{6}u^{(3)}(x_i)\right) + O(h^3) + \\
& + p'(x_i)\left(u'(x_i)\hbar_i + u''(x_i)\frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{4}\right) + \\
& + p''(x_i)\left(u'(x_i)\frac{h_i^2 - h_{i-1}}{8}\right) + \ q_i u_i - f_i = \\
& = -\cancel{p(x_i)u''(x_i)} - p(x_i)\frac{h_i - h_{i-1}}{3}u_i^{(3)}O(h^2) - \\
& - \cancel{p'(x_i)u'(x_i)} - p'(x_i)u''(x_i)\frac{h_i - h_{i-1}}{2} - p''(x_i)u'(x_i)\frac{h_i - h_{i-1}}{4} + \ \cancel{q_i u_i} - \cancel{f_i} = \\
& = (h_i - h_{i-1})(...) + O(h^2)
\end{aligned}
$$

Это показывает, что метод имеет погрешность порядка $O(h^2)$, если $h_i - h_{i-1} = O(h^2)$.

4 Обоснование выбора используемого метода решения СЛАУ

Для решения СЛАУ был выбран метод прогонки, так как матрица у нас трехдиагональная с диагональным преобладанием.

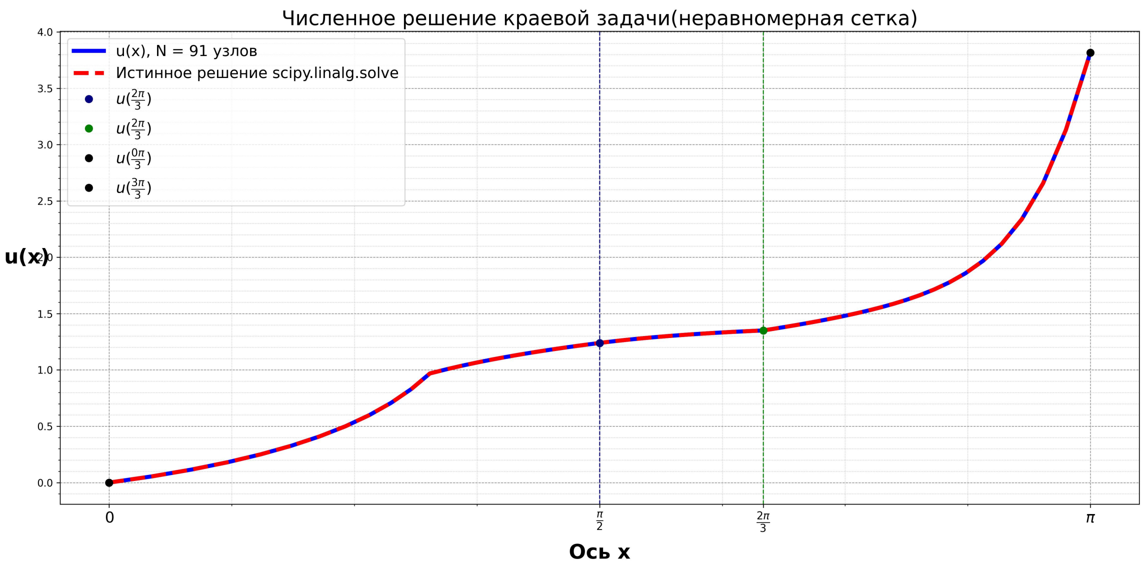

Рис. 1: График решения, неравномерная сетка

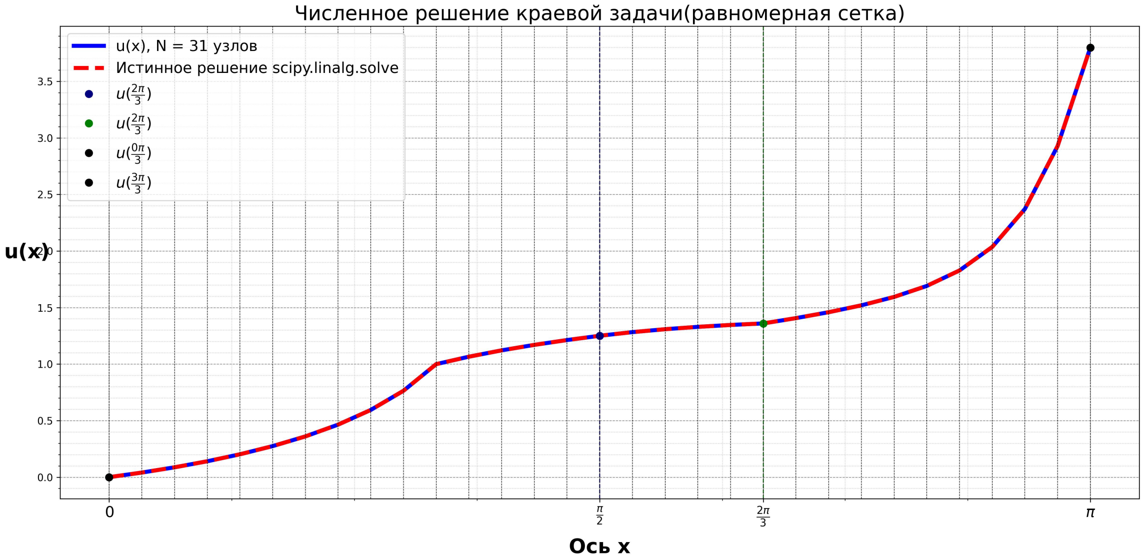

Рис. 2: График решения, равномерная сетка

Также можно посмотреть приближение около точек разрыва

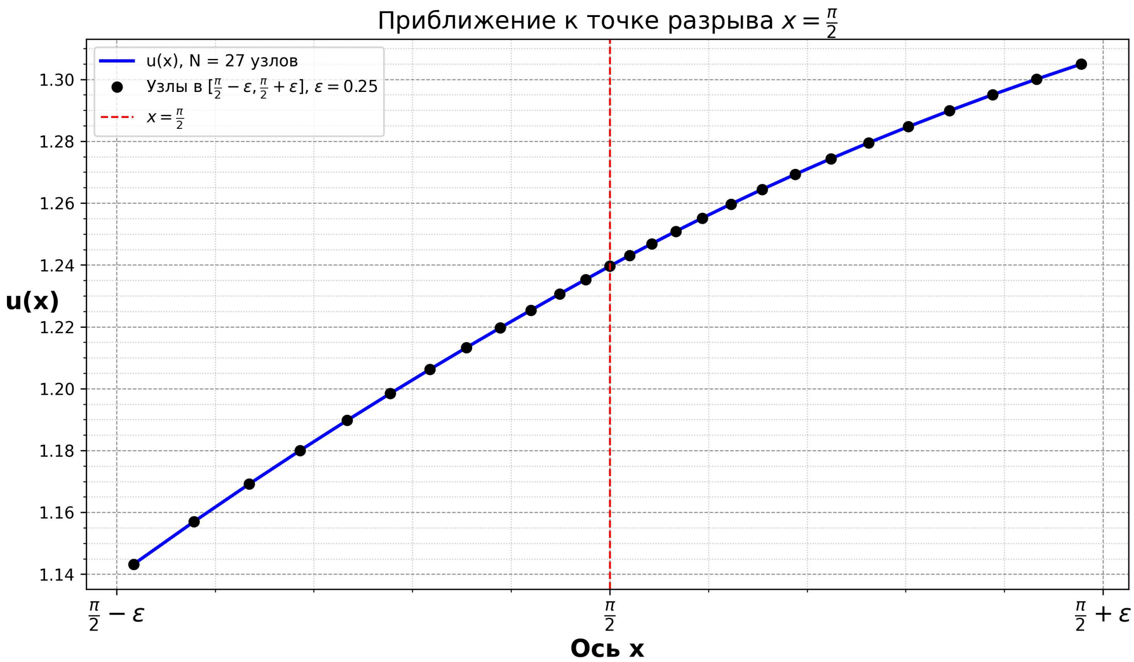

Рис. 3: Приближение около точки $\frac{\pi}{2}$

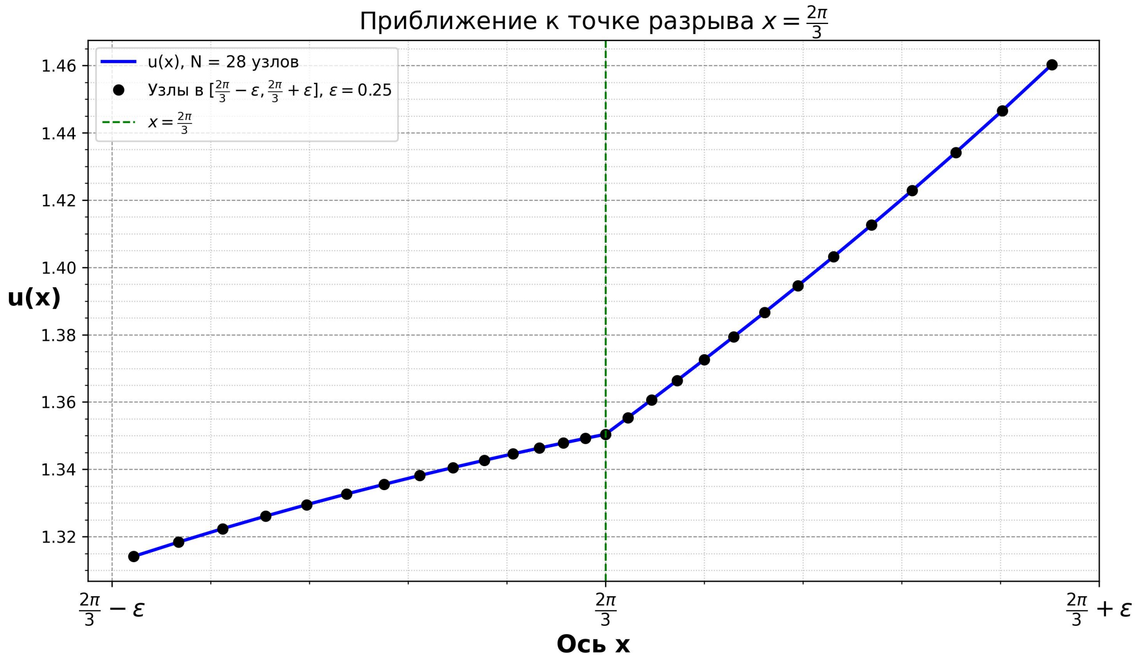

Рис. 4: Приближение около точки $\frac{2\pi}{3}$

5 Обоснование выбора неравномерной сетки для получения второго порядка аппроксимации

Я выбрал неравномерную сетку с экспоненциальным сгущением:

$$x = \alpha + (\beta - \alpha) * \frac{(e^{c*t} - 1)}{(e^c - 1)}$$

Во всех вариантах задания порядок аппроксимации получился равным примерно 2, но на неравномерной сетке при разрывных коэфициентах не получилось , я думаю это из-за сетки. Нужно подбирать параметры сгущения или по-другому задавать неравномерную сетку.

Рис. 5: Сетка неравномерная

Рис. 6: Сетка равномерная

6 Метод Рунге для оценки порядка сходимости.

Некоторые тесты:
Неравномерные сетки, разрывные коэфициенты
Для каждого N правилом Рунге считается порядок
$c1 = -2.5, c2 = 2.0, c3 = 2.0$
$N = 10$: порядок аппроксимации $p \approx 1.49625$

$N = 20$: порядок аппроксимации $p \approx 2.41738$
$N = 30$: порядок аппроксимации $p \approx 0.98345$
$N = 40$: порядок аппроксимации $p \approx -0.57631$
$N = 50$: порядок аппроксимации $p \approx 2.00372$
$N = 60$: порядок аппроксимации $p \approx 0.94544$
$N = 70$: порядок аппроксимации $p \approx 4.37555$
$N = 80$: порядок аппроксимации $p \approx 0.99884$
$N = 90$: порядок аппроксимации $p \approx 2.01120$
$N = 100$: порядок аппроксимации $p \approx -1.89858$
$N = 200$: порядок аппроксимации $p \approx 0.97866$
$N = 300$: порядок аппроксимации $p \approx 6.56393$
$N = 400$: порядок аппроксимации $p \approx 6.99163$
$N = 500$: порядок аппроксимации $p \approx 1.00638$
$N = 600$: порядок аппроксимации $p \approx -4.58021$
$N = 700$: порядок аппроксимации $p \approx 1.90520$
$N = 800$: порядок аппроксимации $p \approx 1.88860$
$N = 1000$: порядок аппроксимации $p \approx 0.98954$
$N = 2000$: порядок аппроксимации $p \approx 1.00743$
$N = 4000$: порядок аппроксимации $p \approx 9.09269$

Равномерные сетки , разрывные коэфициенты
Для каждого N правилом Рунге считается порядок
$N = 10$: порядок аппроксимации $p \approx 2.10248$
$N = 20$: порядок аппроксимации $p \approx 1.44554$
$N = 30$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99075$
$N = 40$: порядок аппроксимации $p \approx 2.03211$
$N = 50$: порядок аппроксимации $p \approx 1.77290$
$N = 60$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99782$
$N = 70$: порядок аппроксимации $p \approx 2.01938$
$N = 80$: порядок аппроксимации $p \approx 1.85729$
$N = 90$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99912$
$N = 100$: порядок аппроксимации $p \approx 2.01388$
$N = 200$: порядок аппроксимации $p \approx 1.94262$
$N = 300$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99998$
$N = 400$: порядок аппроксимации $p \approx 2.00362$
$N = 500$: порядок аппроксимации $p \approx 1.97700$
$N = 600$: порядок аппроксимации $p \approx 2.00002$
$N = 700$: порядок аппроксимации $p \approx 2.00209$
$N = 800$: порядок аппроксимации $p \approx 1.98562$
$N = 1000$: порядок аппроксимации $p \approx 2.00148$
$N = 2000$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99408$
$N = 4000$: порядок аппроксимации $p \approx 2.00256$

Неравномерные сетки, гладкие коэфициенты
$c1 = -2.5, c2 = 2.0, c3 = 2.0$
Для каждого N правилом Рунге считается порядок
$p(x) = 0.2 + exp(x)^2$
$q(x) = 1 + sin(x) * x^2$
$f(x) = 0.5 + cos(x)$
$N = 10$: порядок аппроксимации $p \approx 1.50947$
$N = 20$: порядок аппроксимации $p \approx 1.74965$
$N = 30$: порядок аппроксимации $p \approx 1.83234$
$N = 40$: порядок аппроксимации $p \approx 1.87403$
$N = 50$: порядок аппроксимации $p \approx 1.89913$

$N = 60$: порядок аппроксимации $p \approx 1.91589$
$N = 70$: порядок аппроксимации $p \approx 1.92788$
$N = 80$: порядок аппроксимации $p \approx 1.93688$
$N = 90$: порядок аппроксимации $p \approx 1.94388$
$N = 100$: порядок аппроксимации $p \approx 1.94949$
$N = 200$: порядок аппроксимации $p \approx 1.97473$
$N = 300$: порядок аппроксимации $p \approx 1.98315$
$N = 400$: порядок аппроксимации $p \approx 1.98736$
$N = 500$: порядок аппроксимации $p \approx 1.98989$
$N = 600$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99157$
$N = 700$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99278$
$N = 800$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99368$
$N = 1000$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99494$
$N = 2000$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99747$
$N = 4000$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99872$

Равномерные сетки, гладкие коэфициенты
Для каждого N правилом Рунге считается порядок
$p(x) = 0.2 + exp(x)^2$
$q(x) = 1 + sin(x) * x^2$
$f(x) = 0.5 + cos(x)$
$N = 10$: порядок аппроксимации $p \approx 1.80648$
$N = 20$: порядок аппроксимации $p \approx 1.47565$
$N = 30$: порядок аппроксимации $p \approx 1.90901$
$N = 40$: порядок аппроксимации $p \approx 1.93818$
$N = 50$: порядок аппроксимации $p \approx 1.78095$
$N = 60$: порядок аппроксимации $p \approx 1.95499$
$N = 70$: порядок аппроксимации $p \approx 1.96348$
$N = 80$: порядок аппроксимации $p \approx 1.86143$
$N = 90$: порядок аппроксимации $p \approx 1.97011$
$N = 100$: порядок аппроксимации $p \approx 1.97410$
$N = 200$: порядок аппроксимации $p \approx 1.94386$
$N = 300$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99108$
$N = 400$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99338$
$N = 500$: порядок аппроксимации $p \approx 1.97743$
$N = 600$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99554$
$N = 700$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99620$
$N = 800$: порядок аппроксимации $p \approx 1.98587$
$N = 1000$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99734$
$N = 2000$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99434$
$N = 4000$: порядок аппроксимации $p \approx 1.99933$

7 Примечание

Программа решения была написана в среде Google Colab на Python.