Analisis Komparatif Metode Integrasi Numerik Lanjutan untuk Simulasi Dinamika Pendulum

Jesaya David Gamalael N P
2306161965
Universitas Indonesia
Depok, Indonesia

***Abstract*—Persamaan diferensial biasa (ODE) merupakan fondasi pemodelan untuk sistem mekanika dinamis, termasuk pendulum teredam yang dipengaruhi oleh gaya eksternal periodik. Laporan ini bertujuan mengimplementasikan dan membandingkan tiga metode integrasi numerik lanjutan: Kuadratur Gauss, Integrasi Romberg, dan Kuadratur Adaptif, dalam menyelesaikan sistem ODE non-linear model pendulum. Implementasi dilakukan dalam bahasa C/C++ dengan visualisasi Python, menggunakan langkah waktu referensi h=0,01s pada rentang simulasi 0 hingga 20s. Dua skenario diuji, yakni pendulum tanpa dan dengan gaya eksternal harmonik (A=0.5 rad/s2,ωd=2.0 rad/s). Hasil simulasi dikaji berdasarkan akurasi, stabilitas numerik, dan efisiensi komputasi teoretis. Temuan menunjukkan bahwa ketiga metode memberikan akurasi dan stabilitas yang sangat tinggi, dengan hasil yang secara visual tidak dapat dibedakan. Perbedaan utama di antara mereka terletak pada pendekatan komputasi: Kuadratur Gauss unggul dalam efisiensi evaluasi fungsi, Romberg memberikan peningkatan akurasi yang sistematis, dan Kuadratur Adaptif menawarkan fleksibilitas untuk fungsi dengan kompleksitas bervariasi. Kesimpulannya, ketiga metode terbukti sangat andal untuk studi dinamika presisi tinggi, dengan Kuadratur Gauss menjadi pilihan paling optimal dari segi efisiensi komputasi untuk fungsi yang diketahui.**

Keywords: Pendulum Dynamics, Numerical Integration, Gauss Quadrature, Romberg Integration, Adaptive Quadrature, Ordinary Differential Equations, Comparative Analysis

I. PENDAHULUAN

Ordinary Differential Equations (ODE) merupakan pilar penting dalam pemodelan matematika sistem fisika, memungkinkan analisis dan prediksi perilaku dinamis yang kompleks. Salah satu contoh klasik dinamika kompleks adalah pendulum, yang gerakannya dijelaskan oleh ODE non-linear orde kedua, terutama saat mempertimbangkan efek redaman dan gaya eksternal periodik.

Kompleksitas model pendulum, khususnya yang bersifat non-linear, seringkali menghalangi perolehan solusi analitik bersifat eksak. Oleh karena itu, pendekatan numerik menjadi metode yang penting dan andal untuk melakukan simulasi kuantitatif, hingga memungkinkan aproksimasi solusi ODE dengan tingkat akurasi dan kontrol yang tinggi.

Paper ini berfokus pada implementasi dan evaluasi komparatif dari tiga metode integrasi numerik lanjutan untuk menyelesaikan sistem ODE pendulum teredam.

Metode pertama adalah **Integrasi Romberg**, yang memanfaatkan ekstrapolasi Richardson untuk mencapai konvergensi yang sangat efisien. Kedua adalah **Kuadratur Adaptif** (Adaptive Quadrature), yang secara dinamis menyesuaikan ukuran langkah untuk mengoptimalkan komputasi berdasarkan perilaku lokal fungsi. Terakhir adalah **Kuadratur Gauss** (Gauss Quadrature), yang menggunakan titik dan bobot yang dipilih secara optimal untuk mencapai akurasi tinggi dengan jumlah evaluasi fungsi yang minim.

Implementasi software dikembangkan dalam C++ dengan visualisasi menggunakan Python. Tujuan utama penelitian ini adalah untuk menganalisis dan membandingkan performa (akurasi dan efisiensi) setiap metode dalam skenario pendulum dengan dan tanpa gaya eksternal, serta menginvestigasi akurasi representasi perilaku fisisnya.

Struktur makalah ini diawali dengan tinjauan pustaka mengenai ODE dan metode-metode numerik yang digunakan (Bab II), diikuti oleh deskripsi model matematis pendulum dan parameter simulasi (Bab III). Selanjutnya, disajikan detail implementasi metode (Bab IV), penyajian dan analisis komparatif hasil (Bab V), dan diakhiri dengan kesimpulan (Bab VI).

II. STUDI LITERATUR

Banyak ODE, terutama yang bersifat non-linear seperti pada model pendulum kompleks, tidak memiliki solusi analitik langsung, sehingga memerlukan metode numerik untuk aproksimasi solusinya. Di luar metode Runge-Kutta yang secara langsung mengaproksimasi solusi ODE, terdapat kelas metode integrasi numerik atau kuadratur lain. Metode-metode ini berfokus pada **evaluasi integral definite** dengan efisiensi dan akurasi tinggi, yang merupakan sub-masalah fundamental dalam berbagai pendekatan penyelesaian ODE.

Salah satu teknik yang efisien adalah integrasi Romberg, yang didasarkan pada **ekstrapolasi Richardson** untuk **mempercepat konvergensi**. Prinsipnya adalah menggabungkan dua estimasi integral, I(h1) dan I(h2), untuk menghasilkan estimasi ketiga yang jauh lebih akurat. Untuk kasus khusus di mana interval dibelah dua (h2=h1/2), rumus ekstrapolasinya adalah

$$I \approx \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

Algoritma Romberg menerapkan proses ini secara sistematis dalam bentuk rekursif umum

$$I_{j,k} \approx \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

Di mana k merepresentasikan tingkat akurasi integral.

Metode Kuadratur Adaptif **mengatasi keterbatasan metode yang menggunakan dotspace yang seragam**. Pendekatan ini secara dinamis menyesuaikan ukuran langkah integrasi: interval yang lebih kecil digunakan di wilayah di mana fungsi menunjukkan variasi yang cepat, dan interval yang lebih besar digunakan di mana fungsi berubah secara landai. Mekanismenya umum didasarkan pada perbandingan dua estimasi integral, misalnya I(h1) dan I(h2) dari aturan Simpson, di mana selisih keduanya memberikan ukuran error relatif. Error relatif dari estimasi yang lebih halus dapat diaproksimasi sebagai

$$E(h_2) \approx \frac{1}{15} \left[I(h_2) - I(h_1) \right]$$

Jika error relatif ini melebihi toleransi yang ditentukan, interval akan dibagi lagi dan proses diulang secara rekursif.

Metode Kuadratur Gauss menawarkan pendekatan yang berbeda untuk mencapai efisiensi tinggi. Berbeda dengan formula Newton-Cotes yang menggunakan titik-titik dengan spasi yang tetap, kuadratur Gauss menggunakan lokasi titik dan bobot yang dipilih secara optimal. Bentuk umumnya dapat ditulis sebagai

$$I \approx c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \cdots + c_{n-1} f(x_{n-1})$$

Sebagai contoh, formula dua-titik Gauss-Legendre yang sangat efisien dinyatakan sebagai

$$I \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Formula sederhana ini, yang hanya memerlukan dua evaluasi fungsi, mampu memberikan hasil yang eksak untuk integral polinomial hingga derajat tiga.

III. Data yang Digunakan

Pada studi kasus ini, model pendulum dengan gaya eksternal periodik disimulasikan menggunakan metode integrasi numerik. Sistem dinamika pendulum terdiri dari massa m yang tergantung pada tali sepanjang L, dipengaruhi oleh gravitasi g, redaman dengan koefisien c, serta gaya eksternal harmonik dengan amplitudo A dan frekuensi sudut ωd. Sistem fisika ini dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial orde dua non-linear sebagai berikut:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{mL}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = A\cos(\omega_d t)$$

Persamaan ini kemudian dikonversi menjadi sistem dua persamaan diferensial orde satu, di mana y1=θ (sudut) dan y2=dθ/dt (kecepatan sudut):

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \; (kecepatan\ sudut)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = A\,cos(\omega_d t) - \frac{c}{mL} y_2 - \frac{g}{L} sin(y_1)$$

Penyelesaian sistem ini untuk satu langkah waktu h dapat diekspresikan dalam bentuk integral, yang menjadi target dari metode-metode kuadratur yang digunakan dalam penelitian ini:

$$y_1(t+h) = y_1(t) + \int_t^{t+h} y_2(\tau)\, d\tau$$

$$y_2(t+h) = y_2(t) + \int_t^{t+h} \Big[A\cos(\omega_d \tau) - \frac{c}{mL} y_2(\tau) - \frac{g}{L}\,\mathrm{s}$$

A. Parameter Fisika Pendulum

Parameter-parameter ini dipilih untuk merepresentasikan sistem pendulum sederhana namun tetap memiliki kompleksitas yang cukup untuk menunjukkan perilaku dinamis yang tidak linear.

TABLE I. Parameter Fisika yang Digunakan

Simbol	*Deskripsi*	*Nilai*
L	Panjang tali pendulum	1.0 meter
m	Massa beban	0.2 kg
c	Koefisien redaman	0.1 N.s/m
g	Percepatan gravitasi	9.81 m/s^2

Parameter-parameter ini dipilih untuk merepresentasikan sistem pendulum sederhana namun tetap memiliki kompleksitas yang cukup untuk menunjukkan perilaku dinamis yang tidak linear

B. Gaya Eksternal

TABLE II. Gaya Eksternal

Simbol	*Kasus 1*	*Kasus 2*
Amplitudo (A)	0.5 $radian/s^2$	0.0 $radian/s^2$
Frekuensi (ω_d)	2.0 radian/s	-

Pada **Kasus 1,** sistem diberikan gaya eksternal harmonik dengan amplitudo tertentu dan frekuensi tertentu untuk mensimulasikan kondisi resonansi atau osilasi terpaksa. Pada **Kasus 2**, gaya eksternal dihilangkan sehingga sistem hanya dipengaruhi oleh gravitasi dan redaman.

C. Kondisi Awal

Untuk semua simulasi, digunakan kondisi awal yang konsisten:

- Sudut awal (y_1 (0)) : 0.2 radian
- Kecepatan sudut awal (y_2 (0)): 0.0 radian/s

D. Rentang Simulasi

Kondisi awal ini mencerminkan bahwa pendulum mulai dari posisi sedikit menyimpang dari garis vertikal dan dalam keadaan diam. Rentang waktu simulasi dan ukuran langkah waktu adalah sebagai berikut:

- Waktu awal (t_{awal}) : 0 detik
- Waktu akhir (t_{akhir}) : 20 detik

- Ukurang langkah waktu (h):0.01 detik

Langkah waktu sebesar h = 0.01 detik dipilih sebagai kompromi antara akurasi hasil simulasi dan efisiensi waktu komputasi. Langkah yang kecil meningkatkan akurasi, namun meningkatkan jumlah iterasi dan waktu proses.

E. *Output Simulasi*

Setiap metode numerik menghasilkan data output yang disimpan dalam file CSV dengan kolom berikut:

- t : waktu (detik)
- θ : sudut simpangan pendulum (y_1) dalam radian
- ω : kecepatan sudut pendulum (y_2) dalam radian/detik

Data ini digunakan untuk analisis lebih lanjut, termasuk visualisasi grafik seperti:

- Grafik θ vs t
- Grafik ω vs t
- Diagram fase (ω vs θ)

.

IV. Penjelasan metode yang Digunakan

Dalam proyek ini, digunakan tiga metode integrasi numerik lanjutan untuk menyelesaikan ODE yang menggambarkan gerak pendulum teredam. Metode-metode ini dipilih untuk mengevaluasi akurasi dan efisiensi komputasi dalam menganalisis dinamika sistem. Metode yang dipilih di antaranya adalah Metode Integrasi Rombergm, Metode Kuadratur Adaptif, dan Metode Kuadratur Gauss. Ketiga metode ini menawarkan pendekatan yang berbeda dalam mencapai solusi numerik yang akurat untuk integral yang merepresentasikan langkah-langkah solusi ODE.

A. *Metode Integrasi Romberg*

Integrasi Romberg adalah sebuah skema komputasi yang secara efisien menerapkan ekstrapolasi Richardson pada hasil dari aturan trapesium. Metode ini menggunakan dua estimasi integral numerik untuk memperoleh estimasi ketiga yang lebih akurat. Formulasi ini dapat diekspresikan dalam bentuk rekursif umum yang sangat sesuai untuk implementasi komputer

$$I_{j,k} \cong \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

Di mana Ij,k adalah integral yang ditingkatkan akurasinya. Indeks k menandakan tingkat integrasi atau level akurasi, sedangkan indeks j digunakan untuk membedakan antara estimasi yang lebih akurat (j+1) dan yang kurang akurat (j).

B. *Metode Kuadratur Adaptif*

Metode kuadratur adaptif menyesuaikan ukuran langkah secara dinamis, menggunakan interval kecil di area di mana fungsi bervariasi secara cepat dan interval yang lebih besar di area di mana fungsi berubah lebih lambat. Sebagian besar teknik ini didasarkan pada penerapan aturan integrasi, seperti aturan Simpson 1/3, pada dua tingkat penghalusan (refinement). Selisih antara kedua hasil ini kemudian digunakan untuk memperkirakan galat pemotongan. Estimasi galat untuk hasil yang lebih halus (I(h2)) dapat diturunkan sebagai

$$E(h_2) \approx \frac{1}{15}\left[I(h_2) - I(h_1)\right]$$

Jika galat yang diperkirakan ini lebih besar dari toleransi yang ditentukan, interval akan dibagi lagi dan proses diulang secara rekursif hingga galat dapat diterima.

C. *Metode Kuadratur Gauss*

Kuadratur Gauss adalah kelas teknik integrasi yang menggunakan titik-titik evaluasi (base points) yang dipilih secara strategis, bukan titik-titik yang berjarak sama. Dengan memposisikan titik-titik ini secara bijak, galat positif dan negatif dapat diseimbangkan untuk menghasilkan estimasi integral yang jauh lebih baik. Bentuk umum dari formula ini adalah

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \cdots + c_{n-1} f(x_{n-1})$$

Sebagai contoh, formula dua-titik Gauss-Legendre yang populer dinyatakan sebagai:

$$I \cong f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Formula ini mencapai akurasi orde ketiga hanya dengan dua kali evaluasi fungsi, menunjukkan efisiensinya yang tinggi karena pilihan titik dasarnya yang cerdas.

D. *Pemilihan Metode dalam Simulasi*

Dalam simulasi pendulum teredam, ketiga metode tersebut diimplementasikan untuk menyelesaikan sistem ODE non-linear. Implementasi dilakukan secara iteratif dalam rentang waktu t=[0,20] detik. Setiap metode diuji pada dua skenario:

a. Kasus 1: Pendulum dengan gaya eksternal (A=0.5 rad/s2, ωd=2.0 rad/s)
b. Kasus 2: Pendulum tanpa gaya eksternal (A=0.0)

Hasil dari masing-masing metode disimpan dalam file CSV untuk analisis lebih lanjut, termasuk visualisasi grafik sudut (θ) dan diagram fase (ω vs θ).

V. Analisis Hasil

1. Simulasi Tanpa Gaya Eksternal

Pada kondisi ini, pendulum **hanya dipengaruhi oleh gaya gravitasi dan redaman**. Gerakan yang diharapkan adalah osilasi teredam, di mana amplitudo akan berkurang secara bertahap hingga sistem mencapai titik setimbang.

Ketiga metode lanjutan ini menunjukkan performa yang sangat tinggi dan hasil yang secara visual sangat mirip. Kurva osilasi teredam yang dihasilkan oleh setiap metode tumpang tindih dengan sempurna, menandakan bahwa ketiganya berhasil memodelkan disipasi energi akibat redaman fisik secara akurat tanpa menambahkan relative error redaman numerik yang signifikan. Perilaku sistem yang dihasilkan sesuai dengan ekspektasi teoretis.

2. Simulasi Dengan Gaya Eksternal

Dalam kasus ini, sistem pendulum dipengaruhi oleh gaya gravitasi, redaman, **serta gaya eksternal periodik**. Gerakan yang diharapkan adalah osilasi paksa, di mana setelah fase transien, sistem mencapai kondisi tunak (*steady-state*) yang dipertahankan oleh gaya eksternal.

Semua metode berhasil menangkap respons osilasi paksa dengan presisi yang baik. Plot perbandingan menunjukkan bahwa ketiganya konvergen ke osilasi tunak dengan amplitudo dan fase yang identik. Diagram fase juga mengonfirmasi hal ini dengan menunjukkan atraktor siklus batas (*limit cycle*) yang bersih dan stabil. Hasil ini membuktikan bahwa metode-metode ini sangat andal untuk menganalisis perilaku sistem jangka panjang.

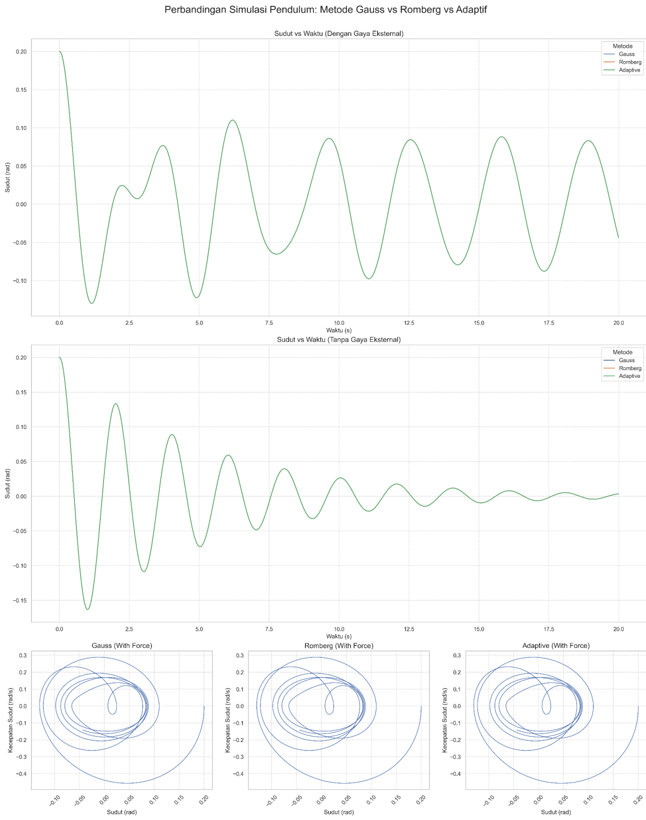
3. Perbandingan Umum Metode Numerik

Aspek	Kuadratur Gauss	Integrasi Romberg	Kuadratur Adaptif
Akurasi	Sangat Tinggi	Sangat Tinggi	Sangat Tinggi
Stabilitas	Sangat Stabil	Sangat Stabil	Sangat Stabil
Efisiensi (Teoretis)	Paling efisien (evaluasi fungsi minimal)	Sangat efisien (via ekstrapolasi)	Efisien (fokus pada area kompleks)

4. Pengaruh Gaya Eksternal

Analisis ini menegaskan kembali perilaku fisik fundamental dari sistem pendulum.

- Tanpa gaya eksternal, pendulum mengalami osilasi teredam. Energi sistem berkurang seiring waktu karena redaman, menyebabkan amplitudo osilasi menurun hingga berhenti.
- Dengan gaya eksternal, pendulum menunjukkan osilasi paksa. Meskipun ada redaman, energi dari gaya eksternal mempertahankan osilasi sehingga tercapai kondisi tunak dengan amplitudo yang tetap dan stabil. Amplitudo dan fase dari osilasi paksa ini bergantung pada frekuensi dan amplitudo gaya eksternal dibandingkan dengan frekuensi alami sistem.



IV. Kesimpulan

Berdasarkan hasil simulasi pada rentang waktu 0–20 detik untuk kedua skenario (tanpa dan dengan gaya eksternal), maka diperoleh beberapa poin kesimpulan berikut.

1. Akurasi dan stabilitas

   Ketiga metode numerik lanjutan, mencakup Kuadratur Gauss, Integrasi Romberg, dan Kuadratur Adaptif, menunjukkan **tingkat akurasi dan stabilitas yang sangat tinggi** pada kedua kasus, baik osilasi teredam maupun osilasi paksa. Hasil perhitungan sudut dan kecepatan sudut dari ketiga metode secara visual identik dan tumpang tindih dengan sempurna. Hal ini menandakan bahwa semua metode berhasil konvergen ke solusi fisik ideal dengan galat numerik yang minimal, serta mampu merepresentasikan dinamika sistem secara akurat dalam jangka panjang.

2. Efisiensi komputasi

   Perbandingan efisiensi antara metode-metode lanjutan ini lebih bersifat teoretis dan bergantung pada pendekatan komputasinya.

   - Kuadratur Gauss secara teoretis merupakan metode paling efisien untuk fungsi yang diketahui, karena mampu mencapai akurasi yang sangat tinggi dengan jumlah evaluasi fungsi yang paling sedikit.

- Integrasi Romberg juga sangat efisien dengan memanfaatkan ekstrapolasi untuk membatalkan galat secara sistematis. Meskipun memerlukan lebih banyak evaluasi fungsi daripada Gauss untuk membangun tabelnya, metode ini sangat andal dan terstruktur.

- Kuadratur Adaptif memiliki efisiensi yang dinamis. Metode ini sangat efektif untuk fungsi dengan kompleksitas yang bervariasi, karena ia hanya mengalokasikan sumber daya komputasi pada interval yang paling membutuhkannya.

3. Rekomendasi penggunaan

Karena ketiga metode menunjukkan akurasi yang setara, rekomendasi didasarkan pada karakteristik masalah dan prioritas komputasi.

- Gunakan Kuadratur Gauss ketika **fungsi yang diintegrasikan diketahui secara analitik dan efisiensi** (jumlah evaluasi fungsi) **menjadi prioritas utama**.
- Pilih Integrasi Romberg untuk mendapatkan **hasil presisi tinggi** melalui proses yang sistematis, yang sangat cocok untuk validasi dan analisis berlanjut.
- Gunakan Kuadratur Adaptif saat **kontrol error yang rendah di seluruh domain diperlukan**, atau saat berhadapan dengan fungsi yang memiliki bagian landai dan curam.

4. Saran pengembangan selanjutnya

a. Meninjau pengaruh variasi toleransi error terhadap akurasi dan efisiensi metode Kuadratur Adaptif.
b. Memperluas model untuk memasukkan nonlinieritas lebih kompleks (misalnya, pendulum ganda) atau gaya eksternal non-harmonik.
c. Membandingkan keluarga metode kuadratur ini dengan metode *multistep* (Adams–Bashforth, Adams–Moulton) atau metode implisit, terutama untuk kasus sistem yang kaku (*stiff*).

VI. Github

https://github.com/noobplatinum/FinproKomnum

VII. Link Youtube

Acknowledgment

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Alfan Presekal atas pemberian template laporan serta arahan yang sangat membantu dalam penyusunan tugas ini.

References

[1] OpenStax College, “The Simple Pendulum | Physics,” *LumenLearning*, 2023. https://courses.lumenlearning.com/suny-physics/chapter/16-4-the-simple-pendulum/

[2] OpenStax College. “The Simple Pendulum | Physics.” LumenLearning, 2023. https://courses.lumenlearning.com/suny-physics/chapter/16-4-the-simple-pendulum/

[3] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical methods for engineers*, 7th ed. New York: Mcgraw-Hill Education, Cop, 2015.

[4] Number Analytics. “Mastering Adaptive Quadrature: Practical Approaches for High Accuracy.” Number Analytics. https://www.numberanalytics.com/blog/mastering-adaptive-quadrature-accuracy

[5] L. Leal, “Numerical Integration: Romberg Integration - TDS Archive - Medium,” *Medium*, Dec. 02, 2018. https://medium.com/data-science/numerical-integration-romberg-integration-3f54002ab538

[6] “7.05: Gauss Quadrature Rule of Integration,” *Mathematics LibreTexts*, Apr. 28, 2023. https://math.libretexts.org/Workbench/Numerical_Methods_with_Applications_(Kaw)/7%3A_Integration/7.05%3A_Gauss_Quadrature_Rule_of_Integration