Билет 1. *Определение функции, сюръекции, инъекции и биекции.*

Определение 1.1. *Декартовым произведением $X \times Y$ множеств X и Y называют множество всевозможных пар (x, y), где первый элемент x каждой пары принадлежит X, а второй ее элемент y принадлежит Y.*

Определение 1.2. *Функцией f, определённой на множестве X и принимающей значения во множестве Y, называется подмножество декартова произведения $X \times Y$, если выполнено следующее условие: $\forall x \in X\ \exists!$ пара $(x, y) \in f$. При этом пишут $y = f(x)$. Элемент y называют образом x, элемент x – прообразом элемента y, для функции принято обозначение $f : X \to Y$.*

Множество $f(X)$ всех элементов $f(x) \in Y$ называется образом множества X. Короче, это записывается так:

$$f(X) = \{y \in Y | y = f(x),\ x \in X\},$$

а само X называется прообразом множества $f(X)$.

Определение 1.3. *1) Функция $f : X \to Y$ называется сюръекцией (накрытием), если для всякого $y \in Y$ существует такое $x \in X$, что $y = f(x)$.*
2) Функция $f : X \to Y$ называется инъекцией (вложением), если из равенства $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$.
3) Функция, являющаяся одновременно сюръекцией и инъекцией, называется биекцией или взаимно-однозначным отображением.

Билет 2. *Определение того, что множество A лежит левее множества B, разделяющего элемента и формулировка принципа полноты.*

Определение 2.1. *Говорят, что множество A лежит левее множества B, если $a \le b$ для всяких $a \in A$ и $b \in B$.*

Определение 2.2. *Пусть множество A лежит левее B. Тогда говорят, что число c разделяет множества A и B, если $a \le c$ и $c \le b$ для всех $a \in A, b \in B$.*

Определение 2.3. *Говорят, что для числового множества выполняется принцип полноты, если для любых двух его подмножеств, одно из которых лежит левее другого, найдётся элемент, разделяющий эти множества.*

Билет 3. *Определение множества вещественных чисел (с помощью 11 свойств) и формулировка принципа полноты для множества вещественных чисел.*

Множество действительных чисел, которое мы обозначим $\mathbb{R}$, должно удовлетворять ряду условий. Во-первых, сумма и произведение любых элементов этого множества снова является элементом этого множества. Кроме того, выполнены следующие свойства.

1) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *ассоциативности по сложению*:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

2) Для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ выполнено условие *коммутативности по сложению*:

$$a + b = b + a.$$

3) Существует *нейтральный элемент относительно операции сложения* $0 \ \in \mathbb{R}$, такой, что для всех $a \in \mathbb{R}$ $a + 0 = a$.

4) Для всякого $a \in \mathbb{R}$ найдётся *противоположный элемент* $b \ \in \mathbb{R}$, такой, что $a + b = 0$ (его обычно обозначают через $-a$).

5) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *ассоциативности по умножению*:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

6) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *коммутативности по умножению*:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

7) Существует *нейтральный элемент относительно операции умножения* $1 \in \mathbb{R}$, такой, что для всех $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 1 = a$.

8) Для всякого $a \ \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ найдётся *обратный элемент* $b \ \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, такой, что $a \cdot b = 1$ (его обычно обозначают через a^{-1}).

Отметим, что эти свойства означают, что множество действительных чисел является *абелевой группой по сложению*, а множество всех действительных чисел без нуля является *абелевой группой по умножению.*

9) Для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *дистрибутивности*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Множества, на котором выполнены эти девять свойств, называется *полем.* Помимо этих девяти свойств есть ещё два.

10) Для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ либо $a \le b$, либо $b \le a$, то есть любые два элемента $\mathbb{R}$ можно сравнить (множество, где сравнимы любые два элемента, называется *линейно упорядоченным*). При этом выполнены два свойства:

а) для всех $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, таких, что $a \le b$ выполнено $a + c \le b + c$;

б) для всех $a,\ b \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R},\ c \ge 0$ таких, что $a \le b$ выполнено $a \cdot c \le b \cdot c$.

11) На множестве вещественных чисел выполнен принцип полноты.

Билет 4. *Аксиома Архимеда и следствие из аксиомы Архимеда (Лемма 1, Лекция 1).*

Аксиома 4.1. ***(Аксиома Архимеда).*** *Для любого положительного вещественного числа a существует такое натуральное число n, что $na \geq 1$ (с помощью кванторов: $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \wedge a > 0 \exists\, n \in \mathbb{N} :\ na \geq 1$).*

Из аксиомы Архимеда вытекает полезное следствие.

Лемма 4.1. *1)* $\forall x,\ y \in \mathbb{R} :\ x < y\ \exists\, m/n \in \mathbb{Q} :\ x < \frac{m}{n} < y$; *2)* $\forall x,\ y \in \mathbb{R} :\ x < y\ \exists\, c \in \mathbb{I} :$ $x < c < y$.

Более просто свойство 1) формулируется так: между любыми двумя различными действительными числами лежит рациональное число. В свойстве 2) речь идёт об иррациональном числе.

Билет 5. *Система и последовательность вложенных и стягивающихся отрезков и лемма о вложенных отрезках.*

Определение 5.1. *1) Системой вложенных отрезков называется множество M, состоящее из отрезков, в котором для любых I_1, $I_2 \in M$ выполнено либо условие $I_1 \subset I_2$, либо условие $I_2 \subset I_1$.*
2) Если при этом в M все отрезки занумерованы, и любой отрезок с большим номером содержится в любом отрезке с меньшим номером, то множество M называют ***последовательностью вложенных отрезков.***

Определение 5.2. *Последовательность вложенных отрезков называется стягивающейся, если для любого числа $\varepsilon > 0$ в этой последовательности найдётся отрезок, длина которого меньше ε.*

Теорема 5.1. ***(Лемма о вложенных отрезках)*** *1) Пусть дана система M вложенных отрезков. Тогда существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что для любого отрезка $I \in M$ имеем $c \in I$, то есть все отрезки множества M имеют общий элемент c.*
2) Если множество M является последовательностью стягивающихся отрезков, то элемент c единственен.

Билет 6. *Определение числовой последовательности и определение предела последовательности (оба варианта, то есть определения 1 и 2, Лекция 3).*

Определение 6.1. *Функция, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, определённая на множестве натуральных чисел и принимающая значения во множестве действительных чисел, называется числовой последовательностью. Значения $f(n)$ функции f обозначают a_n. Последовательность также часто обозначают $\{a\}_{n=1}^{\infty}$, отождествляя её с множеством её значений.*

Определение 6.2. *Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любой окрестности точки A существует такое натуральное число N, что при всех натуральных $n > N$ числа a_n лежат в этой окрестности. На языке кванторов это определение запишется так:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall U(A) \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ a_n \in U(A).$$

Определение 6.3. *Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. На языке кванторов это определение запишется так:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Билет 7. *Единственность предела последовательности, определение ограниченной последовательности, ограниченность сходящейся последовательности и лемма об отделимости.*

Лемма 7.1. *Пусть у последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существует предел. Тогда этот предел единственен.*

Определение 7.1. *Последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *называется ограниченной, если существуют такие числа* $c, C \in \mathbb{R}$, *что* $c \leq a_n \leq C$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$. *Равносильным определением будет следующее: последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *называется ограниченной, если существует такое число* $M > 0$, *что* $|a_n| \leq M$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 7.2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Лемма 7.3. *(**Лемма об отделимости**). Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *и* $A \neq 0$. *Тогда существует такое натуральное число* N, *что для всех* $n > N$ *выполнено неравенство* $|a_n| > \frac{|A|}{2}$.

Билет 8. *Арифметика пределов, переход к пределу в неравенстве и лемма о зажатом пределе.*

Теорема 8.1. ***(Арифметика пределов).*** *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. *Тогда:*

1) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\beta\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\alpha A+\beta B$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} b_n=A\cdot B$;

3) если $B\neq 0$, $b_n\neq 0$ *при всех натуральных* n, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\frac{A}{B}$.

Лемма 8.1. ***(Переход к пределу в неравенстве).*** *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n = B,$$

а также существует такое натуральное n_0, *что* $a_n\le b_n$ *при всех* $n>n_0$. *Тогда* $A\le B$.

Теорема 8.2. ***(Лемма о зажатом пределе).*** *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=A$ *и* $a_n\le c_n\le b_n$, *начиная с некоторого натурального* n. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=A$.

Билет 9. *Определение бесконечно малой последовательности, свойство произведения бесконечно малой последовательности на ограниченную и определение предела в терминах бесконечно малых последовательностей.*

Определение 9.1. *Последовательность* $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малая, если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Лемма 9.1. *Если последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малая, а последовательность* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограниченная, то последовательность* $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малая.*

Определение 9.2. *Число* A *называется пределом последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *если существует такая бесконечно малая последовательность* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, *что* $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = A + \alpha_n$.

Билет 10. *Определение верхних и нижних граней, а также два определения точной верхних и нижних граней (Определения 1 и 2, Лекция 4). Существование точной верхней и нижней граней ограниченного множества.*

Определение 10.1. *Пусть дано непустое подмножество A множества действительных чисел. Число C называется верхней гранью множества A, если $a \le C$ при всех $a \in A$. Если множество A имеет хотя бы одну верхнюю грань, то оно называется ограниченным сверху. Наименьшая из верхних граней множества A (если она существует) называется его точной верхней гранью и обозначается $\sup A$ (читается: супремум.)*

Число c называется нижней гранью множества A, если $a \ge c$ при всех $a \in A$. Если множество A имеет хотя бы одну нижнюю грань, то оно называется ограниченным снизу. Наибольшая из нижних граней множества A (если существует) называется его точной нижней гранью и обозначается $\inf A$ (читается: инфимум.)

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным.

Определение 10.2. *Число C называется точной верхней гранью множества A, если:*
1) $a \le C$ для всех $a \in A$;
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a > C - \varepsilon$.

Теорема 10.1. *Пусть множество A непусто и ограничено сверху. Тогда существует $\sup A$.*

Билет 11. *Определение монотонной последовательности. Теорема Вейерштрасса для последовательностей. Определение числа* e.

Определение 11.1. *Последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *называется неубывающей, если* $a_n \leq a_{n+1}$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и невозрастающей, если* $a_n \geq a_{n+1}$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$. *Невозрастающая или неубывающая последовательность называется* ***монотонной.***

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *называется возрастающей, если* $a_n < a_{n+1}$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и убывающей, если* $a_n > a_{n+1}$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$. *Возрастающая или убывающая последовательность называется* ***строго монотонной.***

Теорема 11.1. *(Вейерштрасс). Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.*

Теорема 11.2. *Последовательность* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел.*

Определение 11.2. *Числом* e *называют предел последовательности* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, *то есть по определению полагают* $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Билет 12. *Определение того, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$*. Теорема о сходимости к e последовательностей более общего вида (Предложение 1, Лекция 5).*

Определение 12.1. *Говорят, что* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *если*

$$\forall M\ \exists N:\ \forall n > N\ a_n > M.$$

Теорема 12.1. *Пусть заданы последовательности* $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *и* $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$, *причём*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} q_n = -\infty.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e \text{ и } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

Билет 13. *Определение подпоследовательности и частичного предела. Частичные пределы последовательности, имеющей предел (Предложение 2, Лекция 5). Теорема Больцано – Вейерштрасса.*

Определение 13.1. *Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_m < \ldots$. Возьмём элементы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с номерами $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_m < \ldots$. Мы снова получим последовательность $b_k = a_{n_k}$, которая называется* ***подпоследовательностью*** *последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Число $a \in \mathbb{R}$ называется ***частичным пределом*** *последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если найдётся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой число a является пределом, то есть $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.*

Лемма 13.1. *Если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность сходится к тому же пределу.*

Теорема 13.1. ***(Больцано – Вейерштрасс.)*** *Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Билет 14. *Определение верхнего и нижнего предела последовательности. Структура множества частичных пределов (Теорема 3, Лекция 5). Критерий существования предела в терминах частичных пределов (Теорема 4, Лекция 5).*

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Рассмотрим последовательность

$$M_n = \sup_{k>n} a_k.$$

С увеличением n точная верхняя грань не может увеличиться, так как супремум множества $\{a_{n+1},\ a_{n+2},\ ...\}$, равный M_n нее меньше, чем супремум множества $\{a_{n+2},\ a_{n+3},\ ...\}$, который равен M_{n+1}. Таким образом, последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает. Кроме того, $M_n \geq a_k$ при всех натуральных $k > n$, что в силу ограниченности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ означает, что последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу. Следовательно по теореме Вейерштрасса последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел. Аналогично доказывается, что последовательность $m_n = \inf\limits_{k>n} a_k$ имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, а $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = m$.

Определение 14.1. *Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Тогда число M называют* ***верхним пределом*** *последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, а число m –* ***нижним пределом*** *этой последовательности. Соответствующие обозначения: $M := \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $m := \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Теорема 14.1. *Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ являются частичными пределами этой последовательности и все частичные пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежат отрезку $[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n, \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n]$.*

Теорема 14.2. *Ограниченная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда у неё только один частичный предел.*

Билет 15. *Определение фундаментальной последовательности. Формулировка критерия Коши.*

Определение 15.1. *Последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для всякого числа* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое число* $N \in \mathbb{N}$, *что при всех* $n,\ m > N$ *выполняется неравенство* $|a_n - a_m| < \varepsilon$. *Более коротко:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n,\ m > N\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Теорема 15.1. ***(Критерий Коши.)*** *Последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет предел* ***тогда и только тогда****, когда она фундаментальна.*

Билет 16. *Определение числового ряда, частичной суммы, последовательности частичных сумм и суммы ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимый признак сходимости ряда.*

Определение 16.1. *Если задана числовая последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *то сумма*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется ***числовым рядом****. Сумма* $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *называется* $n-$*ой* ***частичной суммой*** *ряда. Последовательность* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется* ***последовательностью частичных сумм*** *ряда.*

Определение 16.2. *Если последовательность частичных сумм имеет предел, то есть существует такое действительное число* S, *что* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, *то говорят, что ряд сходится, а число* S *называют* ***суммой ряда****. Если последовательность частичных сумм не имеет предела или имеет бесконечный предел, то говорят, что ряд расходится.*

Теорема 16.1. ***(Критерий Коши сходимости ряда.)*** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое натуральное число* N, *что при любом* $n > N$ *и любом* $p \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Лемма 16.1. ***(Необходимый признак сходимости ряда).*** *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Билет 17. *Абсолютная и условная сходимость ряда. Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами.*

Определение 17.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется* ***условно сходящимся****.*

Лемма 17.1. *Если* $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда ограничена последовательность его частичных сумм.*

Билет 18. *Признак сравнения. Признак сравнения в предельной форме. Мажорантный признак Вейерштрасса. Признак разрежения Коши.*

Теорема 18.1. ***(Признак сравнения).*** *Пусть при всех натуральных n, начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $0 \le a_n \le b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Теорема 18.2. ***(Признак сравнения в предельной форме).*** *Пусть при всех натуральных n, начиная с некоторого числа $N \in \mathbb{N}$, выполнены неравенства $a_n \ge 0$, $b_n > 0$, а также $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, причём $A \in (0, +\infty)$. Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ или оба сходятся, или оба расходятся.*

Лемма 18.1. ***(Мажорантный признак Вейерштрасса).*** *Пусть при всех натуральных n, начиная с некоторого числа $N \in \mathbb{N}$, выполнены неравенства $b_n \ge |a_n|$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

Теорема 18.3. ***(Признак разрежения Коши).*** *Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает и $a_n \ge 0$ при любом натуральном n, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Билет 19. *Признак Даламбера. Признак Коши.*

Теорема 19.1. ***(Признак Даламбера).*** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. *Тогда:*

1) если $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится;*

2) если $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*

3) если $q = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как абсолютно сходиться, так и расходиться (в том смысле, что он не сходится даже условно).*

Теорема 19.2. ***(Радикальный признак Коши).*** *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$. *Тогда:*

1) если $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится;*

2) если $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*

3) если $q = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *может как абсолютно сходиться, так и расходиться.*

Билет 20. *Определение покрытия. Принцип Бореля – Лебега. Предельная точка множества (оба определения). Принцип Больцано – Вейерштрасса.*

Определение 20.1. *Система множеств* $S = \{X\}$ *называется покрытием множества* Y*, если* $Y \subseteq \bigcup\limits_{X \in S} X$.

Теорема 20.1. *(**Принцип Бореля – Лебега.**) Пусть система интервалов* $S = \{J\}$ *является покрытием отрезка* $I = [a, b]$*. Тогда из системы* S *можно выбрать конечную подсистему, также являющуюся покрытием* I.

Определение 20.2. *Точка* a *называется предельной точкой множества* X*, если в любой окрестности точки* a *содержится бесконечно много элементов множества* X.

Определение 20.3. *Точка* a *называется предельной точкой множества* X*, если в любой проколотой окрестности точки* a *содержится хотя бы один элемент множества* X.

Теорема 20.2. *(**Принцип Больцано – Вейерштрасса.**) Пусть множество* X *бесконечно и ограничено. Тогда оно имеет хотя бы одну предельную точку.*

Билет 21. *Внутренняя, граничная и изолированная точка. Открытое и замкнутое множество. Критерий замкнутости множества (Предложение 2, лекция 9).*

Определение 21.1. *Пусть X – непустое множество. Точка a множества X называется* ***внутренней точкой*** *X, если существует такая её окрестность $U(a)$, что $U(a)$ содержится во множестве X.*

Точка b называется ***граничной точкой множества*** *X, если в любой её окрестности $U(b)$ содержатся как точки, принадлежащие множеству X, так и точки, не принадлежащие этому множеству.*

Точка c множества X называется ***изолированной точкой*** *X, если найдётся такая её окрестности $U(c)$, что в ней нет других точек из X, кроме c.*

Определение 21.2. *Множество X в $\mathbb{R}$ называется* ***открытым****, если оно состоит только из внутренних точек.*

Множество Y в $\mathbb{R}$ называется ***замкнутым****, если дополнение к нему до $\mathbb{R}$ открыто.*

Лемма 21.1. *Множество Y является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Лемма 21.2. *Пусть A – множество всех частичных пределов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Тогда A – замкнутое множество.*

Билет 22. *Определение предела по Коши (в том числе через окрестности). Определение предела при $x \to +\infty$. Определение предела по Гейне. Эквивалентность определений по Коши и Гейне.*

Определение 22.1. *(**Определение предела по Коши**). Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и пусть a – предельная точка множества E. Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого такого $x \in E$, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \wedge \ 0 < |x - a| < \delta \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 22.2. *(**Определение предела через окрестности**). Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E, если для любой ε-окрестности $V_\varepsilon(A)$ точки A существует такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta\ (a)$ точки a, что для любого $x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta\ (a)$ выполнено $f(x) \in V_\varepsilon(A)$, то есть выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, V_\varepsilon(A) \ \exists \ \overset{\circ}{U}_\delta\ (a) : \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta\ (a) \ f(x) \in \ V_\varepsilon(A).$$

Итак, для любой ε-окрестности точки A найдётся проколотая δ-окрестность точки a, образ пересечения которой со множеством E при функции f содержится в ε-окрестности точки A.

Определение 22.3. *Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Число A называется пределом функции f при $x \to +\infty$ по множеству E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого такого $x \in E$, что $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \ \forall x \in E \wedge \ x > \delta \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 22.4. *(**Определение предела по Гейне**). Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и пусть a – предельная точка множества E. Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E, если для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, такой, что $a_n \in E, a_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ при $n \to \infty$, выполняется равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = A$. Запись с помощью кванторов:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \ \Leftrightarrow \ \forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \ a_n \in E \setminus \{a\} \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n \to \infty} a_n = a \ \lim_{n \to \infty} f(a_n) = A.$$

Теорема 22.1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *в смысле Коши* $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *в смысле Гейне.*

Билет 23. *Свойства предела (Теорема 2, Лекция 10).*

Теорема 23.1. *Пусть функции f, g и h определены на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка множества E. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда:*

1) *A – единственный предел функции f (**единственность предела**);*

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;

4) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = A/B$ *($g(x) \neq 0\ \forall x \in E$, $B \neq 0$) (**арифметика предела**);*

5) *если $f(x) \leq g(x)$ в пересечении некоторой проколотой окрестности точки a и множества E, то $A \leq B$ (**предельный переход в неравенствах**);*

6) *если существует такая $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, что $f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ и $A = B$, то $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$ (**лемма о зажатом пределе**);*

7) *существуют такие $\delta > 0$ и $C \geq 0$, что $|f(x)| \leq C\ \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ (**ограниченность функции, имеющей предел**);*

8) *если $A \neq 0$, то существует такая $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, что $|f(x)| \geq \frac{|A|}{2}\ \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ (**лемма об отделимости**).*

Билет 24. *Теорема о пределе композиции. Эквивалентные функции.*

Теорема 24.1. ***(Теорема о пределе композиции).*** *Пусть функция g определена на множестве D, b – предельная точка множества D и*

$$\lim_{y \to b} g(y) = A \ (y \in D).$$

Пусть функция $f: \ E \to D$, a – предельная точка множества E и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \ (x \in E)$. Пусть, наконец, для некоторого $\delta > 0$ при всех x из множества $E \cap \overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ выполнено $f(x) \neq b$. Тогда сложная функция $g \circ f$ определена на множестве E и $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = A$.

Определение 24.1. *Пусть функция g определена и не равна нулю на множестве E, f определена на множестве E, a – предельная точка множества E. Говорят, что функции f и g* ***эквивалентны*** *при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Обозначение: $f \sim g, \ x \to a$.*

Билет 25. *Критерий Коши существования предела функции.*

Теорема 25.1. *(**Критерий Коши.**) Пусть функция f определена на множестве E, a – предельная точка множества E. Функция f имеет предел в точке a **тогда и только тогда**, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых чисел $x, y \in E$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. С помощью кванторов:*

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \, \forall \, x, y \in \overset{\circ}{U}_{\delta} \, (a) \cap E \, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Билет 26. *Определение односторонних пределов. Определение монотонной функции. Определение ограниченной функции. Теорема Вейерштрасса для монотонной функции.*

Определение 26.1. *Пусть a – предельная точка множества E_a^+. Число A называется* ***пределом справа*** *функции f в точке a, если*

$$\lim_{E_a^+ \ni x \to a} f(x) = a,$$

то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E_a^+ \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ или $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$. Аналогично определяется ***предел слева*** *функции f в точке a, обозначаемый $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$ только множество E_a^+ в определении заменяется на E_a^-. Пределы справа и слева называются также* ***односторонними пределами.***

Определение 26.2. *Если для любых таких $x_1, x_2 \in E$, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция f называется* ***неубывающей*** *на множестве E. Если выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется* ***возрастающей*** *на множестве E. Если выполнены противоположные неравенства, то функция называется соответственно* ***невозрастающей*** *и* ***убывающей*** *на множестве E. Функция любого из четырёх указанных видов называется* ***монотонной*** *на множестве E функцией.*

Определение 26.3. *Функция f называется ограниченной на множестве M, если она определена на этом множестве и существует такая константа $C > 0$, что $|f(x)| \le C$ при всех $x \in E$.*

Теорема 26.1. *(**Теорема Вейерштрасса**). 1) Пусть функция f определена на множестве E и a – предельная точка множества E_a^-. Пусть f не убывает и ограничена сверху на множестве E_a^-. Тогда существует предел слева функции f в точке a и имеет место равенство $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \sup\limits_{x \in E_a^-} f(x)$.*

2) Пусть функция f не убывает и ограничена на множестве E. Пусть a – предельная точка множества E_a^+. Тогда существует предел справа функции f в точке a и имеет место равенство $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \inf\limits_{x \in E_a^+} f(x)$.

Билет 27. *Определение бесконечно малой функции.*

Определение 27.1. *Функция* $f : E \to \mathbb{R}$ *называется бесконечно малой при* $x \to a$, *где* a *является предельной точкой множества* E, *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ *(или* $-\infty$, *или* $+\infty$*), то функция* $f(x)$ *называется бесконечно большой при* $x \to a$. *Везде* $x \in E$.

Билет 28. *Определение o-малого (Определение 5, Лекция 12). o-малое в терминах пределов (Предложение 1, Лекция 12).*

Определение 28.1. *Пусть функции f и g определены на множестве E, a – предельная точка множества E. Говорят, что функция f является бесконечно малой по сравнению с функцией g при $x \to a$, если $f(x) = h(x)g(x)$ и h – бесконечно малая функция при $x \to a$. Если при этом сами функции f и g являются бесконечно малыми при $x \to a$, то говорят, что функция f –* ***бесконечно малая более высокого порядка*** *по сравнению с g при $x \to a$. Тот факт, что f является бесконечно малой по сравнению с g при $x \to a$, записывают в виде $f = o(g)$, $x \to a$ (читается "f равно o-малое от g при x, стремящемся к a"). Запись $f = o(1)$, $x \to a$ означает, что f является бесконечно малой функцией при $x \to a$. Таким образом, запись $f = o(g)$, $x \to a$ равносильна $f = o(1)g$, $x \to a$.*

Лемма 28.1. *Запись $f = o(g)$, $x \to a$ равносильна также тому, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (при этом считаем, что $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a).*

Билет 29. *Асимптотические равенства 1 – 8 (Лекция 12). Асимптотические равенства 9 - 13.*

$$\sin x = x + o(x),\ x \to 0. \tag{1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),\ x \to 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x),\ x \to 0, \tag{3}$$

$$\arcsin x = x + o(x),\ x \to 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x),\ x \to 0, \tag{5}$$

$$e^x = 1 + x + o(x),\ x \to 0, \tag{6}$$

$$\ln(1+x) = x + o(x),\ x \to 0, \tag{7}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x),\ x \to 0,\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n),\ x \to 0; \tag{9}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}),\ x \to 0; \tag{10}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0; \tag{11}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n),\ x \to 0; \tag{12}$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n),\ x \to 0\ (\alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{13}$$