

**Билет 1.** Шесть определений непрерывной функции.

**Определение 1.1.** Пусть функция  $f$  определена на множестве  $E$ , точка  $a \in E$ . Функция  $f$  называется непрерывной в точке  $a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что при всех таких  $x \in E$ , что  $|x - a| < \delta$   $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Определение 1.2.** Таким образом, определение непрерывной в точке  $a$  функции можно записать и так: функция  $f$  называется непрерывной в точке  $a$ , если точка  $a$  является изолированной точкой множества  $E$ , либо если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  ( $x \in E$ ).

**Определение 1.3.** Так как стремление  $x$  к  $a$  происходит только по точкам множества  $E$ , то определение непрерывности допускает ещё одну формулировку: функция  $f$  называется непрерывной в точке  $a$ , если точка  $a$  является изолированной точкой множества  $E$ , либо если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$  ( $x \in E$ ).

**Определение 1.4.** Учитывая определение бесконечно малой функции, мы можем записать определение непрерывности так: функция  $f$  называется непрерывной в точке  $a$ , если точка  $a$  является изолированной точкой множества  $E$ , либо если

$$f(x) = f(a) + \alpha(x)$$

где  $\alpha(x)$  - бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ ,  $\alpha(a) = 0$  ( $x \in E$ ).

**Определение 1.5.** В терминах окрестностей определение непрерывности примет вид: функция  $f$  называется непрерывной в точке  $a$ , если точка  $a$  является изолированной точкой множества  $E$ , либо если для любого  $\varepsilon > 0$  справедливо следующее условие:  $\varepsilon$ -окрестность точки  $f(a)$  содержит образ некоторой окрестности точки  $a$  при функции  $f$  ( $x \in E$ ) (определение непрерывности 5).

**Определение 1.6.** Если попытаться определить непрерывную функцию с помощью определения предела по Гейне, то можно отказаться от того, что рассматриваются только последовательности, не принимающие значение  $a$ . Итак, используя определение предела по Гейне и его равносильность определению по Коши, получим ещё одно определение непрерывной функции: функция  $f$  называется непрерывной в точке  $a$ , если для любой такой последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , что  $a_n \in E$ ,  $a_n \rightarrow a$ ,  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$  (определение непрерывности 6).

Отметим, что указывать отдельно на случай изолированной точки здесь не нужно, так как если последовательность со значениями во множестве  $E$  стремится к изолированной точке  $a$ , то существует такое натуральное  $N$ , что  $a_n = a$  при всех  $n > N$ .

**Билет 2.** *Определение непрерывности в точке справа и слева. Критерий непрерывности в терминах непрерывности слева и справа (Предложение 1, Лекция 13).*

**Определение 2.1.** *Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется непрерывной справа в точке  $a \in E$ , предельной для  $E_a^+$ , если  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ , и непрерывной слева, если  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$  (здесь точка должна являться предельной для  $E_a^-$ .)*

**Предложение 2.1.**  $f \in C(a) \Leftrightarrow f$  непрерывна в  $a$  справа и слева, причём

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

**Билет 3.** Локальные свойства непрерывных функций.

**Предложение 3.1.** (Локальные свойства непрерывных функций). Пусть функции  $f$  и  $g$  определены на множестве  $E, a \in E, f \in C(a), g \in C(a)$ . Тогда выполнены следующие свойства: 1)  $\alpha f + \beta g \in C(a) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (линейная комбинация непрерывных в точке функций является непрерывной в этой точке функцией); 2)  $f \cdot g \in C(a)$  (произведение непрерывных в точке функций является функцией, непрерывной в этой точке); 3) если  $g(x) \neq 0 \forall x \in E$ , то  $\frac{f}{g} \in C(a)$  (частное непрерывных в точке функций является функцией, непрерывной в этой точке); 4)  $\exists M \geq 0, \delta > 0 : \forall x \in E \cap U_\delta(a) |f(x)| \leq M$  (для непрерывной в точке функции найдётся окрестность этой точки, в которой функция ограничена); 5) если  $f(a) \neq 0$ , то существует такая окрестность  $U_\delta(a)$  точки  $a$ , что

$$|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2} \forall x \in E \cap U_\delta(a),$$

причём для таких  $x f(x) \cdot f(a) > 0$ , то есть функция  $f$  совпадает по знаку с  $f(a)$ .

**Билет 4.** Теорема о композиции непрерывных функций. Точка разрыва.

**Предложение 4.1.** (Теорема о композиции непрерывных функций). Пусть множества  $E, D$  и  $K$  содержатся в  $\mathbb{R}$ ,  $f : E \rightarrow D$ ,  $g : D \rightarrow K$ . Пусть  $a \in E$ ,  $f(a) \in D$ , и  $f \in C(a)$ ,  $g \in C(f(a))$ . Тогда функция  $g \circ f : E \rightarrow K$  непрерывна в точке  $a$  (здесь  $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ ).

**Определение 4.1.** Если функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  не является непрерывной в точке  $a \in E$ , то эта точка называется точкой разрыва функции  $f$ .

**Билет 5.** Устранимый разрыв, разрыв первого рода и разрыв второго рода. Разрывы монотонной на интервале функции. Определение непрерывной на множестве функции.

Во-первых, предел в точке  $a \in E$  у функции  $f$  может существовать, но не быть равным  $f(a)$ . В этом случае достаточно определить функцию  $f$  в точке  $a$  её пределом в этой точке, чтобы функция стала непрерывной, поэтому такая точка называется **точкой устранимого разрыва**. Примером функции с точкой устранимого разрыва может служить  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ , если  $x \neq 0$  и  $f(0) = 0$ , где  $a = 0$ . Эта функция в точке  $a = 0$  имеет значение 0, а предел при  $x \rightarrow 0$  равен 1, поэтому достаточно положить  $f(0) = 1$ , чтобы функция  $f$  стала непрерывной в точке 0.

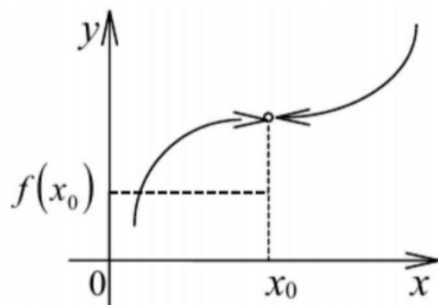


Рис. 1: Устранимый разрыв в точке  $a = x_0$ .

Во-вторых, в точке  $a \in E$  у функции может не быть предела, но при этом существуют оба односторонних предела (см. предыдущую лекцию), которые не равны друг другу. В этом случае точка  $a$  называется **точкой разрыва первого рода**. Иногда такой разрыв называют **скачком**. Примером функции с такой точкой разрыва может служить кусочно заданная функция  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$  Точка  $a = 0$  является точкой разрыва первого рода. См. также рис. 2.

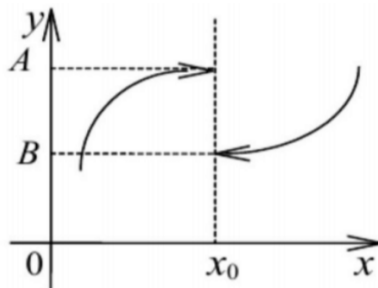


Рис. 2: Скачок величины  $|BA|$ .

В-третьих, хотя бы один из односторонних пределов в точке  $f \in E$  может не существовать или быть равным  $\pm\infty$  (то есть либо  $+\infty$ , либо  $-\infty$ , либо просто  $\infty$ .) Такая точка называется **точкой разрыва второго рода**. Точку разрыва этого типа имеет в нуле гипербола  $f(x) = \frac{1}{x}$  (если доопределить её в нуле любым действительным числом), так как  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$

**Предложение 5.1.** Монотонная на интервале функция может иметь на этом интервале только разрывы первого рода.

**Определение 5.1.** Функция  $f$ , определённая на множестве  $E$ , называется непрерывной на  $E$ , если она непрерывна в каждой точке  $E$ .

**Билет 6.** Теорема о нуле непрерывной на отрезке функции (Теорема 1, Лекция 13). Определение ограниченной на множестве функции. 1-я теорема Вейерштрасса.

**Теорема 6.1.** Пусть функция  $f \in C([a, b])$  и  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Тогда  $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$ .

Напомним, что функция  $f$ , определённая на множестве  $E$ , называется ограниченной на этом множестве, если  $\exists C \geq 0 : |f(x)| \leq C \forall x \in E$ .

**Теорема 6.2.** (1-я теорема Вейерштрасса.) Пусть функция  $f$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда она ограничена на этом отрезке.

**Билет 7.** 2-я теорема Вейерштрасса Теорема Больцано – Коши о промежуточном значении.

**Теорема 7.1.** (2-я теорема Вейерштрасса.) Пусть функция  $f$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда существуют такие точки  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , что

$$f(x_1) = m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), f(x_2) = M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

**Теорема 7.2.** (Коши о непрерывной функции.) Пусть функция  $f$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,  $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$ ,  $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ . Тогда для любого числа  $C \in [m, M]$  существует такая точка  $c \in [a, b]$ , что  $f(c) = C$ .

**Билет 8.** *Определение равномерной непрерывности. Теорема Гейне – Кантора.*

**Определение 8.1.** *Функция  $f$ , определенная на множестве  $E$ , называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при всех таких  $x_1, x_2 \in E$ , что  $|x_1 - x_2| < \delta$ , выполнено неравенство*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

**Теорема 8.1.** *(Гейне – Кантора о равномерной непрерывности). Функция  $f$ , непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , равномерно непрерывна на этом отрезке.*



**Билет 9.** Обратная функция. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема об обратной функции.

**Определение 9.1.** Пусть функция  $f : E \rightarrow D$  осуществляет биекцию между  $E$  и  $D$ . Если каждому  $y \in D$  поставить в соответствие то  $x \in E$ , для которого  $f(x) = y$ , то тем самым будет определена функция, отображающая множество  $D$  во множество  $E$ . Она называется **обратной** для функции  $f$  и обозначается  $f^{-1}$ . Таким образом,  $f^{-1} : D \rightarrow E$ .

**Теорема 9.1. (Критерий непрерывности монотонной функции).** Монотонная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$ , непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда множеством её значений является отрезок с концами  $f(a)$  и  $f(b)$ .

**Теорема 9.2. (Теорема об обратной функции.)** Пусть функция  $f$  непрерывна и строго монотонна (то есть возрастает или убывает) на отрезке  $[a, b]$ . Тогда функция  $f$  имеет обратную функцию  $f^{-1}$ , определенную на отрезке с концами  $f(a)$  и  $f(b)$ , причём  $f^{-1}$  строго монотонна и непрерывна на отрезке с концами  $f(a)$  и  $f(b)$  и характер монотонности функций  $f$  и  $f^{-1}$  одинаковый.

**Билет 10.** Определение дифференцируемой функции. Определение дифференциала. Дифференциал как линейная функция (Лекция 16).

**Определение 10.1.** Функция  $f$ , определённая в некоторой окрестности точки  $a$ , называется **дифференцируемой** в точке  $a$ , если существуют такие число  $A$  и функция  $\alpha$ , что при всех  $h$  из некоторой проколотой окрестности нуля выполнено равенство

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)h, \quad (1)$$

где  $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$ . При этом  $A$  и  $\alpha$  зависят и от точки  $a$ , поэтому часто равенство (1) записывают в виде

$$f(a+h) - f(a) = A(a)h + \alpha(a, h)h.$$

**Определение 10.2.** Функция  $h \mapsto Ah$  называется **дифференциалом** функции  $f$  в точке  $a$ . Она обозначается  $df(a)$  или  $df|_{x=a}$ , то есть  $df(a)(h) = df(h)|_{x=a} = Ah$ .

Ещё раз подчеркнём, что равенство записано в фиксированной точке  $a$ , то есть оно зависит от точки  $a$ . Другими словами, число  $A$ , вообще говоря, разное при разных  $a$ .

Здесь символ  $df(a)$  нужно воспринимать как обозначение функции, то есть как *цельный* символ.

Отметим два очевидных наблюдения для функции  $h \mapsto Ah$  : во-первых

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad df(a)(\lambda h) = A\lambda h = \lambda Ah,$$

а во-вторых

$$df(a)(h_1 + h_2) = A(h_1 + h_2) = Ah_1 + Ah_2.$$

Так как здесь  $A$  – число, то свойства очевидны. Однако позже мы увидим, что дифференциал функции многих переменных также обладает аналогичными свойствами. Выполнение этих свойств по определению означает, что *дифференциал является линейной функцией от  $h$* .

**Билет 11.** Определение производной. Связь дифференцируемости и производной (Предложение 1, Лекция 16). Определение касательной.

**Определение 11.1.** Если существует предел  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ , то он называется производной функции  $f$  в точке  $a$ . Другая форма записи предела:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ . Производная функции  $f$  в точке  $a$  обозначается символом  $f'(a)$  или  $\frac{df}{dx}(a)$  (второе обозначение позже обсудим подробно).

**Предложение 11.1.** Функция  $f$  дифференцируема в точке  $a$  тогда и только тогда, когда в точке  $a$  существует производная этой функции  $f'(a)$ . При этом  $df(h)|_{x=a} = f'(a)h$ .

Изучим геометрическую интерпретацию производной и дифференциала. Из равенства  $h = x - a$  получим, что дифференцируемая функция может быть записана в виде  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \alpha(x)(x-a)$ , где  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ . Это значит, что в некоторой окрестности точки  $a$  функция  $f$  приближается функцией  $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ . Таким образом, локально (то есть в некоторой окрестности точки  $a$ ) график функции  $f$  выглядит "почти" как прямая. Сама прямая  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$  называется *касательной* к графику функции  $f$  в точке  $a$ . Производная  $f'(a)$  является тангенсом угла наклона касательной к положительному направлению оси  $Ox$ . На рисунке 1 красным цветом изображена касательная. Обра-

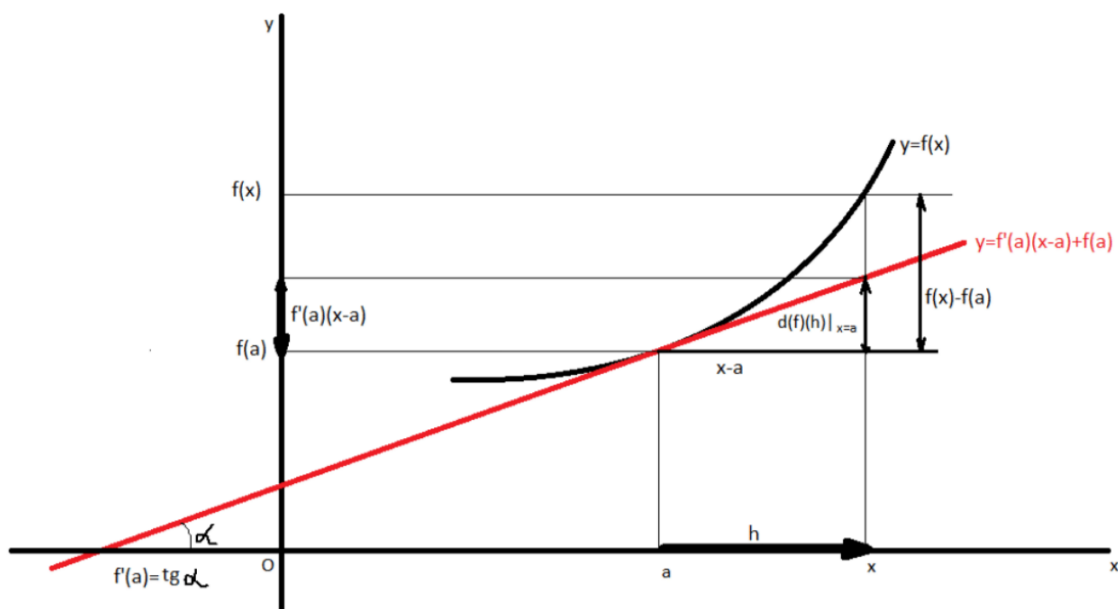


Рис. 3: Функция "сливается" с касательной.

тим внимание, что график функции и касательной неразличимы в некоторой окрестности. Приведём несколько примеров на вычисление производных с помощью определения производной.

**Билет 12.** Непрерывность дифференцируемой функции. Определение равномерной сходимости.

**Предложение 12.1.** Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $a$ . Тогда  $f$  непрерывна в точке  $a$ .

**Определение 12.1.** Функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  **сходится равномерно** к функции  $f(x)$  на множестве  $X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение:  $f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x)$ .

**Билет 13.** *Формулировка теоремы о равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Пример Вейерштрасса непрерывной, но недифференцируемой функции.*

**Теорема 13.1.** *(Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности).* Пусть  $X$  – область сходимости функциональной последовательности  $\{f_n\}$ . Пусть  $\forall n \in \mathbb{N} \ f_n(x) \in C(x_0)$ ,  $x_0 \in X$ . Пусть  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$ . Тогда  $f(x) \in C(x_0)$ .

С помощью теоремы о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности можно построить пример функции, которая в каждой точке непрерывна, но ни в одной точке не является дифференцируемой. Для этого рассмотрим следующую последовательность функций:

$$f_0(x) = \sin x, \quad f_1(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 8x, \quad f_2(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 64x, \quad \dots,$$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \sin 8^k x.$$

Покажем, что эта последовательность функций имеет предел при каждом  $x \in \mathbb{R}$ , то есть областью сходимости является вся вещественная прямая. Действительно, при фиксированном  $x$

$$\sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{2^k} \sin 8^k x \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \leq 2,$$

то есть частичные суммы ряда  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{2^k} \sin 8^k x \right|$  ограничены сверху, что по критерию сходимости для рядов с положительными коэффициентами означает сходимость ряда  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{2^k} \sin 8^k x \right|$ , то есть ряд  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \sin 8^k x$  сходится абсолютно, а значит, и сам этот ряд сходится, то есть по определению сходится его последовательность частичных сумм  $\{f_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ . Так как наши рассуждения справедливы для любого  $x \in \mathbb{R}$ , то функция

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin(8^k x)$$

определена для любых вещественных чисел. Кроме того,

$$|w(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \sin 8^k x \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n},$$

поэтому для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N = [\log_2(1/\varepsilon)]$ , что при всех  $n > N$  и при всех  $x \in \mathbb{R}$   $|w(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ , то есть  $f_n(x) \xrightarrow{X} w(x)$ . Все функции  $f_n(x)$  непрерывны, так как представляют собой суммы непрерывных синусов, поэтому по теореме 1  $w(x)$  непрерывна.

Можно доказать, что при этом функция  $w(x)$  ни в одной точке вещественной оси не является дифференцируемой.

Функция  $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(8^n x)$  называется **функцией Вейерштрасса**.

**Билет 14.** Формулировка правил дифференцирования. Теорема о производной сложной функции.

**Предложение 14.1.** Пусть функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $a$ . Тогда:

1) функция  $\alpha f + \beta g$  дифференцируема в точке  $a$  при любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

(свойство линейности);

2)  $f \cdot g$  дифференцируема в точке  $a$  и  $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$  (правило Лейбница);

3) если  $g \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $a$ , то  $\frac{f}{g}$  дифференцируема в точке  $a$  и  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$ .

**Предложение 14.2. (Производная сложной функции).** Пусть функция  $f$  дифференцируема в точке  $a$ , а функция  $g$  дифференцируема в точке  $f(a)$ . Тогда функция  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $a$  и  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ .

**Билет 15.** *Инвариантность формы первого дифференциала. Теорема о производной обратной функции.*

Пусть  $f$  дифференцируема в точке  $x$  и  $f(x) = y$ . Теорема о производной сложной функции тогда в терминах дифференциалов запишется так (в точке  $x$ ):

$$d(g \circ f)(x) = g'(f(x))f'(x)dx = g'(f(x))df(x) = g'(y)dy.$$

Таким образом, вне зависимости от того, является ли  $y$  независимой переменной или функцией, форма (то есть вид) первого дифференциала внешне не меняется. Это свойств дифференциала называется **инвариантностью формы первого дифференциала**.

**Предложение 15.1. (Производная обратной функции).** Пусть  $f$  – непрерывная и строго монотонная функция, отображающая интервал  $I$  в интервал  $J$ . Пусть также  $f$  дифференцируема в точке  $a \in I$  и  $f'(a) \neq 0$ . Тогда обратная функция  $f^{-1}$  дифференцируема в точке  $b = f(a)$  и  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ .

**Билет 16.** *Таблица производных.*

**1)**  $C' = 0 \forall C = const$ ; **2)**  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ; **3)**  $(e^x)' = e^x$ ; **4)**  $(a^x)' = a^x \ln a$ ; **5)**  $(\ln x)' = 1/x$ ;

**6)**  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ; **7)**  $(\sin x)' = \cos x$ ; **8)**  $(\cos x)' = -\sin x$ ; **9)**  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$ ;

**10)**  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}^2 x - 1$ ; **11)**  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; **12)**  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

**13)**  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ; **14)**  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ ; **15)**  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ ; **16)**  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ .



**Билет 17.** Определения локальных минимума и максимума и локального экстремума. Теорема Ферма.

**Определение 17.1.** Пусть  $\delta > 0$ ,  $U_\delta(a)$  -  $\delta$ -окрестность точки  $a$ . Если функция  $f$  определена на множестве  $E$ , точка  $a \in E$  и при всех  $x \in U_\delta(a) \cap E$ , выполнено неравенство  $f(x) \geq f(a)$ , то  $a$  называется точкой локального максимума. Если при тех же  $x \in U_\delta(a) \cap E$   $f(x) \leq f(a)$ , то  $a$  называется точкой локального минимума. Если неравенство строгое, то  $a$  называется точкой строгого локального максимума или строгого локального минимума соответственно. Точки максимума и минимума называются точками локального экстремума (если неравенства нестрогие), и точками строгого локального экстремума, если неравенства строгие.

**Теорема 17.1.** (Теорема Ферма). Пусть функция  $f$  определена на интервале  $(a, b)$ , дифференцируема в точке  $c \in (a, b)$  и имеет в точке  $c$  локальный экстремум. Тогда  $f'(c) = 0$ .

**Билет 18.** Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Геометрические смыслы этих теорем.

**Теорема 18.1.** (Теорема Ролля). Пусть:

- 1) Функция  $f$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .
- 2) Функция  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ .
- 3)  $f(a) = f(b)$ .

Тогда существует такая точка  $c \in (a, b)$ , что  $f'(c) = 0$ .

**Геометрический смысл теоремы Ролля** состоит в том, что при условиях теоремы обязательно найдётся точка, в которой касательная к графику функции  $f$  параллельна оси абсцисс (см. рисунок 2).

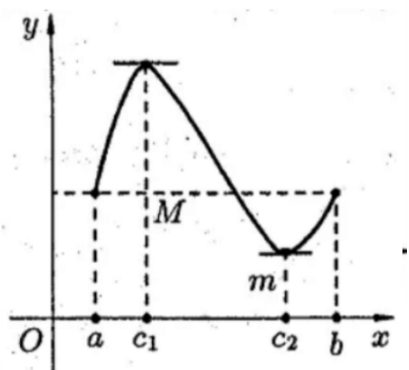


Рис. 4: Касательные параллельна оси  $Ox$ .

**Теорема 18.2.** (Теорема Лагранжа). Пусть:

- 1) Функция  $f$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .
- 2) Функция  $f$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ .

Тогда существует такая точка  $c \in (a, b)$ , что  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

**Геометрический смысл теоремы Лагранжа** будет лучше понятен, если саму формулу из теоремы (называемую также формулой конечных приращений) переписать в виде  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Справа стоит тангенс угла наклона прямой, которая называется секущей (см. рисунок 3), а слева - тангенс угла наклона касательной. Таким образом, в теореме утверждается, что для дифференцируемой на интервале и непрерывной на отрезке функции найдётся точка, в которой касательная к графику функции  $f$  будет параллельна секущей, проходящей через точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ .

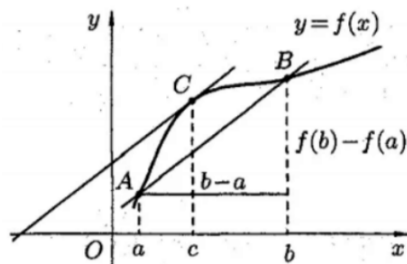


Рис. 5: Секущая  $AB$  параллельна касательной, проходящей через точку  $C$ .

**Билет 19.** Два следствия теоремы Лагранжа. Теорема Коши.

**Предложение 19.1.** (1-е следствие) Пусть функция  $f$  определена и дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ . Тогда функция  $f$  постоянна на  $(a, b)$ .

**Предложение 19.2.** (2-е следствие) Пусть функция  $f$  определена и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . 1) Функция  $f$  не убывает на этом интервале тогда и только тогда, когда

$$f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b).$$

2) Функция  $f$  не возрастает на этом интервале тогда и только тогда, когда

$$f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b).$$

**Теорема 19.1.** (Теорема Коши). Пусть функции  $f$  и  $g$  : 1) определены и непрерывны на отрезке  $[a, b]$ ; 2) дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ ; 3)  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ .

Тогда существует точка такая точка  $c \in (a, b)$ , что  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .