

Билет 1. Определение функции, сюръекции, инъекции и биекции.

Определение 1.1. Декартовым произведением $X \times Y$ множеств X и Y называют множество всевозможных пар (x, y) , где первый элемент x каждой пары принадлежит X , а второй ее элемент y принадлежит Y .

Определение 1.2. Функцией f , определённой на множестве X и принимающей значения во множестве Y , называется подмножество декартова произведения $X \times Y$, если выполнено следующее условие: $\forall x \in X \exists!$ пара $(x, y) \in f$. При этом пишут $y = f(x)$. Элемент y называют образом x , элемент x – прообразом элемента y , для функции принято обозначение $f : X \rightarrow Y$.

Множество $f(X)$ всех элементов $f(x) \in Y$ называется образом множества X . Короче, это записывается так:

$$f(X) = \{y \in Y | y = f(x), x \in X\},$$

а само X называется прообразом множества $f(X)$.

Определение 1.3. 1) Функция $f : X \rightarrow Y$ называется сюръекцией (накрытием), если для всякого $y \in Y$ существует такое $x \in X$, что $y = f(x)$.

2) Функция $f : X \rightarrow Y$ называется инъекцией (вложением), если из равенства $f(x) = f(y)$ следует, что $x = y$.

3) Функция, являющаяся одновременно сюръекцией и инъекцией, называется биекцией или взаимно-однозначным отображением.

Билет 2. Определение того, что множество A лежит левее множества B , разделяющего элемента и формулировка принципа полноты.

Определение 2.1. Говорят, что множество A лежит левее множества B , если $a \leq b$ для всяких $a \in A$ и $b \in B$.

Определение 2.2. Пусть множество A лежит левее B . Тогда говорят, что число c разделяет множества A и B , если $a \leq c$ и $c \leq b$ для всех $a \in A, b \in B$.

Определение 2.3. Говорят, что для числового множества выполняется принцип полноты, если для любых двух его подмножеств, одно из которых лежит левее другого, найдётся элемент, разделяющий эти множества.

Билет 3. *Определение множества вещественных чисел (с помощью 11 свойств) и формулировка принципа полноты для множества вещественных чисел.*

Множество действительных чисел, которое мы обозначим \mathbb{R} , должно удовлетворять ряду условий. Во-первых, сумма и произведение любых элементов этого множества снова является элементом этого множества. Кроме того, выполнены следующие свойства.

1) Для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *ассоциативности по сложению*:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

2) Для всех $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено условие *коммутативности по сложению*:

$$a + b = b + a.$$

3) Существует *нейтральный элемент относительно операции сложения* $0 \in \mathbb{R}$, такой, что для всех $a \in \mathbb{R}$ $a + 0 = a$.

4) Для всякого $a \in \mathbb{R}$ найдётся *противоположный элемент* $b \in \mathbb{R}$, такой, что $a + b = 0$ (его обычно обозначают через $-a$).

5) Для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *ассоциативности по умножению*:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

6) Для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *коммутативности по умножению*:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

7) Существует *нейтральный элемент относительно операции умножения* $1 \in \mathbb{R}$, такой, что для всех $a \in \mathbb{R}$ $a \cdot 1 = a$.

8) Для всякого $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ найдётся *обратный элемент* $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, такой, что $a \cdot b = 1$ (его обычно обозначают через a^{-1}).

Отметим, что эти свойства означают, что множество действительных чисел является *абелевой группой по сложению*, а множество всех действительных чисел без нуля является *абелевой группой по умножению*.

9) Для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$ выполнено условие *дистрибутивности*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Множества, на котором выполнены эти девять свойств, называется *полем*. Помимо этих девяти свойств есть ещё два.

10) Для всех $a, b \in \mathbb{R}$ либо $a \leq b$, либо $b \leq a$, то есть любые два элемента \mathbb{R} можно сравнить (множество, где сравнимы любые два элемента, называется *линейно упорядоченным*). При этом выполнены два свойства:

а) для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$, таких, что $a \leq b$ выполнено $a + c \leq b + c$;

б) для всех $a, b \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ таких, что $a \leq b$ выполнено $a \cdot c \leq b \cdot c$.

11) На множестве вещественных чисел выполнен принцип полноты.

Билет 4. Аксиома Архимеда и следствие из аксиомы Архимеда (Лемма 1, Лекция 1).

Аксиома 4.1. (Аксиома Архимеда). Для любого положительного вещественного числа a существует такое натуральное число n , что $na \geq 1$ (с помощью кванторов: $\forall a \in \mathbb{R} \wedge a > 0 \exists n \in \mathbb{N} : na \geq 1$).

Из аксиомы Архимеда вытекает полезное следствие.

Лемма 4.1. 1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \exists m/n \in \mathbb{Q} : x < \frac{m}{n} < y$; 2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \exists c \in \mathbb{I} : x < c < y$.

Более просто свойство 1) формулируется так: между любыми двумя различными действительными числами лежит рациональное число. В свойстве 2) речь идёт об иррациональном числе.

Билет 5. Система и последовательность вложенных и стягивающихся отрезков и лемма о вложенных отрезках.

Определение 5.1. 1) Системой вложенных отрезков называется множество M , состоящее из отрезков, в котором для любых $I_1, I_2 \in M$ выполнено либо условие $I_1 \subset I_2$, либо условие $I_2 \subset I_1$.

2) Если при этом в M все отрезки занумерованы, и любой отрезок с большим номером содержится в любом отрезке с меньшим номером, то множество M называют **последовательностью вложенных отрезков**.

Определение 5.2. Последовательность вложенных отрезков называется стягивающейся, если для любого числа $\varepsilon > 0$ в этой последовательности найдётся отрезок, длина которого меньше ε .

Теорема 5.1. (Лемма о вложенных отрезках) 1) Пусть дана система M вложенных отрезков. Тогда существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что для любого отрезка $I \in M$ имеем $c \in I$, то есть все отрезки множества M имеют общий элемент c .

2) Если множество M является последовательностью стягивающихся отрезков, то элемент c единственен.

Билет 6. Определение числовой последовательности и определение предела последовательности (оба варианта, то есть определения 1 и 2, Лекция 3).

Определение 6.1. Функция, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, определённая на множестве натуральных чисел и принимающая значения во множестве действительных чисел, называется числовой последовательностью. Значения $f(n)$ функции f обозначают a_n . Последовательность также часто обозначают $\{a\}_{n=1}^{\infty}$, отождествляя её с множеством её значений.

Определение 6.2. Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любой окрестности точки A существует такое натуральное число N , что при всех натуральных $n > N$ числа a_n лежат в этой окрестности. На языке кванторов это определение запишется так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall U(A) \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ a_n \in U(A).$$

Определение 6.3. Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. На языке кванторов это определение запишется так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Билет 7. Единственность предела последовательности, определение ограниченной последовательности, ограниченность сходящейся последовательности и лемма об отделимости.

Лемма 7.1. Пусть у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел. Тогда этот предел единственен.

Определение 7.1. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется ограниченной, если существуют такие числа $c, C \in \mathbb{R}$, что $c \leq a_n \leq C$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Равносильным определением будет следующее: последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется ограниченной, если существует такое число $M > 0$, что $|a_n| \leq M$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 7.2. Сходящаяся последовательность ограничена.

Лемма 7.3. (Лемма об отделимости). Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ и $A \neq 0$. Тогда существует такое натуральное число N , что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n| > \frac{|A|}{2}$.

Билет 8. Арифметика пределов, переход к пределу в неравенстве и лемма о зажатом пределе.

Теорема 8.1. (Арифметика пределов). Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$. Тогда:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha A + \beta B$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \cdot B$;

3) если $B \neq 0$, $b_n \neq 0$ при всех натуральных n , то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$.

Лемма 8.1. (Переход к пределу в неравенстве). Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B,$$

а также существует такое натуральное n_0 , что $a_n \leq b_n$ при всех $n > n_0$. Тогда $A \leq B$.

Теорема 8.2. (Лемма о зажатом пределе). Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ и $a_n \leq c_n \leq b_n$, начиная с некоторого натурального n . Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

Билет 9. Определение бесконечно малой последовательности, свойство произведения бесконечно малой последовательности на ограниченную и определение предела в терминах бесконечно малых последовательностей.

Определение 9.1. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Лемма 9.1. Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая, а последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная, то последовательность $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая.

Определение 9.2. Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует такая бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n = A + \alpha_n$.

Билет 10. Определение верхних и нижних граней, а также два определения точной верхней и нижней граней (Определения 1 и 2, Лекция 4). Существование точной верхней и нижней граней ограниченного множества.

Определение 10.1. Пусть дано непустое подмножество A множества действительных чисел. Число C называется верхней гранью множества A , если $a \leq C$ при всех $a \in A$. Если множество A имеет хотя бы одну верхнюю грань, то оно называется ограниченным сверху. Наименьшая из верхних граней множества A (если она существует) называется его точной верхней гранью и обозначается $\sup A$ (читается: супремум.)

Число c называется нижней гранью множества A , если $a \geq c$ при всех $a \in A$. Если множество A имеет хотя бы одну нижнюю грань, то оно называется ограниченным снизу. Наибольшая из нижних граней множества A (если существует) называется его точной нижней гранью и обозначается $\inf A$ (читается: инфимум.)

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным.

Определение 10.2. Число C называется точной верхней гранью множества A , если:

- 1) $a \leq C$ для всех $a \in A$;
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > C - \varepsilon$.

Теорема 10.1. Пусть множество A непусто и ограничено сверху. Тогда существует $\sup A$.

Билет 11. Определение монотонной последовательности. Теорема Вейерштрасса для последовательностей. Определение числа e .

Определение 11.1. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется неубывающей, если $a_n \leq a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и невозрастающей, если $a_n \geq a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Невозрастающая или неубывающая последовательность называется **монотонной**.

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется возрастающей, если $a_n < a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и убывающей, если $a_n > a_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Возрастающая или убывающая последовательность называется **строго монотонной**.

Теорема 11.1. (Вейерштрасс). Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема 11.2. Последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел.

Определение 11.2. Числом e называют предел последовательности $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, то есть по определению полагают $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Билет 12. Определение того, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. Теорема о сходимости к e последовательностей более общего вида (Предложение 1, Лекция 5).

Определение 12.1. Говорят, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, если

$$\forall M \exists N : \forall n > N \ a_n > M.$$

Теорема 12.1. Пусть заданы последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$, причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = -\infty.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

Билет 13. Определение подпоследовательности и частичного предела. Частичные пределы последовательности, имеющей предел (Предложение 2, Лекция 5). Теорема Больцано – Вейерштрасса.

Определение 13.1. Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_m < \dots$. Возьмём элементы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с номерами $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_m < \dots$. Мы снова получим последовательность $b_k = a_{n_k}$, которая называется **подпоследовательностью** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **частичным пределом** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если найдётся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой число a является пределом, то есть $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Лемма 13.1. Если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность сходится к тому же пределу.

Теорема 13.1. (Больцано – Вейерштрасс.) Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Билет 14. *Определение верхнего и нижнего предела последовательности. Структура множества частичных пределов (Теорема 3, Лекция 5). Критерий существования предела в терминах частичных пределов (Теорема 4, Лекция 5).*

Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Рассмотрим последовательность

$$M_n = \sup_{k > n} a_k.$$

С увеличением n точная верхняя грань не может увеличиться, так как супремум множества $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$, равный M_n не меньше, чем супремум множества $\{a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$, который равен M_{n+1} . Таким образом, последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает. Кроме того, $M_n \geq a_k$ при всех натуральных $k > n$, что в силу ограниченности последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ означает, что последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу. Следовательно по теореме Вейерштрасса последовательность $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел. Аналогично доказывается, что последовательность $m_n = \inf_{k > n} a_k$ имеет предел. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m$.

Определение 14.1. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена. Тогда число M называют **верхним пределом** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, а число m – **нижним пределом** этой последовательности. Соответствующие обозначения: $M := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, $m := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Теорема 14.1. Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ являются частичными пределами этой последовательности и все частичные пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежат отрезку $[\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n]$.

Теорема 14.2. Ограниченная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда у неё только один частичный предел.

Билет 15. Определение фундаментальной последовательности. Формулировка критерия Коши.

Определение 15.1. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n, m > N$ выполняется неравенство $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Более коротко:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Теорема 15.1. (Критерий Коши.) Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел *тогда и только тогда*, когда она фундаментальна.

Билет 16. Определение числового ряда, частичной суммы, последовательности частичных сумм и суммы ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимый признак сходимости ряда.

Определение 16.1. Если задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то сумма

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется **числовым рядом**. Сумма $S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ называется n -ой **частичной суммой** ряда. Последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется **последовательностью частичных сумм** ряда.

Определение 16.2. Если последовательность частичных сумм имеет предел, то есть существует такое действительное число S , что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то говорят, что ряд сходится, а число S называют **суммой ряда**. Если последовательность частичных сумм не имеет предела или имеет бесконечный предел, то говорят, что ряд расходится.

Теорема 16.1. (Критерий Коши сходимости ряда.) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N , что при любом $n > N$ и любом $p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Лемма 16.1. (Необходимый признак сходимости ряда). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Билет 17. Абсолютная и условная сходимость ряда. Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами.

Определение 17.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**.

Лемма 17.1. Если $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда ограничена последовательность его частичных сумм.

Билет 18. Признак сравнения. Признак сравнения в предельной форме. Мажорантный признак Вейерштрасса. Признак разрежения Коши.

Теорема 18.1. (Признак сравнения). Пусть при всех натуральных n , начиная с некоторого номера, выполнены неравенства $0 \leq a_n \leq b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 18.2. (Признак сравнения в предельной форме). Пусть при всех натуральных n , начиная с некоторого числа $N \in \mathbb{N}$, выполнены неравенства $a_n \geq 0$, $b_n > 0$, а также $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, причём $A \in (0, +\infty)$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ или оба сходятся, или оба расходятся.

Лемма 18.1. (Мажорантный признак Вейерштрасса). Пусть при всех натуральных n , начиная с некоторого числа $N \in \mathbb{N}$, выполнены неравенства $b_n \geq |a_n|$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Теорема 18.3. (Признак разрежения Коши). Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает и $a_n \geq 0$ при любом натуральном n , то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Билет 19. Признак Даламбера. Признак Коши.

Теорема 19.1. (Признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$. Тогда:

- 1) если $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится;
- 2) если $q > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;
- 3) если $q = 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может как абсолютно сходиться, так и расходиться (в том смысле, что он не сходится даже условно).

Теорема 19.2. (Радикальный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. Тогда:

- 1) если $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится;
- 2) если $q > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;
- 3) если $q = 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может как абсолютно сходиться, так и расходиться.

Билет 20. *Определение покрытия. Принцип Бореля – Лебега. Предельная точка множества (оба определения). Принцип Больцано – Вейерштрасса.*

Определение 20.1. Система множеств $S = \{X\}$ называется покрытием множества Y , если $Y \subseteq \bigcup_{X \in S} X$.

Теорема 20.1. (Принцип Бореля – Лебега.) Пусть система интервалов $S = \{J\}$ является покрытием отрезка $I = [a, b]$. Тогда из системы S можно выбрать конечную подсистему, также являющуюся покрытием I .

Определение 20.2. Точка a называется предельной точкой множества X , если в любой окрестности точки a содержится бесконечно много элементов множества X .

Определение 20.3. Точка a называется предельной точкой множества X , если в любой проколотой окрестности точки a содержится хотя бы один элемент множества X .

Теорема 20.2. (Принцип Больцано – Вейерштрасса.) Пусть множество X бесконечно и ограничено. Тогда оно имеет хотя бы одну предельную точку.

Билет 21. Внутренняя, граничная и изолированная точка. Открытое и замкнутое множество. Критерий замкнутости множества (Предложение 2, лекция 9).

Определение 21.1. Пусть X – непустое множество. Точка a множества X называется **внутренней точкой** X , если существует такая её окрестность $U(a)$, что $U(a)$ содержится во множестве X .

Точка b называется **граничной точкой** множества X , если в любой её окрестности $U(b)$ содержатся как точки, принадлежащие множеству X , так и точки, не принадлежащие этому множеству.

Точка c множества X называется **изолированной точкой** X , если найдётся такая её окрестности $U(c)$, что в ней нет других точек из X , кроме c .

Определение 21.2. Множество X в \mathbb{R} называется **открытым**, если оно состоит только из внутренних точек.

Множество Y в \mathbb{R} называется **замкнутым**, если дополнение к нему до \mathbb{R} открыто.

Лемма 21.1. Множество Y является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Лемма 21.2. Пусть A – множество всех частичных пределов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Тогда A – замкнутое множество.

Билет 22. Определение предела по Коши (в том числе через окрестности). Определение предела при $x \rightarrow +\infty$. Определение предела по Гейне. Эквивалентность определений по Коши и Гейне.

Определение 22.1. (Определение предела по Коши). Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и пусть a – предельная точка множества E . Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого такого $x \in E$, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \wedge 0 < |x - a| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 22.2. (Определение предела через окрестности). Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E , если для любой ε -окрестности $V_\varepsilon(A)$ точки A существует такая проколота δ -окрестность $\mathring{U}_\delta(a)$ точки a , что для любого $x \in E \cap \mathring{U}_\delta(a)$ выполнено $f(x) \in V_\varepsilon(A)$, то есть выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall V_\varepsilon(A) \exists \mathring{U}_\delta(a) : \forall x \in E \cap \mathring{U}_\delta(a) f(x) \in V_\varepsilon(A).$$

Итак, для любой ε -окрестности точки A найдётся проколота δ -окрестность точки a , образ пересечения которой со множеством E при функции f содержится в ε -окрестности точки A .

Определение 22.3. Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Число A называется пределом функции f при $x \rightarrow +\infty$ по множеству E , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого такого $x \in E$, что $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \wedge x > \delta |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 22.4. (Определение предела по Гейне). Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и пусть a – предельная точка множества E . Число A называется пределом функции f в точке a по множеству E , если для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, такой, что $a_n \in E, a_n \neq a \forall n \in \mathbb{N}, a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$. Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{a_n\}_{n=1}^\infty : a_n \in E \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A.$$

Теорема 22.1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ в смысле Коши $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ в смысле Гейне.

Билет 23. Свойства предела (Теорема 2, Лекция 10).

Теорема 23.1. Пусть функции f , g и h определены на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка множества E . Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Тогда:

- 1) A – единственный предел функции f (**единственность предела**);
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = A/B$ ($g(x) \neq 0 \forall x \in E$, $B \neq 0$) (**арифметика предела**);
- 5) если $f(x) \leq g(x)$ в пересечении некоторой проколотой окрестности точки a и множества E , то $A \leq B$ (**предельный переход в неравенствах**);
- 6) если существует такая $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, что $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ и $A = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ (**лемма о зажатом пределе**);
- 7) существуют такие $\delta > 0$ и $C \geq 0$, что $|f(x)| \leq C \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ (**ограниченность функции, имеющей предел**);
- 8) если $A \neq 0$, то существует такая $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$, что $|f(x)| \geq \frac{|A|}{2} \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ (**лемма об отделимости**).

Билет 24. Теорема о пределе композиции. Эквивалентные функции.

Теорема 24.1. (Теорема о пределе композиции). Пусть функция g определена на множестве D , b – предельная точка множества D и

$$\lim_{y \rightarrow b} g(y) = A \quad (y \in D).$$

Пусть функция $f : E \rightarrow D$, a – предельная точка множества E и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ($x \in E$). Пусть, наконец, для некоторого $\delta > 0$ при всех x из множества $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ выполнено $f(x) \neq b$. Тогда сложная функция $g \circ f$ определена на множестве E и $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = A$.

Определение 24.1. Пусть функция g определена и не равна нулю на множестве E , f определена на множестве E , a – предельная точка множества E . Говорят, что функции f и g **эквивалентны** при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Обозначение: $f \sim g, x \rightarrow a$.

Билет 25. Критерий Коши существования предела функции.

Теорема 25.1. (Критерий Коши.) Пусть функция f определена на множестве E , a – предельная точка множества E . Функция f имеет предел в точке a **тогда и только тогда**, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любых чисел $x, y \in E$, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - a| < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. С помощью кванторов:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \cap E |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Билет 26. Определение односторонних пределов. Определение монотонной функции. Определение ограниченной функции. Теорема Вейерштрасса для монотонной функции.

Определение 26.1. Пусть a – предельная точка множества E_a^+ . Число A называется **пределом справа** функции f в точке a , если

$$\lim_{E_a^+ \ni x \rightarrow a} f(x) = A,$$

то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in E_a^+ \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$ $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ или $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$. Аналогично определяется **предел слева** функции f в точке a , обозначаемый $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$ только множество E_a^+ в определении заменяется на E_a^- . Пределы справа и слева называются также **односторонними пределами**.

Определение 26.2. Если для любых таких $x_1, x_2 \in E$, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функция f называется **неубывающей** на множестве E . Если выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется **возрастающей** на множестве E . Если выполнены противоположные неравенства, то функция называется соответственно **невозрастающей** и **убывающей** на множестве E . Функция любого из четырёх указанных видов называется **монотонной** на множестве E функцией.

Определение 26.3. Функция f называется ограниченной на множестве M , если она определена на этом множестве и существует такая константа $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ при всех $x \in E$.

Теорема 26.1. (Теорема Вейерштрасса). 1) Пусть функция f определена на множестве E и a – предельная точка множества E_a^- . Пусть f не убывает и ограничена сверху на множестве E_a^- . Тогда существует предел слева функции f в точке a и имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \sup_{x \in E_a^-} f(x)$.

2) Пусть функция f не убывает и ограничена на множестве E . Пусть a – предельная точка множества E_a^+ . Тогда существует предел справа функции f в точке a и имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf_{x \in E_a^+} f(x)$.

Билет 27. *Определение бесконечно малой функции.*

Определение 27.1. *Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$, где a является предельной точкой множества E , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (или $-\infty$, или $+\infty$), то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$. Везде $x \in E$.*

Билет 28. Определение о-малого (Определение 5, Лекция 12). о-малое в терминах пределов (Предложение 1, Лекция 12).

Определение 28.1. Пусть функции f и g определены на множестве E , a – предельная точка множества E . Говорят, что функция f является бесконечно малой по сравнению с функцией g при $x \rightarrow a$, если $f(x) = h(x)g(x)$ и h – бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$. Если при этом сами функции f и g являются бесконечно малыми при $x \rightarrow a$, то говорят, что функция f – **бесконечно малая более высокого порядка** по сравнению с g при $x \rightarrow a$. Тот факт, что f является бесконечно малой по сравнению с g при $x \rightarrow a$, записывают в виде $f = o(g)$, $x \rightarrow a$ (читается “ f равно о-малое от g при x , стремящемся к a ”). Запись $f = o(1)$, $x \rightarrow a$ означает, что f является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$. Таким образом, запись $f = o(g)$, $x \rightarrow a$ равносильна $f = o(1)g$, $x \rightarrow a$.

Лемма 28.1. Запись $f = o(g)$, $x \rightarrow a$ равносильна также тому, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (при этом считаем, что $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a).

Билет 29. Асимптотические равенства 1 – 8 (Лекция 12). Асимптотические равенства 9 – 13.

$$\sin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0. \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$\arcsin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (5)$$

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0; \quad (9)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0; \quad (10)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0; \quad (11)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (13)$$