Билет 1. *Шесть определений непрерывной функции.*

$$\varnothing$$

Билет 2. *Определение непрерывности в точке справа и слева. Критерий непрерывности в терминах непрерывности слева и справа (Предложение 1, Лекция 13).*

$\varnothing$

Билет 3. *Локальные свойства непрерывных функций.*

$$\varnothing$$

Билет 4. *Теорема о композиции непрерывных функций. Точка разрыва.*

$\varnothing$

Билет 5. *Устранимый разрыв, разрыв первого рода и разрыв второго рода. Разрывы монотонной на интервале функции. Определение непрерывной на множестве функции.*

$$\varnothing$$

Билет 6. *Теорема о нуле непрерывной на отрезке функции (Теорема 1, Лекция 13). Определение ограниченной на множестве функции. 1-я теорема Вейерштрасса.*

$\varnothing$

Билет 7. *2-я теорема Вейерштрасса Теорема Больцано – Коши о промежуточном значении.*

$\varnothing$

Билет 8. *Определение равномерной непрерывности. Теорема Гейне – Кантора.*

Определение 8.1. *Функция f, определенная на множестве E, называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех таких $x_1, x_2 \in E$, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено неравенство*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 8.1. *(**Гейне – Кантора о равномерной непрерывности**). Функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Билет 9. *Обратная функция. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема об обратной функции.*

Определение 9.1. *Пусть функция $f : E \to D$ осуществляет биекцию между E и D. Если каждому $y \in D$ поставить в соответствие то $x \in E$, для которого $f(x) = y$, то тем самым будет определена функция, отображающая множество D во множество E. Она называется **обратной** для функции f и обозначается f^{-1}. Таким образом, $f^{-1} : D \to E$.*

Теорема 9.1. *(**Критерий непрерывности монотонной функции**). Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция f, непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда множеством её значений является отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.*

Теорема 9.2. *(**Теорема об обратной функции.**) Пусть функция f непрерывна и строго монотонна (то есть возрастает или убывает) на отрезке $[a, b]$. Тогда функция f имеет обратную функцию f^{-1}, определенную на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, причём f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$ и характер монотонности функций f и f^{-1} одинаковый.*

Билет 10. *Определение дифференцируемой функции. Определение дифференциала. Дифференциал как линейная функция (Лекция 16).*

Определение 10.1. *Функция f, определённая в некоторой окрестности точки a, называется* ***дифференцируемой*** *в точке a, если существуют такие число A и функция α, что при всех h из некоторой проколотой окрестности нуля выполнено равенство*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)h, \tag{1}$$

где $\lim\limits_{h \to 0} \alpha(h) = 0$. При этом A и α зависят и от точки a, поэтому часто равенство (1) записывают в виде

$$f(a+h) - f(a) = A(a)h + \alpha(a,h)h.$$

Определение 10.2. *Функция $h \mapsto Ah$ называется* ***дифференциалом*** *функции f в точке a. Она обозначается $df(a)$ или $df|_{x=a}$, то есть $df(a)(h) = df(h)|_{x=a} = Ah$.*

Ещё раз подчеркнём, что равенство записано в фиксированной точке a, то есть оно зависит от точки a. Другими словами, число A, вообще говоря, разное при разных a.

Здесь символ $df(a)$ нужно воспринимать как обозначение функции, то есть как *цельный* символ.

Отметим два очевидных наблюдения для функции $h \mapsto Ah$: во-первых

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ df(a)(\lambda h) = A\lambda h = \lambda A h,$$

а во-вторых

$$df(a)(h_1 + h_2) = A(h_1 + h_2) = Ah_1 + Ah_2.$$

Так как здесь A – число, то свойства очевидны. Однако позже мы увидим, что дифференциал функции многих переменных также обладает аналогичными свойствами. Выполнение этих свойств по определению означает, что *дифференциал является линейной функцией от h.*

Билет 11. *Определение производной. Связь дифференцируемости и производной (Предложение 1, Лекция 16). Определение касательной.*

Определение 11.1. *Если существует предел* $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, *то он называется производной функции* f *в точке* a. *Другая форма записи предела:* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. *Производная функции* f *в точке* a *обозначается символом* $f'(a)$ *или* $\frac{df}{dx}(a)$ *(второе обозначение позже обсудим подробно).*

Предложение 11.1. *Функция* f *дифференцируема в точке* a *тогда и только тогда, когда в точке* a *существует производная этой функции* $f'(a)$. *При этом* $df(h)|_{x=a} = f'(a)h$.

Изучим *геометрическую интерпретацию производной и дифференциала.* Из равенства $h = x-a$ получим, что дифференцируемая функция может быть записана в виде $f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\alpha(x)(x-a)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$. Это значит, что в некоторой окрестности точки a функция f приближается функцией $x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$. Таким образом, локально (то есть в некоторой окрестности точки a) график функции f выглядит "почти"как прямая. Сама прямая $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ называется *касательной* к графику функции f в точке a. Производная $f'(a)$ является тангенсом угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox. На рисунке 1 красным цветом изображена касательная. Обра-

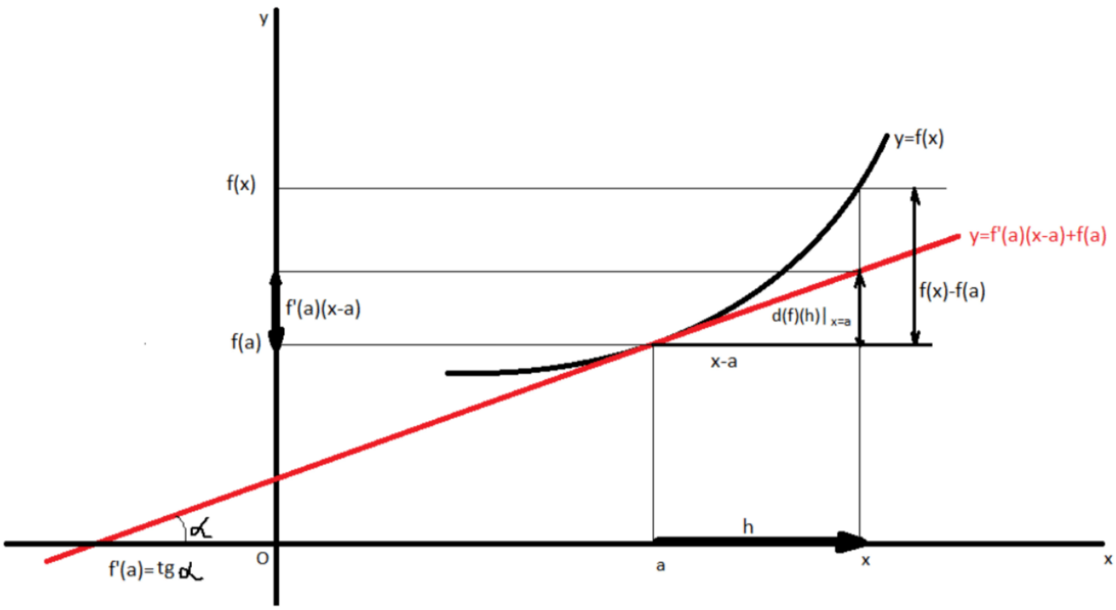

Рис. 1: Функция "сливается"с касательной.

тим внимание, что график функции и касательной неразличимы в некоторой окрестности. Приведём несколько примеров на вычисление производных с помощью определения производной.

Билет 12. *Непрерывность дифференцируемой функции. Определение равномерной сходимости.*

Предложение 12.1. *Пусть функция f дифференцируема в точке a. Тогда f непрерывна в точке a.*

Билет 13. *Формулировка теоремы о равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Пример Вейерштрасса непрерывной, но недифференцируемой функции.*

Билет 14. *Формулировка правил дифференцирования. Теорема о производной сложной функции.*

Билет 15. *Инвариантность формы первого дифференциала. Теорема о производной обратной функции.*

Билет 16. *Таблица производных.*

Билет 17. *Определения локальных минимума и максимума и локального экстремума. Теорема Ферма.*

Билет 18. *Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Геометрические смыслы этих теорем.*

Билет 19. *Два следствия теоремы Лагранжа. Теорема Коши.*