

**Билет 1.** Определение функции, сюръекции, инъекции и биекции.

**Определение 1.1.** Декартовым произведением  $X \times Y$  множеств  $X$  и  $Y$  называют множество всевозможных пар  $(x, y)$ , где первый элемент  $x$  каждой пары принадлежит  $X$ , а второй ее элемент  $y$  принадлежит  $Y$ .

**Определение 1.2.** Функцией  $f$ , определённой на множестве  $X$  и принимающей значения во множестве  $Y$ , называется подмножество декартова произведения  $X \times Y$ , если выполнено следующее условие:  $\forall x \in X \exists! \text{ пара } (x, y) \in f$ . При этом пишут  $y = f(x)$ . Элемент  $y$  называют образом  $x$ , элемент  $x$  – прообразом элемента  $y$ , для функции принято обозначение  $f : X \rightarrow Y$ .

Множество  $f(X)$  всех элементов  $f(x) \in Y$  называется образом множества  $X$ . Короче, это записывается так:

$$f(X) = \{y \in Y | y = f(x), x \in X\},$$

а само  $X$  называется прообразом множества  $f(X)$ .

**Определение 1.3.** 1) Функция  $f : X \rightarrow Y$  называется сюръекцией (накрытием), если для всякого  $y \in Y$  существует такое  $x \in X$ , что  $y = f(x)$ .

2) Функция  $f : X \rightarrow Y$  называется инъекцией (вложением), если из равенства  $f(x) = f(y)$  следует, что  $x = y$ .

3) Функция, являющаяся одновременно сюръекцией и инъекцией, называется биекцией или взаимно-однозначным отображением.

**Билет 2.** Определение того, что множество  $A$  лежит левее множества  $B$ , разделяющего элемента и формулировка принципа полноты.

**Определение 2.1.** Говорят, что множество  $A$  лежит левее множества  $B$ , если  $a \leq b$  для всяких  $a \in A$  и  $b \in B$ .

**Определение 2.2.** Пусть множество  $A$  лежит левее  $B$ . Тогда говорят, что число  $c$  разделяет множества  $A$  и  $B$ , если  $a \leq c$  и  $c \leq b$  для всех  $a \in A, b \in B$ .

**Определение 2.3.** Говорят, что для числового множества выполняется принцип полноты, если для любых двух его подмножеств, одно из которых лежит левее другого, найдётся элемент, разделяющий эти множества.

**Билет 3.** *Определение множества вещественных чисел (с помощью 11 свойств) и формулировка принципа полноты для множества вещественных чисел.*

Множество действительных чисел, которое мы обозначим  $\mathbb{R}$ , должно удовлетворять ряду условий. Во-первых, сумма и произведение любых элементов этого множества снова является элементом этого множества. Кроме того, выполнены следующие свойства.

1) Для всех  $a, b, c \in \mathbb{R}$  выполнено условие *ассоциативности по сложению*:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

2) Для всех  $a, b \in \mathbb{R}$  выполнено условие *коммутативности по сложению*:

$$a + b = b + a.$$

3) Существует *нейтральный элемент относительно операции сложения*  $0 \in \mathbb{R}$ , такой, что для всех  $a \in \mathbb{R}$   $a + 0 = a$ .

4) Для всякого  $a \in \mathbb{R}$  найдётся *противоположный элемент*  $b \in \mathbb{R}$ , такой, что  $a + b = 0$  (его обычно обозначают через  $-a$ ).

5) Для всех  $a, b, c \in \mathbb{R}$  выполнено условие *ассоциативности по умножению*:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

6) Для всех  $a, b, c \in \mathbb{R}$  выполнено условие *коммутативности по умножению*:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

7) Существует *нейтральный элемент относительно операции умножения*  $1 \in \mathbb{R}$ , такой, что для всех  $a \in \mathbb{R}$   $a \cdot 1 = a$ .

8) Для всякого  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  найдётся *обратный элемент*  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , такой, что  $a \cdot b = 1$  (его обычно обозначают через  $a^{-1}$ ).

Отметим, что эти свойства означают, что множество действительных чисел является *абелевой группой по сложению*, а множество всех действительных чисел без нуля является *абелевой группой по умножению*.

9) Для всех  $a, b, c \in \mathbb{R}$  выполнено условие *дистрибутивности*:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Множества, на котором выполнены эти девять свойств, называется *полем*. Помимо этих девяти свойств есть ещё два.

10) Для всех  $a, b \in \mathbb{R}$  либо  $a \leq b$ , либо  $b \leq a$ , то есть любые два элемента  $\mathbb{R}$  можно сравнить (множество, где сравнимы любые два элемента, называется *линейно упорядоченным*). При этом выполнены два свойства:

а) для всех  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , таких, что  $a \leq b$  выполнено  $a + c \leq b + c$ ;

б) для всех  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c \geq 0$  таких, что  $a \leq b$  выполнено  $a \cdot c \leq b \cdot c$ .

11) На множестве вещественных чисел выполнен принцип полноты.

**Билет 4.** Аксиома Архимеда и следствие из аксиомы Архимеда (Лемма 1, Лекция 1).

**Аксиома 4.1. (Аксиома Архимеда).** Для любого положительного вещественного числа  $a$  существует такое натуральное число  $n$ , что  $na \geq 1$  (с помощью кванторов:  $\forall a \in \mathbb{R} \wedge a > 0 \exists n \in \mathbb{N} : na \geq 1$ ).

Из аксиомы Архимеда вытекает полезное следствие.

**Лемма 4.1.** 1)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \exists m/n \in \mathbb{Q} : x < \frac{m}{n} < y$ ; 2)  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \exists c \in \mathbb{I} : x < c < y$ .

Более просто свойство 1) формулируется так: между любыми двумя различными действительными числами лежит рациональное число. В свойстве 2) речь идёт об иррациональном числе.

**Билет 5.** Система и последовательность вложенных и стягивающихся отрезков и лемма о вложенных отрезках.

**Определение 5.1.** 1) Системой вложенных отрезков называется множество  $M$ , состоящее из отрезков, в котором для любых  $I_1, I_2 \in M$  выполнено либо условие  $I_1 \subset I_2$ , либо условие  $I_2 \subset I_1$ .

2) Если при этом в  $M$  все отрезки занумерованы, и любой отрезок с большим номером содержится в любом отрезке с меньшим номером, то множество  $M$  называют **последовательностью вложенных отрезков**.

**Определение 5.2.** Последовательность вложенных отрезков называется стягивающейся, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  в этой последовательности найдётся отрезок, длина которого меньше  $\varepsilon$ .

**Теорема 5.1. (Лемма о вложенных отрезках)** 1) Пусть дана система  $M$  вложенных отрезков. Тогда существует такое число  $c \in \mathbb{R}$ , что для любого отрезка  $I \in M$  имеем  $c \in I$ , то есть все отрезки множества  $M$  имеют общий элемент  $c$ .

2) Если множество  $M$  является последовательностью стягивающихся отрезков, то элемент  $c$  единственен.

**Билет 6.** Определение числовой последовательности и определение предела последовательности (оба варианта, то есть определения 1 и 2, Лекция 3).

**Определение 6.1.** Функция,  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , определённая на множестве натуральных чисел и принимающая значения во множестве действительных чисел, называется числовой последовательностью. Значения  $f(n)$  функции  $f$  обозначают  $a_n$ . Последовательность также часто обозначают  $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ , отождествляя её с множеством её значений.

**Определение 6.2.** Число  $A$  называется пределом последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , если для любой окрестности точки  $A$  существует такое натуральное число  $N$ , что при всех натуральных  $n > N$  числа  $a_n$  лежат в этой окрестности. На языке кванторов это определение запишется так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall U(A) \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ a_n \in U(A).$$

**Определение 6.3.** Число  $A$  называется пределом последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое натуральное число  $N$ , что при всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|a_n - A| < \varepsilon$ . На языке кванторов это определение запишется так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

**Билет 7.** Единственность предела последовательности, определение ограниченной последовательности, ограниченность сходящейся последовательности и лемма об отделимости.

**Лемма 7.1.** Пусть у последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  существует предел. Тогда этот предел единственен.

**Определение 7.1.** Последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  называется ограниченной, если существуют такие числа  $c, C \in \mathbb{R}$ , что  $c \leq a_n \leq C$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Равносильным определением будет следующее: последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  называется ограниченной, если существует такое число  $M > 0$ , что  $|a_n| \leq M$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**Лемма 7.2.** Сходящаяся последовательность ограничена.

**Лемма 7.3. (Лемма об отделимости).** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  и  $A \neq 0$ . Тогда существует такое натуральное число  $N$ , что для всех  $n > N$  выполнено неравенство  $|a_n| > \frac{|A|}{2}$ .

**Билет 8.** Арифметика пределов, переход к пределу в неравенстве и лемма о зажатом пределе.

**Теорема 8.1.** (Арифметика пределов). Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ . Тогда:

1)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha A + \beta B$ ;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \cdot B$ ;

3) если  $B \neq 0$ ,  $b_n \neq 0$  при всех натуральных  $n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$ .

**Лемма 8.1.** (Переход к пределу в неравенстве). Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B,$$

а также существует такое натуральное  $n_0$ , что  $a_n \leq b_n$  при всех  $n > n_0$ . Тогда  $A \leq B$ .

**Теорема 8.2.** (Лемма о зажатом пределе). Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$  и  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , начиная с некоторого натурального  $n$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ .



**Билет 9.** Определение бесконечно малой последовательности, свойство произведения бесконечно малой последовательности на ограниченную и определение предела в терминах бесконечно малых последовательностей.

**Определение 9.1.** Последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  бесконечно малая, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Лемма 9.1.** Если последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  бесконечно малая, а последовательность  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограниченная, то последовательность  $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$  бесконечно малая.

**Определение 9.2.** Число  $A$  называется пределом последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , если существует такая бесконечно малая последовательность  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ , что  $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n = A + \alpha_n$ .

**Билет 10.** Определение верхних и нижних граней, а также два определения точной верхней и нижней граней (Определения 1 и 2, Лекция 4). Существование точной верхней и нижней граней ограниченного множества.

**Определение 10.1.** Пусть дано непустое подмножество  $A$  множества действительных чисел. Число  $C$  называется верхней гранью множества  $A$ , если  $a \leq C$  при всех  $a \in A$ . Если множество  $A$  имеет хотя бы одну верхнюю грань, то оно называется ограниченным сверху. Наименьшая из верхних граней множества  $A$  (если она существует) называется его точной верхней гранью и обозначается  $\sup A$  (читается: супремум.)

Число  $c$  называется нижней гранью множества  $A$ , если  $a \geq c$  при всех  $a \in A$ . Если множество  $A$  имеет хотя бы одну нижнюю грань, то оно называется ограниченным снизу. Наибольшая из нижних граней множества  $A$  (если существует) называется его точной нижней гранью и обозначается  $\inf A$  (читается: инфимум.)

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным.

**Определение 10.2.** Число  $C$  называется точной верхней гранью множества  $A$ , если:

- 1)  $a \leq C$  для всех  $a \in A$ ;
- 2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > C - \varepsilon$ .

**Теорема 10.1.** Пусть множество  $A$  непусто и ограничено сверху. Тогда существует  $\sup A$ .

**Билет 11.** Определение монотонной последовательности. Теорема Вейерштрасса для последовательностей. Определение числа  $e$ .

**Определение 11.1.** Последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  называется неубывающей, если  $a_n \leq a_{n+1}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и невозрастающей, если  $a_n \geq a_{n+1}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Невозрастающая или неубывающая последовательность называется **монотонной**.

Последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  называется возрастающей, если  $a_n < a_{n+1}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и убывающей, если  $a_n > a_{n+1}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Возрастающая или убывающая последовательность называется **строго монотонной**.

**Теорема 11.1.** (Вейерштрасс). Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

**Теорема 11.2.** Последовательность  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  имеет предел.

**Определение 11.2.** Числом  $e$  называют предел последовательности  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , то есть по определению полагают  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

**Билет 12.** Определение того, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ . Теорема о сходимости к  $e$  последовательностей более общего вида (Предложение 1, Лекция 5).

**Определение 12.1.** Говорят, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , если

$$\forall M \exists N : \forall n > N \ a_n > M.$$

**Теорема 12.1.** Пусть заданы последовательности  $\{p_n\}_{n=1}^{+\infty}$  и  $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = -\infty.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

**Билет 13.** Определение подпоследовательности и частичного предела. Частичные пределы последовательности, имеющей предел (Предложение 2, Лекция 5). Теорема Больцано – Вейерштрасса.

**Определение 13.1.** Пусть задана последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  и возрастающая последовательность натуральных чисел  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_m < \dots$ . Возьмём элементы последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  с номерами  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_m < \dots$ . Мы снова получим последовательность  $b_k = a_{n_k}$ , которая называется **подпоследовательностью** последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Число  $a \in \mathbb{R}$  называется **частичным пределом** последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , если найдётся подпоследовательность  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , для которой число  $a$  является пределом, то есть  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

**Лемма 13.1.** Если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность сходится к тому же пределу.

**Теорема 13.1. (Больцано – Вейерштрасс.)** Из всякой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

**Билет 14.** *Определение верхнего и нижнего предела последовательности. Структура множества частичных пределов (Теорема 3, Лекция 5). Критерий существования предела в терминах частичных пределов (Теорема 4, Лекция 5).*

Пусть последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена. Рассмотрим последовательность

$$M_n = \sup_{k > n} a_k.$$

С увеличением  $n$  точная верхняя грань не может увеличиться, так как супремум множества  $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ , равный  $M_n$  не меньше, чем супремум множества  $\{a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$ , который равен  $M_{n+1}$ . Таким образом, последовательность  $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$  не возрастает. Кроме того,  $M_n \geq a_k$  при всех натуральных  $k > n$ , что в силу ограниченности последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  означает, что последовательность  $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена снизу. Следовательно по теореме Вейерштрасса последовательность  $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет предел. Аналогично доказывается, что последовательность  $m_n = \inf_{k > n} a_k$  имеет предел. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m$ .

**Определение 14.1.** Пусть последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена. Тогда число  $M$  называют **верхним пределом** последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , а число  $m$  – **нижним пределом** этой последовательности. Соответствующие обозначения:  $M := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ,  $m := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Теорема 14.1.** Если последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена, то  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  и  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  являются частичными пределами этой последовательности и все частичные пределы последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  принадлежат отрезку  $[\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n]$ .

**Теорема 14.2.** Ограниченная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда у неё только один частичный предел.

**Билет 15.** Определение фундаментальной последовательности. Формулировка критерия Коши.

**Определение 15.1.** Последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для всякого числа  $\varepsilon > 0$  найдётся такое число  $N \in \mathbb{N}$ , что при всех  $n, m > N$  выполняется неравенство  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ . Более коротко:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

**Теорема 15.1. (Критерий Коши.)** Последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет предел *тогда и только тогда*, когда она фундаментальна.

**Билет 16.** Определение числового ряда, частичной суммы, последовательности частичных сумм и суммы ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимый признак сходимости ряда.

**Определение 16.1.** Если задана числовая последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , то сумма

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется **числовым рядом**. Сумма  $S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$  называется  $n$ -ой **частичной суммой** ряда. Последовательность  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется **последовательностью частичных сумм** ряда.

**Определение 16.2.** Если последовательность частичных сумм имеет предел, то есть существует такое действительное число  $S$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то говорят, что ряд сходится, а число  $S$  называют **суммой ряда**. Если последовательность частичных сумм не имеет предела или имеет бесконечный предел, то говорят, что ряд расходится.

**Теорема 16.1. (Критерий Коши сходимости ряда.)** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое натуральное число  $N$ , что при любом  $n > N$  и любом  $p \in \mathbb{N}$  выполнено неравенство  $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ .

**Лемма 16.1. (Необходимый признак сходимости ряда).** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .



**Билет 17.** Абсолютная и условная сходимость ряда. Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами.

**Определение 17.1.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется **условно сходящимся**.

**Лемма 17.1.** Если  $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда ограничена последовательность его частичных сумм.

**Билет 18.** Признак сравнения. Признак сравнения в предельной форме. Мажорантный признак Вейерштрасса. Признак разрежения Коши.

**Теорема 18.1. (Признак сравнения).** Пусть при всех натуральных  $n$ , начиная с некоторого номера, выполнены неравенства  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Тогда из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , а из расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  следует расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Теорема 18.2. (Признак сравнения в предельной форме).** Пусть при всех натуральных  $n$ , начиная с некоторого числа  $N \in \mathbb{N}$ , выполнены неравенства  $a_n \geq 0$ ,  $b_n > 0$ , а также  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ , причём  $A \in (0, +\infty)$ . Тогда ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  или оба сходятся, или оба расходятся.

**Лемма 18.1. (Мажорантный признак Вейерштрасса).** Пусть при всех натуральных  $n$ , начиная с некоторого числа  $N \in \mathbb{N}$ , выполнены неравенства  $b_n \geq |a_n|$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится. Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится.

**Теорема 18.3. (Признак разрежения Коши).** Если последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  не возрастает и  $a_n \geq 0$  при любом натуральном  $n$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ .

**Билет 19.** Признак Даламбера. Признак Коши.

**Теорема 19.1. (Признак Даламбера).** Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$ . Тогда:

- 1) если  $q < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится;
- 2) если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится;
- 3) если  $q = 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  может как абсолютно сходиться, так и расходиться ( в том смысле, что он не сходится даже условно).

**Теорема 19.2. (Радикальный признак Коши).** Пусть дан ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$ . Тогда:

- 1) если  $q < 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится;
- 2) если  $q > 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится;
- 3) если  $q = 1$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  может как абсолютно сходиться, так и расходиться.

**Билет 20.** Определение покрытия. Принцип Бореля – Лебега. Предельная точка множества (оба определения). Принцип Больцано – Вейерштрасса.

**Определение 20.1.** Система множеств  $S = \{X\}$  называется покрытием множества  $Y$ , если  $Y \subseteq \bigcup_{X \in S} X$ .

**Теорема 20.1. (Принцип Бореля – Лебега.)** Пусть система интервалов  $S = \{J\}$  является покрытием отрезка  $I = [a, b]$ . Тогда из системы  $S$  можно выбрать конечную подсистему, также являющуюся покрытием  $I$ .

**Определение 20.2.** Точка  $a$  называется предельной точкой множества  $X$ , если в любой окрестности точки  $a$  содержится бесконечно много элементов множества  $X$ .

**Определение 20.3.** Точка  $a$  называется предельной точкой множества  $X$ , если в любой проколотой окрестности точки  $a$  содержится хотя бы один элемент множества  $X$ .

**Теорема 20.2. (Принцип Больцано – Вейерштрасса.)** Пусть множество  $X$  бесконечно и ограничено. Тогда оно имеет хотя бы одну предельную точку.

**Билет 21.** Внутренняя, граничная и изолированная точка. Открытое и замкнутое множество. Критерий замкнутости множества (Предложение 2, лекция 9).

**Определение 21.1.** Пусть  $X$  – непустое множество. Точка  $a$  множества  $X$  называется **внутренней точкой**  $X$ , если существует такая её окрестность  $U(a)$ , что  $U(a)$  содержится во множестве  $X$ .

Точка  $b$  называется **граничной точкой** множества  $X$ , если в любой её окрестности  $U(b)$  содержатся как точки, принадлежащие множеству  $X$ , так и точки, не принадлежащие этому множеству.

Точка  $c$  множества  $X$  называется **изолированной точкой**  $X$ , если найдётся такая её окрестность  $U(c)$ , что в ней нет других точек из  $X$ , кроме  $c$ .

**Определение 21.2.** Множество  $X$  в  $\mathbb{R}$  называется **открытым**, если оно состоит только из внутренних точек.

Множество  $Y$  в  $\mathbb{R}$  называется **замкнутым**, если дополнение к нему до  $\mathbb{R}$  открыто.

**Лемма 21.1.** Множество  $Y$  является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

**Лемма 21.2.** Пусть  $A$  – множество всех частичных пределов последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ . Тогда  $A$  – замкнутое множество.

**Билет 22.** Определение предела по Коши (в том числе через окрестности). Определение предела при  $x \rightarrow +\infty$ . Определение предела по Гейне. Эквивалентность определений по Коши и Гейне.

**Определение 22.1.** (*Определение предела по Коши*). Пусть функция  $f$  определена на множестве  $E \subset \mathbb{R}$  и пусть  $a$  – предельная точка множества  $E$ . Число  $A$  называется пределом функции  $f$  в точке  $a$  по множеству  $E$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любого такого  $x \in E$ , что  $0 < |x - a| < \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \wedge 0 < |x - a| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon.$$

**Определение 22.2.** Пусть функция  $f$  определена на множестве  $E \subset \mathbb{R}$ . Число  $A$  называется пределом функции  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$  по множеству  $E$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любого такого  $x \in E$ , что  $x > \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E \wedge x > \delta |f(x) - A| < \varepsilon.$$

**Определение 22.3.** (*Определение предела по Гейне*). Пусть функция  $f$  определена на множестве  $E \subset \mathbb{R}$  и пусть  $a$  – предельная точка множества  $E$ . Число  $A$  называется пределом функции  $f$  в точке  $a$  по множеству  $E$ , если для любой последовательности  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , такой, что  $a_n \in E$ ,  $a_n \neq a$   $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ , выполняется равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$ . Запись с помощью кванторов:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{a_n\}_{n=1}^{\infty} : a_n \in E \setminus \{a\} \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A.$$

**Теорема 22.1.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  в смысле Коши  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  в смысле Гейне.

**Билет 23.** Свойства предела (Теорема 2, Лекция 10).

**Теорема 23.1.** Пусть функции  $f$ ,  $g$  и  $h$  определены на некотором множестве  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $a$  – предельная точка множества  $E$ . Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ . Тогда:

- 1)  $A$  – единственный предел функции  $f$  (**единственность предела**);
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ ;
- 4)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x)) = A/B$  ( $g(x) \neq 0 \forall x \in E$ ,  $B \neq 0$ ) (**арифметика предела**);
- 5) если  $f(x) \leq g(x)$  в пересечении некоторой проколотой окрестности точки  $a$  и множества  $E$ , то  $A \leq B$  (**предельный переход в неравенствах**);
- 6) если существует такая  $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ , что  $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$  и  $A = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$  (**лемма о зажатом пределе**);
- 7) существуют такие  $\delta > 0$  и  $C \geq 0$ , что  $|f(x)| \leq C \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$  (**ограниченность функции, имеющей предел**);
- 8) если  $A \neq 0$ , то существует такая  $\overset{\circ}{U}_\delta(a)$ , что  $|f(x)| \geq \frac{|A|}{2} \forall x \in E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$  (**лемма об отделимости**).

**Билет 24.** Теорема о пределе композиции. Эквивалентные функции.

**Теорема 24.1. (Теорема о пределе композиции).** Пусть функция  $g$  определена на множестве  $D$ ,  $b$  – предельная точка множества  $D$  и

$$\lim_{y \rightarrow b} g(y) = A \quad (y \in D).$$

Пусть функция  $f : E \rightarrow D$ ,  $a$  – предельная точка множества  $E$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  ( $x \in E$ ). Пусть, наконец, для некоторого  $\delta > 0$  при всех  $x$  из множества  $E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$  выполнено  $f(x) \neq b$ . Тогда сложная функция  $g \circ f$  определена на множестве  $E$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = A$ .

**Определение 24.1.** Пусть функция  $g$  определена и не равна нулю на множестве  $E$ ,  $f$  определена на множестве  $E$ ,  $a$  – предельная точка множества  $E$ . Говорят, что функции  $f$  и  $g$  **эквивалентны** при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ . Обозначение:  $f \sim g, x \rightarrow a$ .



**Билет 25.** Критерий Коши существования предела функции.

**Теорема 25.1. (Критерий Коши.)** Пусть функция  $f$  определена на множестве  $E$ ,  $a$  – предельная точка множества  $E$ . Функция  $f$  имеет предел в точке  $a$  **тогда и только тогда**, когда для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любых чисел  $x, y \in E$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 < |x - a| < \delta$ ,  $0 < |y - a| < \delta$  выполнено неравенство  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . С помощью кванторов:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \cap E |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

**Билет 26.** Определение односторонних пределов. Определение монотонной функции. Определение ограниченной функции. Теорема Вейерштрасса для монотонной функции.

**Определение 26.1.** Пусть  $a$  – предельная точка множества  $E_a^+$ . Число  $A$  называется **пределом справа** функции  $f$  в точке  $a$ , если

$$\lim_{E_a^+ \ni x \rightarrow a} f(x) = A,$$

то есть для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при всех  $x \in E_a^+ \cap \overset{\circ}{U}_\delta(a)$   $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$  или  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$ . Аналогично определяется **предел слева** функции  $f$  в точке  $a$ , обозначаемый  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$  только множество  $E_a^+$  в определении заменяется на  $E_a^-$ . Пределы справа и слева называются также **односторонними пределами**.

**Определение 26.2.** Если для любых таких  $x_1, x_2 \in E$ , что  $x_1 < x_2$ , выполнено неравенство  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , то функция  $f$  называется **неубывающей** на множестве  $E$ . Если выполнено неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ , то функция называется **возрастающей** на множестве  $E$ . Если выполнены противоположные неравенства, то функция называется соответственно **невозрастающей** и **убывающей** на множестве  $E$ . Функция любого из четырёх указанных видов называется **монотонной** на множестве  $E$  функцией.

**Определение 26.3.** Функция  $f$  называется ограниченной на множестве  $M$ , если она определена на этом множестве и существует такая константа  $C > 0$ , что  $|f(x)| \leq C$  при всех  $x \in E$ .

**Теорема 26.1. (Теорема Вейерштрасса).** 1) Пусть функция  $f$  определена на множестве  $E$  и  $a$  – предельная точка множества  $E_a^-$ . Пусть  $f$  не убывает и ограничена сверху на множестве  $E_a^-$ . Тогда существует предел слева функции  $f$  в точке  $a$  и имеет место равенство  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \sup_{x \in E_a^-} f(x)$ .

2) Пусть функция  $f$  не убывает и ограничена на множестве  $E$ . Пусть  $a$  – предельная точка множества  $E_a^+$ . Тогда существует предел справа функции  $f$  в точке  $a$  и имеет место равенство  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf_{x \in E_a^+} f(x)$ .

**Билет 27.** Определение бесконечно малой функции.

**Определение 27.1.** Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ , где  $a$  является предельной точкой множества  $E$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  (или  $-\infty$ , или  $+\infty$ ), то функция  $f(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ . Везде  $x \in E$ .

**Билет 28.** Определение  $o$ -малого (Определение 5, Лекция 12).  $o$ -малое в терминах пределов (Предложение 1, Лекция 12).

**Определение 28.1.** Пусть функции  $f$  и  $g$  определены на множестве  $E$ ,  $a$  – предельная точка множества  $E$ . Говорят, что функция  $f$  является бесконечно малой по сравнению с функцией  $g$  при  $x \rightarrow a$ , если  $f(x) = h(x)g(x)$  и  $h$  – бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ . Если при этом сами функции  $f$  и  $g$  являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow a$ , то говорят, что функция  $f$  – **бесконечно малая более высокого порядка** по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow a$ . Тот факт, что  $f$  является бесконечно малой по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow a$ , записывают в виде  $f = o(g)$ ,  $x \rightarrow a$  (читается “ $f$  равно  $o$ -малое от  $g$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ ”). Запись  $f = o(1)$ ,  $x \rightarrow a$  означает, что  $f$  является бесконечно малой функцией при  $x \rightarrow a$ . Таким образом, запись  $f = o(g)$ ,  $x \rightarrow a$  равносильна  $f = o(1)g$ ,  $x \rightarrow a$ .

**Лемма 28.1.** Запись  $f = o(g)$ ,  $x \rightarrow a$  равносильна также тому, что  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  (при этом считаем, что  $g(x) \neq 0$  в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ ).

**Билет 29.** Асимптотические равенства 1 – 8 (Лекция 12). Асимптотические равенства 9 – 13.

$$\sin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0. \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$\arcsin x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (5)$$

$$e^x = 1 + x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (6)$$

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad (7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \quad x \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0; \quad (9)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0; \quad (10)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0; \quad (11)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (13)$$