

Билет 1. Шесть определений непрерывной функции.

Определение 1.1. Пусть функция f определена на множестве E , точка $a \in E$. Функция f называется непрерывной в точке a , если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при всех таких $x \in E$, что $|x - a| < \delta$ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Определение 1.2. Таким образом, определение непрерывной в точке a функции можно записать и так: функция f называется непрерывной в точке a , если точка a является изолированной точкой множества E , либо если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ($x \in E$).

Определение 1.3. Так как стремление x к a происходит только по точкам множества E , то определение непрерывности допускает ещё одну формулировку: функция f называется непрерывной в точке a , если точка a является изолированной точкой множества E , либо если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$ ($x \in E$).

Определение 1.4. Учитывая определение бесконечно малой функции, мы можем записать определение непрерывности так: функция f называется непрерывной в точке a , если точка a является изолированной точкой множества E , либо если

$$f(x) = f(a) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$, $\alpha(a) = 0$ ($x \in E$).

Определение 1.5. В терминах окрестностей определение непрерывности примет вид: функция f называется непрерывной в точке a , если точка a является изолированной точкой множества E , либо если для любого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее условие: ε -окрестность точки $f(a)$ содержит образ некоторой окрестности точки a при функции f ($x \in E$) (определение непрерывности 5).

Определение 1.6. Если попытаться определить непрерывную функцию с помощью определения предела по Гейне, то можно отказаться от того, что рассматриваются только последовательности, не принимающие значение a . Итак, используя определение предела по Гейне и его равносильность определению по Коши, получим ещё одно определение непрерывной функции: функция f называется непрерывной в точке a , если для любой такой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что $a_n \in E$, $a_n \rightarrow a$, $n \rightarrow +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ (определение непрерывности 6).

Отметим, что указывать отдельно на случай изолированной точки здесь не нужно, так как если последовательность со значениями во множестве E стремится к изолированной точке a , то существует такое натуральное N , что $a_n = a$ при всех $n > N$.

Билет 2. Определение непрерывности в точке справа и слева. Критерий непрерывности в терминах непрерывности слева и справа (Предложение 1, Лекция 13).

Определение 2.1. Функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной справа в точке $a \in E$, предельной для E_a^+ , если $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, и непрерывной слева, если $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ (здесь точка должна являться предельной для E_a^- .)

Предложение 2.1. $f \in C(a) \Leftrightarrow f$ непрерывна в a справа и слева, причём

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Билет 3. Локальные свойства непрерывных функций.

Предложение 3.1. (Локальные свойства непрерывных функций). Пусть функции f и g определены на множестве E , $a \in E$, $f \in C(a)$, $g \in C(a)$. Тогда выполнены следующие свойства: 1) $\alpha f + \beta g \in C(a) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (линейная комбинация непрерывных в точке функций является непрерывной в этой точке функцией); 2) $f \cdot g \in C(a)$ (произведение непрерывных в точке функций является функцией, непрерывной в этой точке); 3) если $g(x) \neq 0 \forall x \in E$, то $\frac{f}{g} \in C(a)$ (частное непрерывных в точке функций является функцией, непрерывной в этой точке); 4) $\exists M \geq 0, \delta > 0 : \forall x \in E \cap U_\delta(a) |f(x)| \leq M$ (для непрерывной в точке функции найдётся окрестность этой точки, в которой функция ограничена); 5) если $f(a) \neq 0$, то существует такая окрестность $U_\delta(a)$ точки a , что

$$|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2} \forall x \in E \cap U_\delta(a),$$

причём для таких x $f(x) \cdot f(a) > 0$, то есть функция f совпадает по знаку с $f(a)$.

Билет 4. Теорема о композиции непрерывных функций. Точка разрыва.

Предложение 4.1. (Теорема о композиции непрерывных функций). Пусть множества E, D и K содержатся в \mathbb{R} , $f : E \rightarrow D$, $g : D \rightarrow K$. Пусть $a \in E$, $f(a) \in D$, и $f \in C(a)$, $g \in C(f(a))$. Тогда функция $g \circ f : E \rightarrow K$ непрерывна в точке a (здесь $(g \circ f)(x) := g(f(x))$).

Определение 4.1. Если функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ не является непрерывной в точке $a \in E$, то эта точка называется точкой разрыва функции f .

Билет 5. Устранимый разрыв, разрыв первого рода и разрыв второго рода. Разрывы монотонной на интервале функции. Определение непрерывной на множестве функции.

Во-первых, предел в точке $a \in E$ у функции f может существовать, но не быть равным $f(a)$. В этом случае достаточно определить функцию f в точке a её пределом в этой точке, чтобы функция стала непрерывной, поэтому такая точка называется **точкой устранимого разрыва**. Примером функции с точкой устранимого разрыва может служить $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, где $a = 0$. Эта функция в точке $a = 0$ имеет значение 0, а предел при $x \rightarrow 0$ равен 1, поэтому достаточно положить $f(0) = 1$, чтобы функция f стала непрерывной в точке 0.

Во-вторых, в точке $a \in E$ у функции может не быть предела, но при этом существуют оба односторонних предела (см. предыдущую лекцию), которые не равны друг другу. В этом случае точка a называется **точкой разрыва первого рода**. Иногда такой разрыв называют **скачком**. Примером функции с такой точкой разрыва может служить кусочно заданная функция $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$ Точка $a = 0$ является точкой разрыва первого рода. См. также рис. 2.

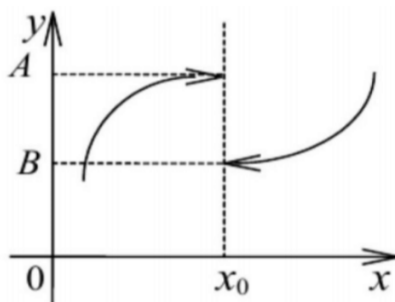


Рис. 1: Скачок величины $|BA|$.

В-третьих, хотя бы один из односторонних пределов в точке $f \in E$ может не существовать или быть равным $\pm\infty$ (то есть либо $+\infty$, либо $-\infty$, либо просто ∞ .) Такая точка называется **точкой разрыва второго рода**. Точку разрыва этого типа имеет в нуле гипербола $f(x) = \frac{1}{x}$ (если доопределить её в нуле любым действительным числом), так как $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$

Предложение 5.1. Монотонная на интервале функция может иметь на этом интервале только разрывы первого рода.

Определение 5.1. Функция f , определённая на множестве E , называется непрерывной на E , если она непрерывна в каждой точке E .

Билет 6. Теорема о нуле непрерывной на отрезке функции (Теорема 1, Лекция 13). Определение ограниченной на множестве функции. 1-я теорема Вейерштрасса.

Теорема 6.1. Пусть функция $f \in C([a, b])$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$.

Напомним, что функция f , определённая на множестве E , называется ограниченной на этом множестве, если $\exists C \geq 0 : |f(x)| \leq C \forall x \in E$.

Теорема 6.2. (1-я теорема Вейерштрасса.) Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке.

Билет 7. 2-я теорема Вейерштрасса Теорема Больцано – Коши о промежуточном значении.

Теорема 7.1. (2-я теорема Вейерштрасса.) Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что

$$f(x_1) = m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x), f(x_2) = M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Теорема 7.2. (Коши о непрерывной функции.) Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$. Тогда для любого числа $C \in [m, M]$ существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

Билет 8. *Определение равномерной непрерывности. Теорема Гейне – Кантора.*

Определение 8.1. *Функция f , определенная на множестве E , называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех таких $x_1, x_2 \in E$, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено неравенство*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 8.1. *(Гейне – Кантора о равномерной непрерывности). Функция f , непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Билет 9. Обратная функция. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема об обратной функции.

Определение 9.1. Пусть функция $f : E \rightarrow D$ осуществляет биекцию между E и D . Если каждому $y \in D$ поставить в соответствие то $x \in E$, для которого $f(x) = y$, то тем самым будет определена функция, отображающая множество D во множество E . Она называется **обратной** для функции f и обозначается f^{-1} . Таким образом, $f^{-1} : D \rightarrow E$.

Теорема 9.1. (Критерий непрерывности монотонной функции). Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция f , непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда множеством её значений является отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Теорема 9.2. (Теорема об обратной функции.) Пусть функция f непрерывна и строго монотонна (то есть возрастает или убывает) на отрезке $[a, b]$. Тогда функция f имеет обратную функцию f^{-1} , определенную на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, причём f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$ и характер монотонности функций f и f^{-1} одинаковый.

Билет 10. Определение дифференцируемой функции. Определение дифференциала. Дифференциал как линейная функция (Лекция 16).

Определение 10.1. Функция f , определённая в некоторой окрестности точки a , называется **дифференцируемой** в точке a , если существуют такие число A и функция α , что при всех h из некоторой проколотой окрестности нуля выполнено равенство

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)h, \quad (1)$$

где $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$. При этом A и α зависят и от точки a , поэтому часто равенство (1) записывают в виде

$$f(a+h) - f(a) = A(a)h + \alpha(a, h)h.$$

Определение 10.2. Функция $h \mapsto Ah$ называется **дифференциалом** функции f в точке a . Она обозначается $df(a)$ или $df|_{x=a}$, то есть $df(a)(h) = df(h)|_{x=a} = Ah$.

Ещё раз подчеркнём, что равенство записано в фиксированной точке a , то есть оно зависит от точки a . Другими словами, число A , вообще говоря, разное при разных a .

Здесь символ $df(a)$ нужно воспринимать как обозначение функции, то есть как *цельный* символ.

Отметим два очевидных наблюдения для функции $h \mapsto Ah$: во-первых

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad df(a)(\lambda h) = A\lambda h = \lambda Ah,$$

а во-вторых

$$df(a)(h_1 + h_2) = A(h_1 + h_2) = Ah_1 + Ah_2.$$

Так как здесь A – число, то свойства очевидны. Однако позже мы увидим, что дифференциал функции многих переменных также обладает аналогичными свойствами. Выполнение этих свойств по определению означает, что *дифференциал является линейной функцией от h* .

Билет 11. Определение производной. Связь дифференцируемости и производной (Предложение 1, Лекция 16). Определение касательной.

Определение 11.1. Если существует предел $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, то он называется производной функции f в точке a . Другая форма записи предела: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Производная функции f в точке a обозначается символом $f'(a)$ или $\frac{df}{dx}(a)$ (второе обозначение позже обсудим подробно).

Предложение 11.1. Функция f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда в точке a существует производная этой функции $f'(a)$. При этом $df(h)|_{x=a} = f'(a)h$.

Изучим геометрическую интерпретацию производной и дифференциала. Из равенства $h = x - a$ получим, что дифференцируемая функция может быть записана в виде $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \alpha(x)(x-a)$, где $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$. Это значит, что в некоторой окрестности точки a функция f приближается функцией $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$. Таким образом, локально (то есть в некоторой окрестности точки a) график функции f выглядит "почти" как прямая. Сама прямая $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ называется *касательной* к графику функции f в точке a . Производная $f'(a)$ является тангенсом угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox . На рисунке 1 красным цветом изображена касательная. Обра-

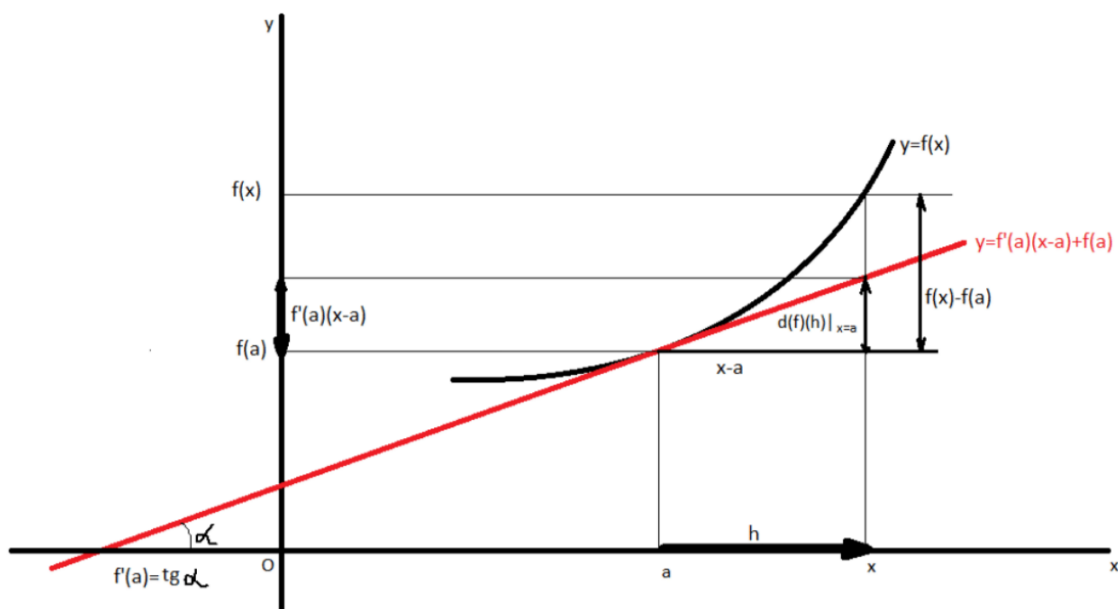


Рис. 2: Функция "сливается" с касательной.

тим внимание, что график функции и касательной неразличимы в некоторой окрестности. Приведём несколько примеров на вычисление производных с помощью определения производной.

Билет 12. Непрерывность дифференцируемой функции. Определение равномерной сходимости.

Предложение 12.1. Пусть функция f дифференцируема в точке a . Тогда f непрерывна в точке a .

Определение 12.1. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится равномерно** к функции $f(x)$ на множестве X , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow[X]{} f(x)$.

Билет 13. *Формулировка теоремы о равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Пример Вейерштрасса непрерывной, но недифференцируемой функции.*

Теорема 13.1. *(Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности).* Пусть X – область сходимости функциональной последовательности $\{f_n\}$. Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \ f_n(x) \in C(x_0)$, $x_0 \in X$. Пусть $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда $f(x) \in C(x_0)$.

С помощью теоремы о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности можно построить пример функции, которая в каждой точке непрерывна, но ни в одной точке не является дифференцируемой. Для этого рассмотрим следующую последовательность функций:

$$f_0(x) = \sin x, \quad f_1(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 8x, \quad f_2(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 64x, \quad \dots,$$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \sin 8^k x.$$

Покажем, что эта последовательность функций имеет предел при каждом $x \in \mathbb{R}$, то есть областью сходимости является вся вещественная прямая. Действительно, при фиксированном x

$$\sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{2^k} \sin 8^k x \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \leq 2,$$

то есть частичные суммы ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{2^k} \sin 8^k x \right|$ ограничены сверху, что по критерию сходимости для рядов с положительными коэффициентами означает сходимость ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{2^k} \sin 8^k x \right|$, то есть ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \sin 8^k x$ сходится абсолютно, а значит, и сам этот ряд сходится, то есть по определению сходится его последовательность частичных сумм $\{f_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$. Так как наши рассуждения справедливы для любого $x \in \mathbb{R}$, то функция

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin(8^k x)$$

определена для любых вещественных чисел. Кроме того,

$$|w(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \sin 8^k x \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n},$$

поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = [\log_2(1/\varepsilon)]$, что при всех $n > N$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ $|w(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, то есть $f_n(x) \xrightarrow{X} w(x)$. Все функции $f_n(x)$ непрерывны, так как представляют собой суммы непрерывных синусов, поэтому по теореме 1 $w(x)$ непрерывна.

Можно доказать, что при этом функция $w(x)$ ни в одной точке вещественной оси не является дифференцируемой.

Функция $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(8^n x)$ называется **функцией Вейерштрасса**.

Билет 14. Формулировка правил дифференцирования. Теорема о производной сложной функции.

Предложение 14.1. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке a . Тогда:

1) функция $\alpha f + \beta g$ дифференцируема в точке a при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

(свойство линейности);

2) $f \cdot g$ дифференцируема в точке a и $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (правило Лейбница);

3) если $g \neq 0$ в некоторой окрестности точки a , то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке a и $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$.

Предложение 14.2. (Производная сложной функции). Пусть функция f дифференцируема в точке a , а функция g дифференцируема в точке $f(a)$. Тогда функция $g \circ f$ дифференцируема в точке a и $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Билет 15. *Инвариантность формы первого дифференциала. Теорема о производной обратной функции.*

Пусть f дифференцируема в точке x и $f(x) = y$. Теорема о производной сложной функции тогда в терминах дифференциалов запишется так (в точке x):

$$d(g \circ f)(x) = g'(f(x))f'(x)dx = g'(f(x))df(x) = g'(y)dy.$$

Таким образом, вне зависимости от того, является ли y независимой переменной или функцией, форма (то есть вид) первого дифференциала внешне не меняется. Это свойств дифференциала называется **инвариантностью формы первого дифференциала**.

Предложение 15.1. (Производная обратной функции). Пусть f – непрерывная и строго монотонная функция, отображающая интервал I в интервал J . Пусть также f дифференцируема в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $b = f(a)$ и $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Билет 16. *Таблица производных.*

1) $C' = 0 \forall C = const$; **2)** $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; **3)** $(e^x)' = e^x$; **4)** $(a^x)' = a^x \ln a$; **5)** $(\ln x)' = 1/x$;

6) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; **7)** $(\sin x)' = \cos x$; **8)** $(\cos x)' = -\sin x$; **9)** $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$;

10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}^2 x - 1$; **11)** $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; **12)** $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; **14)** $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$; **15)** $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; **16)** $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

Билет 17. Определения локальных минимума и максимума и локального экстремума. Теорема Ферма.

Определение 17.1. Пусть $\delta > 0$, $U_\delta(a)$ - δ -окрестность точки a . Если функция f определена на множестве E , точка $a \in E$ и при всех $x \in U_\delta(a) \cap E$, выполнено неравенство $f(x) \geq f(a)$, то a называется точкой локального максимума. Если при тех же $x \in U_\delta(a) \cap E$ $f(x) \leq f(a)$, то a называется точкой локального минимума. Если неравенство строгое, то a называется точкой строгого локального максимума или строгого локального минимума соответственно. Точки максимума и минимума называются точками локального экстремума (если неравенства нестрогие), и точками строгого локального экстремума, если неравенства строгие.

Теорема 17.1. (Теорема Ферма). Пусть функция f определена на интервале (a, b) , дифференцируема в точке $c \in (a, b)$ и имеет в точке c локальный экстремум. Тогда $f'(c) = 0$.

Билет 18. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Геометрические смыслы этих теорем.

Теорема 18.1. (Теорема Ролля). Пусть:

- 1) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.
- 2) Функция f дифференцируема на интервале (a, b) . 3) $f(a) = f(b)$.

Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Теорема 18.2. (Теорема Лагранжа). Пусть:

- 1) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.
- 2) Функция f дифференцируема на интервале (a, b) .

Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Билет 19. Два следствия теоремы Лагранжа. Теорема Коши.

Предложение 19.1. (1-е следствие) Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$. Тогда функция f постоянна на (a, b) .

Предложение 19.2. (2-е следствие) Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a, b) . 1) Функция f не убывает на этом интервале тогда и только тогда, когда

$$f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b).$$

2) Функция f не возрастает на этом интервале тогда и только тогда, когда

$$f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b).$$

Теорема 19.1. (Теорема Коши). Пусть функции f и $g : 1)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$; 2) дифференцируемы на интервале (a, b) ; 3) $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.

Тогда существует точка такая точка $c \in (a, b)$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.