Билет 1. *Шесть определений непрерывной функции.*

Определение 1.1. *Пусть функция f определена на множестве E, точка $a \in E$. Функция f называется непрерывной в точке , если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при всех таких $x \in E$, что $|x - a| < \delta |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Определение 1.2. *Таким образом, определение непрерывной в точке a функции можно записать и так: функция f называется непрерывной в точке а, если точка а является изолированной точкой множества E, либо если $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)(x \in E\ )$*

Определение 1.3. *Так как стремление x к a происходит только по точкам множества E, то определение непрерывности допускает ещё одну формулировку: функция f называется непрерывной в точке а, если точка а является изолированной точкой множества E, либо если $\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right)(x \in E)$*

Определение 1.4. *Учитывая определение бесконечно малой функции, мы можем записать определение непрерывности так: функция f называется непрерывной в точке а, если точка а является изолированной точкой множества E, либо если*

$$f(x) = f(a) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to a, \alpha(a) = 0 (x \in E)$

Определение 1.5. *В терминах окрестностей определение непрерывности примет вид: функция f называется непрерывной в точке а, если точка а является изолированной точкой множества E, либо если для любого $\varepsilon > 0$ справедливо следующее условие: ε-окрестность точки $f(a)$ содержит образ некоторой окрестности точки а при функции $f(x \in E)$ (определение непрерывности 5).*

Определение 1.6. *Если попытаться определить непрерывную функции с помощью определения предела по Гейне, то можно отказаться от того, что рассматриваются только последовательности, не принимающие значение a. Итак, используя определение предела по Гейне и его равносильность определению по Коши, получим ещё одно определение непрерывной функции: функция f называется непрерывной в точке а, если для любой такой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, что $a_n \in E, a_n \to a, n \to +\infty, \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$ (определение непрерывности 6).*

Отметим, что указывать отдельно на случай изолированной точки здесь не нужно, так как если последовательность со значениями во множестве E стремится к изолированной точке a, то существует такое натуральное N, что $a_n = a$ при всех $n > N$.

Билет 2. *Определение непрерывности в точке справа и слева. Критерий непрерывности в терминах непрерывности слева и справа (Предложение 1, Лекция 13).*

Определение 2.1. *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной справа в точке $a \in E$, предельной для E_a^+, если $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, и непрерывной слева, если $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$ (здесь точка должна являться предельной для E_a^-.)*

Предложение 2.1. $f \in C(a) \Leftrightarrow f$ *непрерывна в a справа и слева, причём*

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

Билет 3. *Локальные свойства непрерывных функций.*

Предложение 3.1. *(Локальные свойства непрерывных функций). Пусть функции f и g определены на множестве $E, a \in E, f \in C(a), g \in C(a)$. Тогда выполнены следующие свойства:*

1) $\alpha f + \beta g \in C(a) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (линейная комбинация непрерывных в точке функций является непрерывной в этой точке функцией;

2) $f \cdot g \in C(a)$ (произведение непрерывных в точке функций является функцией, непрерывной в этой точке);

3) если $g(x) \neq 0 \forall x \in E$, то $\frac{f}{g} \in C(a)$ (частное непрерывных в точке функций является функцией, непрерывной в этой точке);

4) $\exists M \geq 0, \delta > 0 : \forall x \in E \cap U_\delta(a) |f(x)| \leq M$ (для непрерывной в точке функции найдётся окрестность этой точки, в которой функция ограничена);

5) если $f(a) \neq 0$, то существует такая окрестность $U_\delta(a)$ точки a, что

$$|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2} \forall x \in E \cap U_\delta(a),$$

причём для таких $x f(x) \cdot f(a) > 0$, то есть функция f совпадает по знаку с $f(a)$.

Билет 4. *Теорема о композиции непрерывных функций. Точка разрыва.*

Предложение 4.1. *(Теорема о композиции непрерывных функций). Пусть множества E, D и K содержатся в $\mathbb{R}$, $f : E \to D, g : D \to K$. Пусть $a \in E, f(a) \in D$, и $f \in C(a), g \in C(f(a))$. Тогда функция $g \circ f : E \to K$ непрерывна в точке a (здесь $(g \circ f)(x) := g(f(x))$).*

Определение 4.1. *Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ не является непрерывной в точке $a \in E$, то эта точка называется точкой разрыва функции f.*

Билет 5. *Устранимый разрыв, разрыв первого рода и разрыв второго рода. Разрывы монотонной на интервале функции. Определение непрерывной на множестве функции.*

Во-первых, предел в точка $a \in E$ у функции f может существовать, но не быть равным $f(a)$. В этом случае достаточно определить функцию f в точке a её пределом в этой точке, чтобы функция стала непрерывной, поэтому такая точка называется **точкой устранимого разрыва**. Примером функции с точкой устранимого разрыва может служить $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, где $a = 0$. Эта функция в точке $a = 0$ имеет значение 0 , а предел при $x \to 0$ равен 1 , поэтому достаточно положить $f(0) = 1$, чтобы функция f стала непрерывной в точке 0 .

.

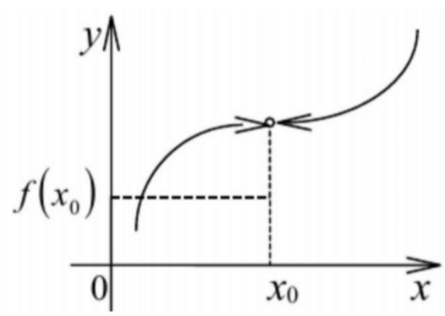

Рис. 1: Устранимый разрыв в точке $a = x_0$.

Во-вторых, в точке $a \in E$ у функции может не быть предела, но при этом существуют оба односторонних предела (см. предыдущую лекцию), которые не равны друг другу. В этом случае точка a называется **точкой разрыва первого рода**. Иногда такой разрыв называют **скачком**. Примером функции с такой точкой разрыва может служить кусочно заданная функция $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$ Точка $a = 0$ является точкой разрыва первого рода. См. также рис. 2 .

.

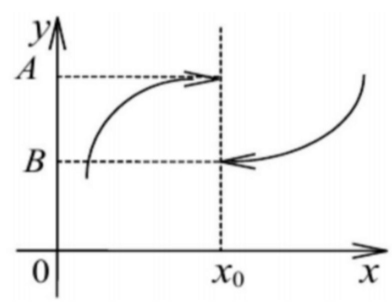

Рис. 2: Скачок величины $|BA|$.

В-третьих, хотя бы один из односторонних пределов в точке $f \in E$ может не существовать или быть равным $\pm\infty$ (то есть либо $+\infty$, либо $-\infty$, либо просто ∞.) Такая точка называется **точкой разрыва второго рода**. Точку разрыва этого типа имеет в нуле гипербола $f(x) = \frac{1}{x}$ (если доопределить её в нуле любым действительным числом), так как $\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$

Предложение 5.1. *Монотонная на интервале функция может иметь на этом интервале только разрывы первого рода.*

Определение 5.1. *Функция f, определённая на множестве E, называется непрерывной на E, если она непрерывна в каждой точке E.*

Билет 6. *Теорема о нуле непрерывной на отрезке функции (Теорема 1, Лекция 13). Определение ограниченной на множестве функции. 1-я теорема Вейерштрасса.*

Теорема 6.1. *Пусть функция $f \in C([a,b])$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in [a,b] : f(c) = 0$.*

Напомним, что функция f,определённая на множестве E, называется ограниченной на этом множестве, если $\exists C \geq 0 : |f(x)| \leq C \forall x \in E$.

Теорема 6.2. *(1-я теорема Вейерштрасса.) Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке.*

Билет 7. *2-я теорема Вейерштрасса Теорема Больцано – Коши о промежуточном значении.*

Теорема 7.1. *(2-я теорема Вейерштрасса.) Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, что*

$$f(x_1) = m = \inf_{a \le x \le b} f(x), f(x_2) = M = \sup_{a \le x \le b} f(x).$$

Теорема 7.2. *(Коши о непрерывной функции.) Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b], m = \inf_{a \le x \le b} f(x), M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$. Тогда для любого числа $C \in [m, M]$ существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.*

Билет 8. *Определение равномерной непрерывности. Теорема Гейне – Кантора.*

Определение 8.1. *Функция f, определенная на множестве E, называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех таких $x_1, x_2 \in E$, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено неравенство*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 8.1. *(**Гейне – Кантора о равномерной непрерывности**). Функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Билет 9. *Обратная функция. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема об обратной функции.*

Определение 9.1. *Пусть функция $f : E \to D$ осуществляет биекцию между E и D. Если каждому $y \in D$ поставить в соответствие то $x \in E$, для которого $f(x) = y$, то тем самым будет определена функция, отображающая множество D во множество E. Она называется* ***обратной*** *для функции f и обозначается f^{-1}. Таким образом, $f^{-1} : D \to E$.*

Теорема 9.1. *(**Критерий непрерывности монотонной функции**). Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция f, непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда множеством её значений является отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.*

Теорема 9.2. *(**Теорема об обратной функции.**) Пусть функция f непрерывна и строго монотонна (то есть возрастает или убывает) на отрезке $[a, b]$. Тогда функция f имеет обратную функцию f^{-1}, определенную на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, причём f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$ и характер монотонности функций f и f^{-1} одинаковый.*

Билет 10. *Определение дифференцируемой функции. Определение дифференциала. Дифференциал как линейная функция (Лекция 16).*

Определение 10.1. *Функция f, определённая в некоторой окрестности точки a, называется* ***дифференцируемой*** *в точке a, если существуют такие число A и функция α, что при всех h из некоторой проколотой окрестности нуля выполнено равенство*

$$f(a+h) - f(a) = Ah + \alpha(h)h, \tag{1}$$

где $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. При этом A и α зависят и от точки a, поэтому часто равенство (1) записывают в виде

$$f(a+h) - f(a) = A(a)h + \alpha(a,h)h.$$

Определение 10.2. *Функция $h \mapsto Ah$ называется* ***дифференциалом*** *функции f в точке a. Она обозначается $df(a)$ или $df|_{x=a}$, то есть $df(a)(h) = df(h)|_{x=a} = Ah$.*

Ещё раз подчеркнём, что равенство записано в фиксированной точке a, то есть оно зависит от точки a. Другими словами, число A, вообще говоря, разное при разных a.

Здесь символ $df(a)$ нужно воспринимать как обозначение функции, то есть как *цельный* символ.

Отметим два очевидных наблюдения для функции $h \mapsto Ah$: во-первых

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \; df(a)(\lambda h) = A\lambda h = \lambda Ah,$$

а во-вторых

$$df(a)(h_1 + h_2) = A(h_1 + h_2) = Ah_1 + Ah_2.$$

Так как здесь A – число, то свойства очевидны. Однако позже мы увидим, что дифференциал функции многих переменных также обладает аналогичными свойствами. Выполнение этих свойств по определению означает, что *дифференциал является линейной функцией от h.*

Билет 11. *Определение производной. Связь дифференцируемости и производной (Предложение 1, Лекция 16). Определение касательной.*

Определение 11.1. *Если существует предел* $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$*, то он называется производной функции* f *в точке* a*. Другая форма записи предела:* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$*. Производная функции* f *в точке* a *обозначается символом* $f'(a)$ *или* $\frac{df}{dx}(a)$ *(второе обозначение позже обсудим подробно).*

Предложение 11.1. *Функция* f *дифференцируема в точке* a *тогда и только тогда, когда в точке* a *существует производная этой функции* $f'(a)$*. При этом* $df(h)|_{x=a} = f'(a)h$*.*

Изучим *геометрическую интерпретацию производной и дифференциала*. Из равенства $h = x-a$ получим, что дифференцируемая функция может быть записана в виде $f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\alpha(x)(x-a)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$. Это значит, что в некоторой окрестности точки a функция f приближается функцией $x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$. Таким образом, локально (то есть в некоторой окрестности точки a) график функции f выглядит "почти"как прямая. Сама прямая $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ называется *касательной* к графику функции f в точке a. Производная $f'(a)$ является тангенсом угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox. На рисунке 1 красным цветом изображена касательная. Обра-

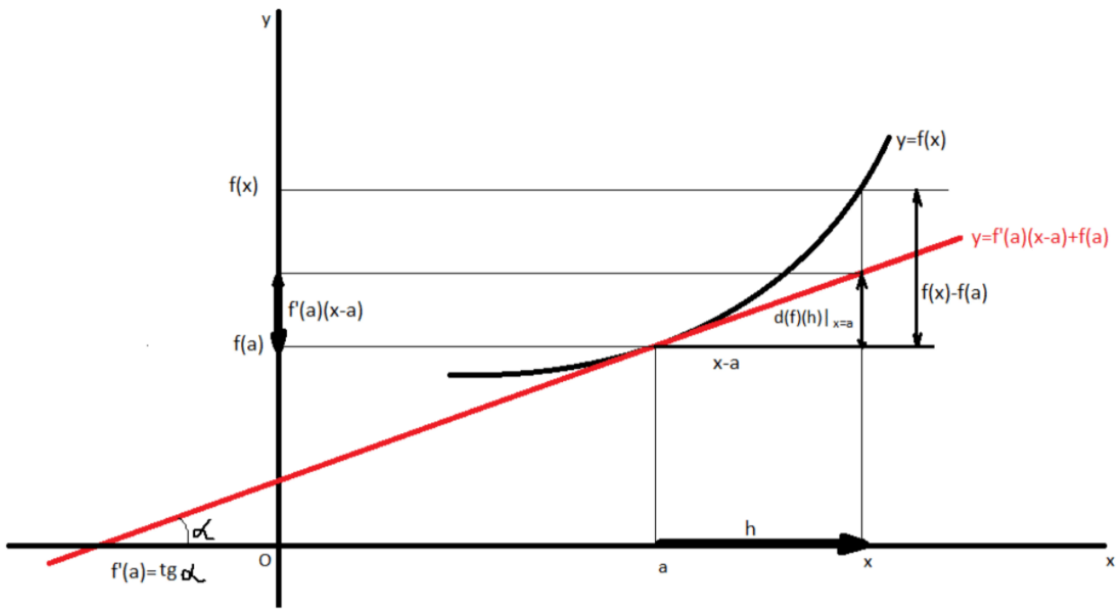

Рис. 3: Функция "сливается"с касательной.

тим внимание, что график функции и касательной неразличимы в некоторой окрестности. Приведём несколько примеров на вычисление производных с помощью определения производной.

Билет 12. *Непрерывность дифференцируемой функции. Определение равномерной сходимости.*

Предложение 12.1. *Пусть функция f дифференцируема в точке a. Тогда f непрерывна в точке a.*

Определение 12.1. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$* ***сходится равномерно*** *к функции $f(x)$ на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ \forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначение: $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

Билет 13. *Формулировка теоремы о равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Пример Вейерштрасса непрерывной, но недифференцируемой функции.*

Теорема 13.1. ***(Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности).*** *Пусть X – область сходимости функциональной последовательности $\{f_n\}$. Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \in C(x_0)$, $x_0 \in X$. Пусть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Тогда $f(x) \in C(x_0)$.*

С помощью теоремы о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности можно построить пример функции, которая в каждой точке непрерывна, но ни в одной точке не является дифференцируемой. Для этого рассмотрим следующую последовательность функций:

$$f_0(x) = \sin x,\ f_1(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 8x,\ f_2(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 64x,\ \dots,$$

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\sin 8^k x.$$

Покажем, что эта последовательность функций имеет предел при каждом $x \in \mathbb{R}$, то есть областью сходимости является вся вещественная прямая. Действительно, при фиксированном x

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{2^k}\sin 8^k x\right| \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} \le 2,$$

то есть частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{2^k}\sin 8^k x\right|$ ограничены сверху, что по критерию сходимости для рядов с положительными коэффициентами означает сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{2^k}\sin 8^k x\right|$, то есть ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\sin 8^k x$ сходится абсолютно, а значит, и сам этот ряд сходится, то есть по определению сходится его последовательность частичных сумм $\{f_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$. Так как наши рассуждения справедливы для любого $x \in \mathbb{R}$, то функция

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sin(8^k x)$$

определена для любых вещественных чисел. Кроме того,

$$|w(x) - f_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\sin 8^k x\right| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n},$$

поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N = [\log_2(1/\varepsilon)]$, что при всех $n > N$ и при всех $x \in \mathbb{R}$ $|w(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, то есть $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} w(x)$. Все функции $f_n(x)$ непрерывны, так как представляют собой суммы непрерывных синусов, поэтому по теореме 1 $w(x)$ непрерывна.

Можно доказать, что при этом функция $w(x)$ ни в одной точке вещественной оси не является дифференцируемой.

Функция $w(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\sin(8^n x)$ называется **функцией Вейерштрасса.**

Билет 14. *Формулировка правил дифференцирования. Теорема о производной сложной функции.*

Предложение 14.1. *Пусть функции f и g дифференцируемы в точке a. Тогда:*
1) функция $\alpha f + \beta g$ дифференцируема в точке a при любых α, $\beta \in \mathbb{R}$ и

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

(свойство линейности);
2) $f \cdot g$ дифференцируема в точке a и $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (правило Лейбница);
3) если $g \neq 0$ в некоторой окрестности точки a, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке a и $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$.

Предложение 14.2. ***(Производная сложной функции).*** *Пусть функция f дифференцируема в точке a, а функция g дифференцируема в точке $f(a)$. Тогда функция $g \circ f$ дифференцируема в точке a и $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Билет 15. *Инвариантность формы первого дифференциала. Теорема о производной обратной функции.*

Пусть f дифференцируема в точке x и $f(x) = y$. Теорема о производной сложной функции тогда в терминах дифференциалов запишется так (в точке x):

$$d(g \circ f)(x) = g'(f(x))f'(x)dx = g'(f(x))df(x) = g'(y)dy.$$

Таким образом, вне зависимости от того, является ли y независимой переменной или функцией, форма (то есть вид) первого дифференциала внешне не меняется. Это свойств дифференциала называется ***инвариантностью формы первого дифференциала.***

Предложение 15.1. ***(Производная обратной функции).*** *Пусть f – непрерывная и строго монотонная функция, отображающая интервал I в интервал J. Пусть также f дифференцируема в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $b = f(a)$ и $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.*

Билет 16. *Таблица производных.*

1) $C' = 0\ \forall C = const$; **2**) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; **3**) $(e^x)' = e^x$; **4**) $(a^x)' = a^x \ln a$; **5**) $(\ln x)' = 1/x$; **6**) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; **7**) $(\sin x)' = \cos x$; **8**) $(\cos x)' = -\sin x$; **9**) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$; **10**) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}^2 x - 1$; **11**) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; **12**) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; **13**) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; **14**) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$; **15**) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; **16**) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

Билет 17. *Определения локальных минимума и максимума и локального экстремума. Теорема Ферма.*

Определение 17.1. *Пусть* $\delta > 0, U_\delta(a)$ *-* δ*-окрестность точки* a *Если функция* f *определена на множестве* E*, точка* $a \in E$ *и при всех* $x \in U_\delta(a) \cap E$*, выполнено неравенство* $f(a) \geq f(x)$*, то* a *называется точкой локального максимума. Если при тех же* $x \in U_\delta(a) \cap E f(x) \leq f(a)$*, то* f *называется точкой локального минимума. Если неравенство строгое, то* a *называется точкой строгого локального максимума или строгого локального минимума соответственно. Точки максимума и минимума называются точками локального экстремума (если неравенства нестрогие), и точками строгого локального экстремума, если неравенства строгие.*

Теорема 17.1. *(Теорема Ферма). Пусть функция* f *определена на интервале* (a, b)*, дифференцируема в точке* $c \in (a, b)$ *и имеет в точке* c *локальный экстремум. Тогда* $f'(c) = 0$*.*

Билет 18. *Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Геометрические смыслы этих теорем.*

Теорема 18.1. *(Теорема Ролля), Пусть:*
1) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2) Функция f дифференцируема па интервале (a, b). 3) $f(a) = f(b)$.
Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при условиях теоремы обязательно найдётся точка, в которой касательная к графику функции f параллельна оси абсцисс (см. рисунок 2).

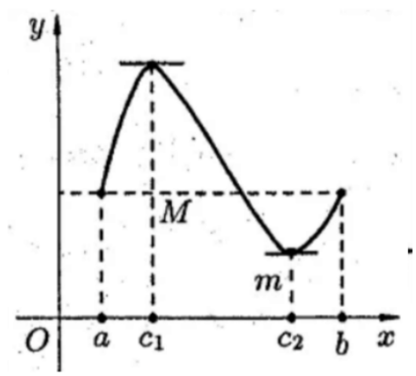

Рис. 4: Касательные параллельна оси Ox.

Теорема 18.2. *(Теорема Лагранжа). Пусть:*
1) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2) Функция f дифференцируема па интервале (a, b).
Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа будет лучше понятен, если саму формулу из теоремы (называемую также формулой конечных приращений) переписать в виде $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Справа стоит тангенс угла наклона прямой, которая называется секущей (см. рисунок 3), а слева - тангенс угла наклона касательной. Таким образом, в теореме утверждается, что для дифференцируемой на интервале и непрерывной на отрезке функции найдётся точка, в которой касательная к графику функции f будет параллельна секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

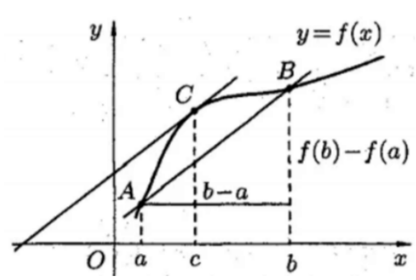

Рис. 5: Секущая AB параллельна касательной, проходящей через точку C.

Билет 19. *Два следствия теоремы Лагранжа. Теорема Коши.*

Предложение 19.1. *(1-е следствие) Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$. Тогда функция f постоянна на (a, b).*

Предложение 19.2. *(2-е следствие) Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a, b). 1) Функция f не убывает на этом интервале тогда и только тогда, когда*

$$f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b).$$

2) Функция f не возрастает на этом интервале тогда и только тогда, когда

$$f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b).$$

Теорема 19.1. *(Теорема Коши). Пусть функции f и g : 1) определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$; 2) дифференцируемы на интервале (a, b); 3) $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.*

Тогда существует точка такая точка $c \in (a, b)$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.