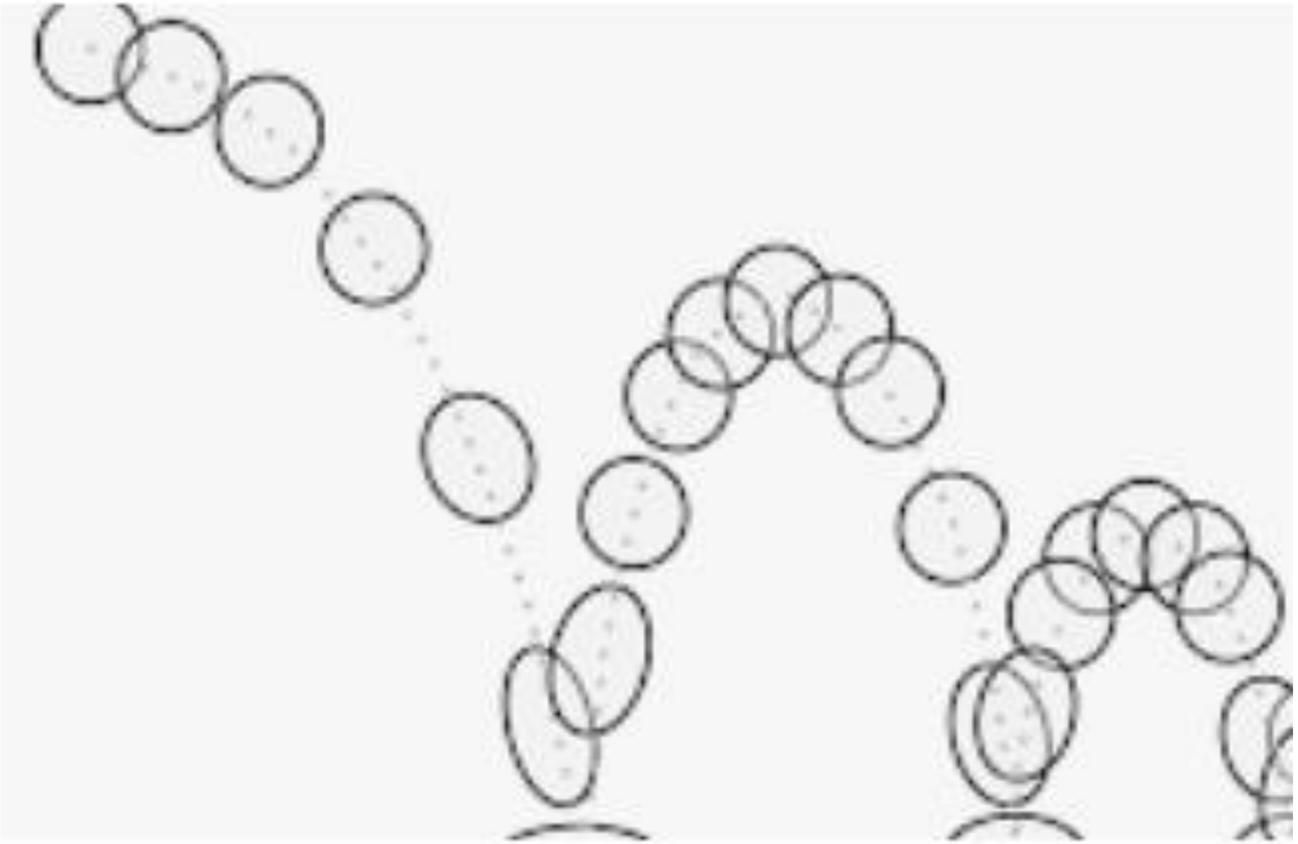
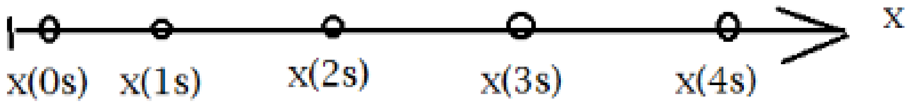
Viikko 1 : Kinematiikkaa



- **Kinematiikan suureet**
- **Kappaleen paikka**
- **Nopeus v**
- **Kiihtyvyys a**

Yksidimensionaalisen liikkeen suureet

Kappaleen paikkakoordinaatti: **x**



Nopeus=
paikan muutos/aikaväli

$$\boldsymbol{v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}}$$

Yks. 1 m/s

Kiihtyvyys=
nopeuden muutos/aikaväli

$$\boldsymbol{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}}$$

Yks. 1 m/s^2

=>

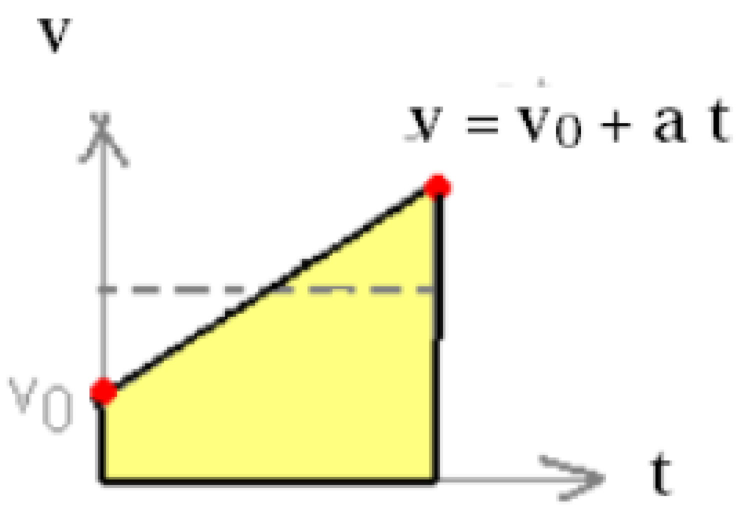
Nopeuden päivitysyhtälö

$$v_2 = v_1 + a*\Delta t$$

Tasaisesti kiihtyvän liikkeen 1D - kaavat

Kiihtyvyys a = vakio

Nopeus kasvaa tasaisesti $\boldsymbol{v = v_0 + a\,t}$



Nopeuskuvaaja on suora viiva

Ajassa t kuljettu matka
= keskinopeus*aika

$$\boldsymbol{\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a\,t^2}$$

Kappaleen paikka x hetkellä t:

$$\boldsymbol{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a\,t^2}$$

x_0 on paikka
hetkellä t=0

Esimerkki:
Juna on edennyt 200 m asemalta ja etenee nopeudella 6.0 m/s. Laske paikka ja nopeus 15 s kuluttua, kun junan kiihtyvyys $a = 0.5\ m/s^2$.

Laskun voi laskea perus-Pythonilla:

```
>>> a=0.5
>>> v0=6
>>> x0=200
>>> t=15
>>> v=v0+a*t
>>> x=x0+v0*t+0.5*a*t**2
>>> print(v)
13.5
>>> print(x)
346.25
```

KAAVAT

$$v = v_0+a*t$$

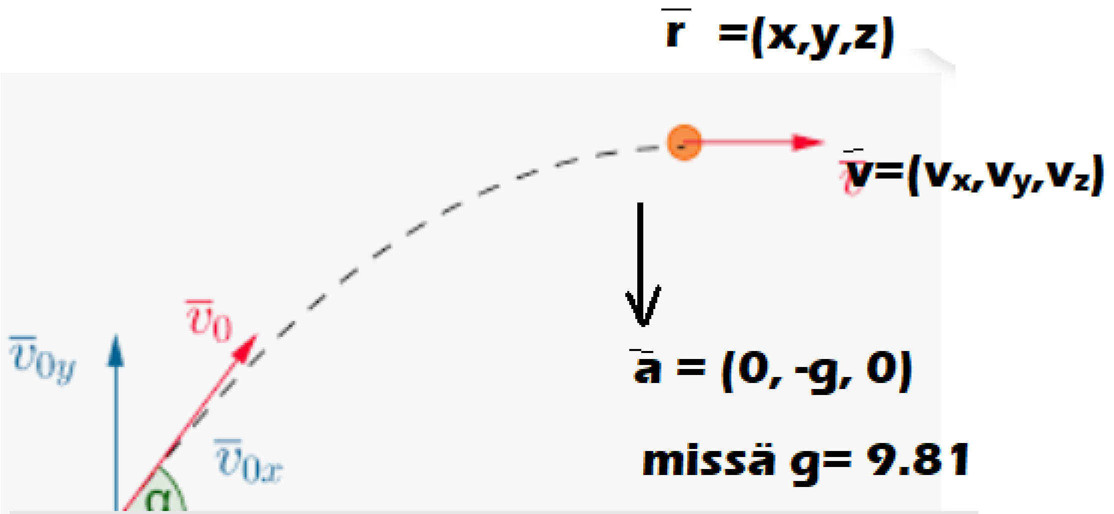
$$x = x_0+v_0*t+ ½\ a*t^2$$

Suureiden 3D määritelmät

Paikkavektori $\bar{r} = (x, y, z)$

Nopeus $\bar{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta\bar{\boldsymbol{r}}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \left(\dfrac{\Delta\boldsymbol{x}}{\Delta\boldsymbol{t}}, \dfrac{\Delta\boldsymbol{y}}{\Delta\boldsymbol{t}}, \dfrac{\Delta\boldsymbol{z}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right)$

Kiihtyvyys $\bar{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\Delta\bar{\boldsymbol{v}}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \left(\dfrac{\Delta\boldsymbol{vx}}{\Delta\boldsymbol{t}}, \dfrac{\Delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{y}}}{\Delta\boldsymbol{t}}, \dfrac{\Delta\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{z}}}{\Delta\boldsymbol{t}}\right)$



Kappaleen rata painovoimakentässä

Tasaisesti kiihtyvän liikkeen 3D -kaavat

- ovat samanlaiset kuin yhdessä dimensiossa. Erona on se, että paikka, nopeus ja kiihtyvyys ovat vektoreita, joilla on kolme komponenttia

Kiihtyvyys =vakiovektori

$$\bar{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_y, \boldsymbol{a}_z)$$

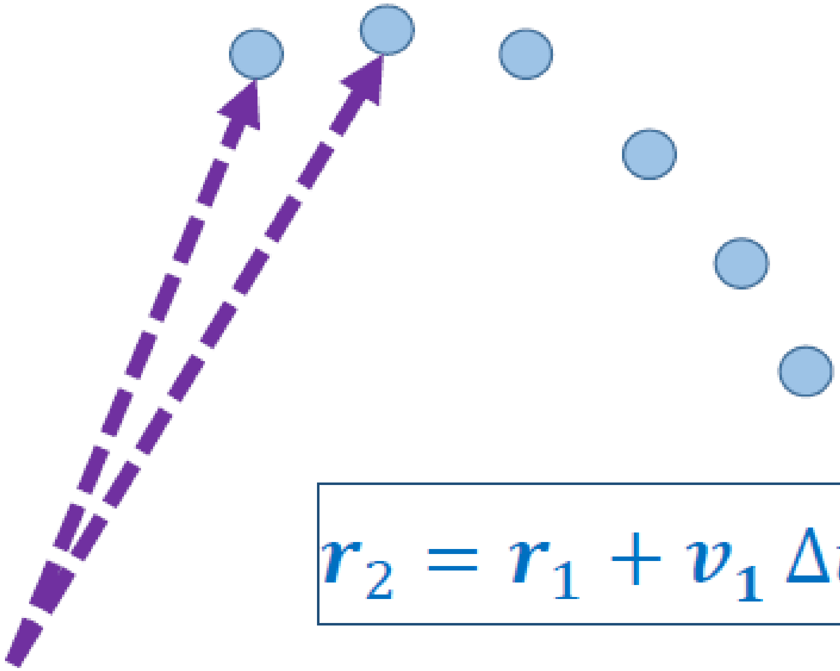
Nopeus kasvaa tasaisesti

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}_0 + \bar{\boldsymbol{a}} * \boldsymbol{t}$$

Jos kappaleen paikkaa hetkellä t = 0 merkitään $\bar{\boldsymbol{r}}_0$:lla, saadaan

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}_0 + \bar{\boldsymbol{v}}_0 * \boldsymbol{t} + \frac{1}{2}\,\bar{\boldsymbol{a}} * \boldsymbol{t}^2$$

Animaatiossa paikka- ja nopeusvektoreita päivitetään iteraatioaskelen Δt määräämin välein



$$\boxed{\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{v}_1\,\Delta t + \frac{1}{2}\mathrm{a}\,\Delta t^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{a}\,\Delta t}$$

Laskuesimerkki. Kivi heitetään 20 m korkean talon katolta vaakasuoraan nopeudella 5 m/s. Laske kiven nopeus ja paikka 2 sekunnin lennon jälkeen.

Käsin laskettuna tarvitaan vektorilaskentaa. PerusPythonissa pitää ladata numpy-kirjasto

$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t$ **=>**

$\bar{v} =$**(5,0,0) + (0, -9.8, 0)*2**

= (5,0,0) + (0, -19.6, 0)

=(5, -19.6, 0)

$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{1}{2}\,\bar{a} * t^2$

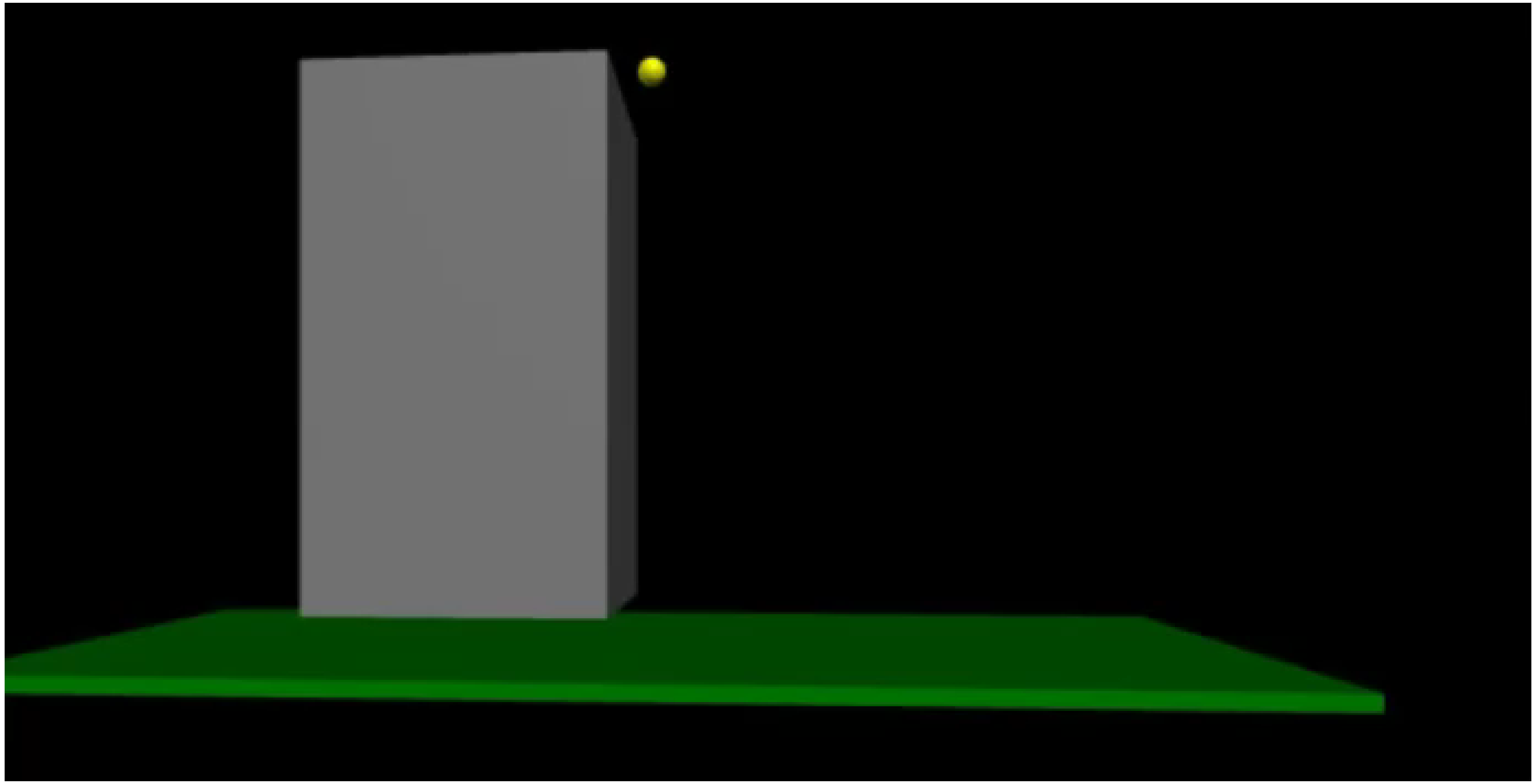
$\bar{r} =$**(0,20,0) + (5,0, 0)*2 +0.5*(0,-9.8,0)*2^2**

= (0,20,0) + (10, 0, 0) +(0,-19.6,0)

=(10, 0.4, 0)

```
>>> import numpy as n
>>> a=n.array([0,-9.8,0])
>>> v0=n.array([5,0,0])
>>> r0=n.array([0,20,0])
>>> t=2.0
>>> v=v0+a*t
>>> r=r0+v0*t+0.5*a*t**2
>>> print(v)
[  5.  -19.6   0. ]
>>> print(r)
[10.   0.4  0. ]
```

Tehtävä ratkeaa myös animaatiolla, johon voi lisätä dynaamisen korkeuden ja ajan näytön



Animaatioilla voi mallintaa sellaisiakin tilanteita, joissa algebrallisen ratkaisun löytäminen on mahdotonta.
Esimerkiksi ilmanvastuksen huomioon ottaminen edellisessä tehtävässä onnistuu vain laskemalla kiven rata numeerisesti piste pisteeltä.

Ao. kuvassa sinisen massan liikeradan laskeminen ei onnistuisi algebrallisesti.