OBLIG 2 Noora Lindeflaten

oppgåve 1

Bredde = x
tykkelse = x
lengde = y

$2x + y = 90 \Rightarrow y = 90 - 2x$

$V = x^2 \cdot y = x^2 \cdot y$

$V(x) = x^2(90-2x)$

$= 90x^2 - 2x^3$

$V'(x) = 180x - 6x^2$

$\frac{6x^2}{6x} = \frac{180x}{6x}$

$\underline{x = 30}$

$y = 90 - 2 \cdot 30$

$\underline{y = 30}$

$V = x^2 \cdot y = 30\,cm^2 \cdot 30\,cm = 27000\,cm^3$

Det største volumet som er lov å sende er $27000\,cm^3$

oppgåve 1 b Sekantsetningen

$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos'(x)(y-x) = \cos$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$$

$$\cos'(x)(y-x) = \cos(y) - \cos(x)$$

$$|\cos'(x)||y-x| = |\cos(y) - \cos(x)|$$

Veit at

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$-\sin(x) \in [-1, 1]$$

$$|x-y| \geq |\cos'(c)||y-x| = |\cos(y) - \cos(x)|$$

oppgåve 1c

$r < 1 \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$

$(1+x)^r \geq 1 + rx$

$f(x) = (1+x)^r - 1 - rx \geq 0$

$f(x) \geq 0$

- Sidan $f(x)$ er eit polynom kan vi derivere

$f'(x) = r(1+x)^{r-1} - r \geq 0$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$

$\Rightarrow (1+x)^r - 1 - rx \geq 0$

$\Rightarrow (1+x)^r \geq 1 + rx$

oppgåve 2

a) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2 + \cos x$

$f'(x) = 6x^2 + 2x - 4 - \sin x$

$f''(x) = 12x + 2 - \cos x$

$f'''(x) = 12 + \sin x$

- Sidan $\sin x$ alltid ligg mellom -1 og 1 i tillegg til at $12 > -1$ og $12 > 1$ viser det at $f'''(x) > 0$

- for å bevise at $f''(x)$ har et nullpunkt i a3
vi antar at $f''(x)$ har to nullpunkt og bruker sekantsetningen

$$\frac{f''(x_2) - f''(x_1)}{x_2 - x_1} = f''(c)$$

der $f''(x_1) = f''(x_2) = 0$

og $x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow f'''(c) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow f'''(c) = 0$

- Vi veit at $f'''(x) > 0$
som gjør at $f'''(c) \neq$
som forteller oss at det
er max 1 nullpunkt

- IVT for å bevise 1
nullpunkt

$f(-\pi) = 12(-\pi) + 2 - \cos(-\pi) = 3 - 12\pi < 0$

$f(0) = 12(0) + 2 - \cos(0) = 1 < 0$

- IVT beviser min 1 nullpunkt
og MVT viser max 1.

Oppgåve 2b

b) $f(x) = 6x^2 + 2x - 4 - \sin x = 0$

Vi veit allerede at $f'''(x) > 0$
som vil sei at $f''(x)$ er
strengt voksende.
Dette beviser at det vil
være et nullpunkt a
som gjør at $f''(x) < 0$
vil $f'(x)$ være strengt
avtagende, og for $f''(x) > 0$
vil den være strengt
voksende

$f'(x) = 12x + 2 - \cos x$

$12x + 2 - \cos x = 0$

$\cos x = 12x + 2$

oppgåve 2

c) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2 + \cos x$

skjæringssetningen gir 3 nullpunkt

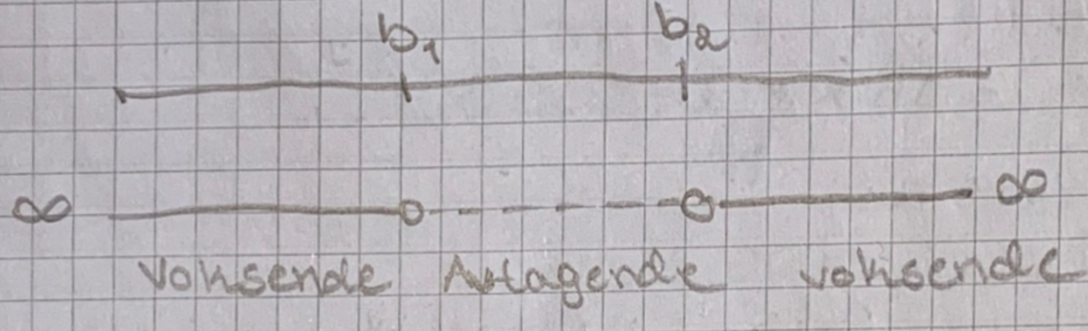
$f(-2) \approx -6.4 < 0$

$f(-1) \approx 1.54 > 0$

$f(0) \approx -1 < 0$

$f(1) \approx -2.46 < 0$

$f(2) \approx 9.58 > 0$



oppgåve 3 a

Vis at punkt $(x, y) = (0, 1)$

ligg på kurva $(x^2 \cdot y^2 + x)^2 = x^2 + y^2$

Set inn $x = 0$ og $y = 1$

$$(0^2+1^2+0)^2 = 0^2+1^2$$

$$\Rightarrow 1 = 1$$

Implisitt derivasjon gir:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2+x\right)^2 = \frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)$$

$$2\left(x^2+y^2+x\right)\cdot\frac{d}{dx}\, x^2+y^2+x = 2x+2y$$

$$2\left(x^2+y^2+x\right)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}+1\right) = 2x+2y\frac{dy}{dx}$$

rekn ut den deriverte $\frac{dy}{dx}$

i $P(x,y) = (0,1)$

$$2\left(0^2+1^2+0\right)\cdot\left(2\cdot 0+2\cdot 1\frac{dy}{dx}+1\right)$$

$$= 2\cdot 0+2\cdot 1\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 2(1)\cdot\left(2\frac{dy}{dx}+1\right) = 2\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 4\frac{dy}{dx}+2 = 2\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 4\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow y-1 = -x$$

3b

$$\left(x(t)^2 + y(t)^2 + x(t)\right)^2$$

$$= x(t)^2 \; y(t)^2$$

$t_0 : (x(t_0), y(t_0)) = 0, 1) \quad x(t_0) = 0$

$y(t_0) = 1$

$x'(t_0) = 41 \qquad y'(t_0) = ?$

$$2\left(x(t_0)^2 + y(t)^2 + x(t)\right)\left(2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) + x'(t)\right)$$

$$= 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t)$$

$$2(0^2 + 1^2 + 0)(2 \cdot 0 \cdot 41 + 2 \cdot 1 \cdot y'(t) + 41)$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot 41 + 2 \cdot 1 \cdot y'(t)$$

$$2(1) \cdot (2 \cdot y'(t) + 41) = 2 \cdot y'(t)$$

$$4 \cdot y'(t) + 82 = 2 \cdot y'(t)$$

$$2 \cdot y'(t) = -82$$

$$y'(t) = -41 \Rightarrow \quad y - 1 = -41x$$

oppgåve 4

a) $f(x) = x - \tan x$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$

regn ut grensene for $f(x)$

$\lim_{x \to -\pi/2^+} \tan x = \lim_{x \to -\pi/2^+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty$

Når $x \to -\pi/2$ og $x > \pi/2$, da er $\cos x < 0$

Siden $\sin x < 0 \Rightarrow -\infty$

$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty$

Når $x \to \pi/2$ og $x < \pi/2$ da er $\cos x \cancel{<} 0$ siden $\sin x > 0 \Rightarrow \infty$

b) Begrunn at f har ein invers funksjon f^{-1}, $\mathbb{R}$ $(-\pi/2, \pi/2)$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} > 0$

Sekantsetningen gir at f er strengt voksende og har derfor ein invers funksjon

4c

$$f(x) = x - \tan = {}^{\pi}/_{4} - 1$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(f^{-1}(x)) = 1 - \frac{1}{\cos^2(\pi/4)} = 1 - \frac{1}{(\sqrt{2}/2)^2}$$

$$= 1 - \frac{4}{2} = 1 - 2 = \underline{\underline{-1}}$$

5 Dersom $T = T(t)$ er temperaturen på Kjell Magne sitt kontor ved tiden t og T ute er den konstante utetemperatur sier Newtons lov:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{ute})$$

der k er ein positiv konstant. Set $T(0) = T_0$ og løysar differensiallikninga ovanfor

$$\int \frac{dT}{T - T_{ute}} = k \int dt \Rightarrow \ln(T - T_{ute}) = -kt + C$$

$$\Rightarrow T - T_{ute} = e^{C} e^{-kt}$$

Set inn $t = 0$ i den siste likninga og får

$$T_0 = T_{ute} + e^c \Rightarrow e^c = T_0 - T_{ute}$$

$$T = T_{ute} + (T_0 - T_{ute})\, e^{-kt}$$

Lar $t = 0$ være kl 00.00 og $T_0 = 18.0$, $T_{ute} = 36.9$

som gir

$$T = -36{,}9 + (18{,}0 - (-36{,}9))\, e^{-kt}$$

$$= 54{,}9\, e^{-kt} - 36{,}9$$

Bruker så at $T = 10{,}8$ kl 01.00 Når $t = 1$

$$10{,}8 = (54{,}9)\, e^{-k \cdot 1} - 36{,}9 \Rightarrow e^{-k} = \frac{10{,}8 + 36{,}9}{54{,}9}$$

$$= \frac{47{,}7}{54{,}9} \Rightarrow k = \ln 54{,}9 - \ln 47{,}7$$

$$T = 54{,}9 \cdot e^{-(\ln 54{,}9 - \ln 47{,}7)t} - 36{,}9$$

Bestem til slutt når vatnet i glaset begynn å fryse Når $T = 0$

$$0 = 54{,}9 \cdot e^{-(\ln 54{,}9 - \ln 47{,}7)t} - 36{,}9$$

$$\Rightarrow e^{-(\ln 54{,}9 - \ln 47{,}7)t} = \frac{36{,}9}{54{,}9}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 54{,}9 - \ln 47{,}7}{\ln 54{,}9 - \ln 36{,}9} \approx$$ 2t og 50 min