Oraux - agrégation externe 2026

Louis-Thibault Gauthier

10 décembre 2025

Table des matières

Chapitre 1

Couplages

Chapitre 2

Leçons d'algèbre

2.1 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Liste des développements :

1. Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

2.1.1 Définitions de différents types d'actions

On pose G un groupe et X un essemble non vide.

Définition

On définit une action de groupe comme la donnée d'un morphisme de groupes φ :

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Bij}(X) \\ g & \mapsto & [x \mapsto \rho(g;x)] \end{array} \right.$$

Exemple :

— G agit sur lui-même par translation ou encore par conjugaison ;

— G agit sur G/H (H sous-groupe de G) par translation : $g \cdot xH = gxH$;

— S_n agit sur $\{1, \ldots, n\}$ de façon naturelle ;

Définition

Soit $x \in X$.

— On appelle orbite de x, et l'on note $\mathrm{Orb}(x)$, l'ensemble

$$\{\rho(g,x) \mid g \in G\}$$

— On appelle stabilisateur de x, et l'on note $\mathrm{Stab}(x)$, l'ensemble

$$\{g \in G \mid \rho(g,x) = x\}$$

— On appelle fixateur de g, et l'on note $\mathrm{Fix}(g)$, l'ensemble

$$\{x \in X \mid \rho(g,x) = x\}$$

Définition

On dit que ρ est :

— (simplement) transitive si pour tout $(x,y) \in X^2$, il existe (un unique) $g \in G$ tel que $\rho(g,x) = y$;

— libre si pour tout $x \in X$, $\mathrm{Stab}(x) = \{e_G\}$;

— fidèle si ϕ (le morphisme associé) est injective (ou si l'intersection de tous les stabilisateurs vaut e_G).

Exemple :

— L'action de G sur $\mathrm{Orb}(x)$ est transitive ;

— L'action de G sur G par translation à gauche est libre (et donc fidèle) ;

— L'action de $G/\operatorname{Ker}\phi$ sur X est fidèle ;

— L'action de $\mathcal{A}_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$ est $(n-2)$-transitive.

Proposition

Une action est fidèle si et seulement si ϕ, le morphisme associé est injectif ssi l'intersection de tous les stabilisateurs vaut e_G.

Démonstration. Si ϕ est injectif, soit $g \in \bigcap_x \mathrm{Stab(x)}$. Alors $\forall x \in X$, $g \cdot x = x$, et donc par injectivité $g = e_G$. Si $\bigcap_x \mathrm{Stab(x)} = \{e_G\}$, alors il est clair que ϕ est injectif. □

Définition-Proposition

On définit la relation d'équivalence : $x \sim y$ si $y \in \mathrm{Orb}(x)$.

Notation

Désormais, dans cette sous-section : G est un groupe fini, X est un ensemble fini et ρ est une action de G sur X.

Théorème (Formule des classes)

X est fini :

$$|X| = \sum_{x \in X/\sim} |\mathrm{Orb}(x)|$$

Et on a : $\mathrm{Orb}(x)$ et $G/\mathrm{Stab}(x)$ sont en bijection.

Démonstration. Si G agit sur X, les orbites sont des classes d'équivalence. Elles sont disjointes, et forment une partition de X, reste à évaluer le cardinal d'une classe, or on a une bijection, pour $x \in X$:

$$f : \begin{array}{ccc} G/\mathrm{Stab}(x) & \to & Gx \\ g\mathrm{Stab}(x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

par passage au quotient de $G \to Gx, g \mapsto g \cdot x$. □

Proposition (Formule de Burnside :)

Si G et X sont finis, alors

$$|X/\sim| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

Démonstration. Soit E l'ensemble des couples (g, x) où $g \cdot x = x$, alors

$$|E| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)|$$

Si Ω est une transversale de X (donc de cardinal le nombre des orbites), on a :

$$|E| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} = |G| \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \frac{1}{|Gx|} = |G| \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \frac{1}{|\omega|} = |G||\Omega|$$

□

Proposition

Soit G un groupe de cardinal $p^{\alpha}(> 1)$, alors le centre de G n'est pas réduit à l'élément neutre.

Démonstration. On considère l'action de G sur lui même par automorphisme intérieur. par la formule des classe on a :

$$|G| = |\mathcal{Z}(G)| + \sum_{x \in A} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x)|}$$

Avec A une transversale pour l'ensemble des orbites non réduites à un point. On en déduit que puisque le centre est non vide, qu'il est un multiple de p. □

Application

Il n'existe que 2 groupes d'ordre p^2 à isomorphisme près.

Démonstration. D'après la proposition précédente un tel groupe G a son centre de cardinal p ou p^2. Si il est de cardinal p un élément de G est dans $\mathcal{Z}(G)$ si et seulement si son centralisateur $Z_G(g)$ est G. Comme le centralisateur d'un élément $g \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$ contient g et contient $\mathcal{Z}(G)$, il est donc d'ordre $> p$. Donc $\mathcal{Z}(G) = G$, ce qui donne une contradiction. Donc G est abélien. Soit G est monogène et à se moment là il est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, sinon soit $g \in G$, qui n'est pas l'élément unité, le sous-groupe H engendré par g est d'ordre p. Donc G/H est d'ordre p donc isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donc G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

2.2 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Liste des développements :

1.

2.3 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

— Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

2.4 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

— Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

2.5 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

—

2.6 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathbf{GL}(E)$. Applications.

—

2.7 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

— Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

2.8 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

—

2.9 121 : Nombres premiers. Applications.

—

2.10 122 : Anneaux principaux. Applications.

—

2.11 123 : Corps finis. Applications.

—

2.12 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

—

2.13 127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

2.14 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

—

2.15 142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

—

2.16 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

—

2.17 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

—

2.18 149 : Déterminant. Exemples et applications.

—

2.19 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

—

2.20 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

—

2.21 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

—

2.22 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

—

2.23 155 : Exponentielle de matrices. Applications.

—

2.24 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

—

2.25 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

—

2.26 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

—

2.27 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

—

2.28 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

—

2.29 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

—

2.30 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, Applications.

—

2.31 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

—

2.32 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

—

2.33 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

—

2.34 191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

—

Chapitre 3

Leçons d'analyse

3.1 201 : Espaces de fonctions ; exemples et applications.

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

3.2 203 : Utilisation de la notion de compacité.

—

3.3 204 : Connexité. Exemples et applications.

—

3.4 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

3.5 206 : Connexité. Exemples et applications.

— Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

3.6 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

3.7 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

—

3.8 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

3.9 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

—

3.10 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

—

3.11 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

—

3.12 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

—

3.13 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

—

3.14 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

—

3.15 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

—

3.16 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

—

3.17 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

—

3.18 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

—

3.19 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

—

3.20 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

—

3.21 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

—

3.22 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

—

3.23 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

—

3.24 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

—

3.25 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

—

3.26 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

—

3.27 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

—

3.28 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

—

3.29 250 : Transformation de Fourier. Applications.

—

3.30 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

—

3.31 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications

—

3.32 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications

—

3.33 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

—

3.34 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités

—

Chapitre 4

Développement d’algèbre

4.1 Théorème de la base de Burnside

Soit G un p-groupe (groupe fini d'ordre une puissance de p premier).

Définition. — *Un sous-groupe maximal de G est un sous-groupe strict de G et maximal pour l'inclusion. On note $\mathcal{M}$ leur ensemble.*

— *Le normalisateur de H dans G, $N_G(H)$ est le sous-groupe de G qui laisse stable H par l'action de conjugaison.*

Lemme. *Soit $H \in \mathcal{M}$, alors $H \lhd G$, et $G/H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On fait agir H sur G/H par multiplication des classes à gauche, on a, par la formule des classes

$$0 \equiv |G/H| \equiv \left|(G/H)^H\right| [p] \tag{4.1}$$

Donc p divise le cardinal de $(G/H)^H$. Or :

$$\begin{aligned} gH \in (G/H)^H &\iff \forall h \in H; hgH = gH \\ &\iff HgH = gH \\ &\iff Hg = gH \\ &\iff g \in N_G(H) \end{aligned}$$

On peut alors considérer $\psi : \begin{pmatrix} N_G(H) & \to & (G/H)^H \\ g & \mapsto & gH \end{pmatrix}$ application qui est donc surjective, dont le nombre d'antécédents d'un élément est $|H|$, donc on a l'égalité $|N_G(H)| = |H| \times \underbrace{\left|(G/H)^H\right|}_{\substack{\geq p \\ \text{par } (4.1)}}$, et donc on a $|N_G(H)| > |H|$, et donc $H \subsetneq N_G(H) \subseteq G$, ainsi par maximalité :

$$N_G(H) = G$$

C'est à dire $H \lhd G$.
De plus, comme H est maximal dans G, G/H n'a pas de sous-groupe propre (correspondance des sous-groupes de G/H) donc G/H est cyclique (et de cardinal une puissance de p) ce qui entraine :

$$G/H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

□

Théorème. *Les parties génératrices minimales de G ont le même cardinal.*

Démonstration. Considérons le sous groupe $\Phi(G) := \bigcap_{H\in\mathcal{M}} H \lhd G$, notons $\pi : G \to G/\Phi(G)$.
Soit $H \in \mathcal{M}$, d'après le lemme précédent, G/H est abélien, donc $D(G) \subseteq H$, donc $D(G) \subset \Phi(G)$, donc $G/\Phi(G)$ est abélien, en particulier c'est un $\mathbf{Z}$-module.
Soit $x \in G$, soit $H \in \mathcal{M}$, on note $\sigma : G \to G/H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors $\sigma(x^p) = p\sigma(x) = 0$, ainsi $x^p \in \operatorname{Ker}(\sigma) = H$, donc

$$\forall x \in G; x^p \in \Phi(G)$$

Ainsi, pour tout $x \in G$ $\pi(x)^p = 1$, ainsi, de la structure de $\mathbb{Z}$-module sur $G/\Phi(G)$ on en déduit une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie, dont toutes les familles génératrices minimales sont des bases, et en particulier ont le même cardinal. □

On a démontré que les parties génératrices minimal générant le groupe entier ont même cardinal, seulement pour $G/\Phi(G)$, le lemme suivant conclut la preuve :

Lemme. *$(g_i)_{i\in I}$ est génératrice de G si et seulement si $(\pi(g_i))_{i\in I}$ est génératrice de $G/\Phi(G)$.*

Démonstration. L'implication directe est immédiate par surjectivité de π. Pour la réciproque, raisonnons par contraposée. Si (g_i) n'engendre pas G, considérons un sous-groupe maximal H de G contenant le sous-groupe engendré par la famille (g_i). Alors $\Phi(G) \subseteq H \subsetneq G$, donc $\pi(H) \subsetneq G/\Phi(G)$, et la famille $(\pi(g_i))$ n'engendre pas $G/\Phi(G)$.

□