

ORAUX - AGRÉGATION EXTERNE 2027

LOUIS-THIBAUT GAUTHIER

2 JUILLET 2025

Table des matières

1	Leçons d'algèbre	4
1.1	101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.	6
1.2	102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.	6
1.3	103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.	7
1.4	104 : Groupes finis. Exemples et applications.	7
1.5	105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.	7
1.6	106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.	7
1.7	108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.	7
1.8	120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.	7
1.9	121 : Nombres premiers. Applications.	7
1.10	122 : Anneaux principaux. Applications.	7
1.11	123 : Corps finis. Applications.	7
1.12	125 : Extensions de corps. Exemples et applications.	7
1.13	127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.	7
1.14	141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.	7
1.15	142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.	7
1.16	144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.	7
1.17	148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.	7
1.18	149 : Déterminant. Exemples et applications.	8
1.19	150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.	8
1.20	151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.	8
1.21	152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.	8
1.22	153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.	8
1.23	155 : Exponentielle de matrices. Applications.	8
1.24	156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.	8
1.25	157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.	8
1.26	158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).	8
1.27	159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.	8
1.28	161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.	8
1.29	162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.	8
1.30	170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, Applications.	9
1.31	171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.	9
1.32	181 : Convexité dans \mathbb{R}^n . Applications en algèbre et en géométrie.	9
1.33	190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.	9
1.34	191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.	9

2	Leçons d'analyse	10
2.1	201 : Espaces de fonctions ; exemples et applications.	12
2.2	203 : Utilisation de la notion de compacité.	12
2.3	204 : Connexité. Exemples et applications.	12
2.4	205 : Espaces complets. Exemples et applications.	12
2.5	206 : Connexité. Exemples et applications.	12
2.6	208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.	12
2.7	209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.	12
2.8	213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.	12
2.9	214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.	12
2.10	215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.	12
2.11	218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.	12
2.12	219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.	12
2.13	220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.	12
2.14	221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.	12
2.15	223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications	13
2.16	224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.	13
2.17	226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.	13
2.18	228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.	13
2.19	229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.	13
2.20	230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.	13
2.21	234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.	13
2.22	235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.	13
2.23	236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.	13
2.24	239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	13
2.25	241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.	13
2.26	243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.	13
2.27	245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de \mathbb{C} . Exemples et applications.	14
2.28	246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.	14
2.29	250 : Transformation de Fourier. Applications.	14
2.30	253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.	14
2.31	261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications	14
2.32	262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications	14
2.33	264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.	14
2.34	266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités	14
3	Développement d'algèbre	15
3.1	Théorème de la base de Burnside	17

Chapitre 1

Leçons d'algèbre

1.1 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Liste des développements :

1. Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

Proposition

Une action est fidèle si et seulement si ϕ , le morphisme associé est injectif ssi l'intersection de tous les stabilisateurs vaut e_G .

Démonstration. Si ϕ est injectif, soit $g \in \bigcap_x \text{Stab}(x)$. Alors $\forall x \in X, g \cdot x = x$, et donc par injectivité $g = e_G$. Si $\bigcap_x \text{Stab}(x) = \{e_G\}$, alors il est clair que ϕ est injectif. \square

Théorème (Formule des classes)

X est fini :

$$|X| = \sum_{x \in X/\sim} |\text{Orb}(x)|$$

Et on a : $\text{Orb}(x)$ et $G/\text{Stab}(x)$ sont en bijection.

Démonstration. Si G agit sur X , les orbites sont des classes d'équivalence. Elles sont disjointes, et forment une partition de X , reste à évaluer le cardinal d'une classe, or on a une bijection, pour $x \in X$:

$$f: \begin{array}{ccc} G/\text{Stab}(x) & \rightarrow & Gx \\ g\text{Stab}(x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

par passage au quotient de $G \rightarrow Gx, g \mapsto g \cdot x$. \square

Proposition (Formule de Burnside :)

Si G et X sont finis, alors

$$|X/\sim| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

Démonstration. Soit E l'ensemble des couples (g, x) où $g \cdot x = x$, alors

$$|E| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$$

Si Ω est une transversale de X (donc de cardinal le nombre des orbites), on a :

$$|E| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|} = |G| \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \frac{1}{|\text{Stab}(x)|} = |G| \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \frac{1}{|\omega|} = |G| |\Omega|$$

\square

Proposition

Soit G un groupe de cardinal $p^\alpha (> 1)$, alors le centre de G n'est pas réduit à l'élément neutre.

Démonstration. On considère l'action de G sur lui-même par automorphisme intérieur. par la formule des classes on a :

$$|G| = |\mathcal{Z}(G)| + \sum_{x \in A} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

Avec A une transversale pour l'ensemble des orbites non réduites à un point. On en déduit que puisque le centre est non vide, qu'il est un multiple de p . \square

Application

Il n'existe que 2 groupes d'ordre p^2 à isomorphisme près.

Démonstration. D'après la proposition précédente un tel groupe G a son centre de cardinal p ou p^2 . Si il est de cardinal p un élément de G est dans $\mathcal{Z}(G)$ si et seulement si son centralisateur $Z_G(g)$ est G . Comme le centralisateur d'un élément $g \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$ contient g et contient $\mathcal{Z}(G)$, il est donc d'ordre $> p$. Donc $\mathcal{Z}(G) = G$, ce qui donne une contradiction. Donc G est abélien. Soit G est monogène et à se moment là il est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, sinon soit $g \in G$, qui n'est pas l'élément unité, le sous-groupe H engendré par g est d'ordre p . Donc G/H est d'ordre p donc isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donc G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. \square

1.2 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

1.3 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

— Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

1.4 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

— Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

1.5 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

—

1.6 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $\text{GL}(E)$. Applications.

—

1.7 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

— Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

1.8 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

—

1.9 121 : Nombres premiers. Applications.

—

1.10 122 : Anneaux principaux. Applications.

—

1.11 123 : Corps finis. Applications.

—

1.12 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

—

1.13 127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

1.14 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

—

1.15 142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

—

1.16 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

—

1.17 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

—

1.18 149 : Déterminant. Exemples et applications.

—

1.19 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

—

1.20 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

—

1.21 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

—

1.22 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

—

1.23 155 : Exponentielle de matrices. Applications.

—

1.24 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

—

1.25 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

—

1.26 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

—

1.27 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

—

1.28 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

—

1.29 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

—

1.30 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, Applications.

—

1.31 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

—

1.32 181 : Convexité dans \mathbb{R}^n . Applications en algèbre et en géométrie.

—

1.33 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

—

1.34 191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

—

Chapitre 2

Leçons d'analyse

2.1 201 : Espaces de fonctions ; exemples et applications.

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

2.2 203 : Utilisation de la notion de compacité.

—

2.3 204 : Connexité. Exemples et applications.

—

2.4 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

2.5 206 : Connexité. Exemples et applications.

— Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

2.6 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

2.7 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

—

2.8 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

2.9 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

—

2.10 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.

—

2.11 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

—

2.12 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

—

2.13 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

—

2.14 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

—

2.15 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

—

2.16 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

—

2.17 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

—

2.18 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

—

2.19 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

—

2.20 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

—

2.21 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

—

2.22 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

—

2.23 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

—

2.24 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

—

2.25 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

—

2.26 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

—

2.27 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de \mathbb{C} . Exemples et applications.

—

2.34 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités

—

2.28 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

—

2.29 250 : Transformation de Fourier. Applications.

—

2.30 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

—

2.31 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications

—

2.32 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications

—

2.33 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

—

Chapitre 3

Développement d'algèbre

3.1 Théorème de la base de Burnside

Soit G un p -groupe (groupe fini d'ordre une puissance de p premier).

Définition. — *Un sous-groupe maximal de G est un sous-groupe strict de G et maximal pour l'inclusion. On note \mathcal{M} leur ensemble.*

— *Le normalisateur de H dans G , $N_G(H)$ est le sous-groupe de G qui laisse stable H par l'action de conjugaison.*

Lemme. *Soit $H \in \mathcal{M}$, alors $H \triangleleft G$, et $G/H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Démonstration. On fait agir H sur G/H par multiplication des classes à gauche, on a, par la formule des classes

$$0 \equiv |G/H| \equiv |(G/H)^H| [p] \quad (3.1)$$

Donc p divise le cardinal de $(G/H)^H$. Or :

$$\begin{aligned} gH \in (G/H)^H &\iff \forall h \in H; hgH = gH \\ &\iff HgH = gH \\ &\iff Hg = gH \\ &\iff g \in N_G(H) \end{aligned}$$

On peut alors considérer $\psi : \begin{pmatrix} N_G(H) & \rightarrow & (G/H)^H \\ g & \mapsto & gH \end{pmatrix}$ application qui est donc surjective, dont le nombre d'antécédents d'un élément est $|H|$, donc on a l'égalité $|N_G(H)| = |H| \times \underbrace{|(G/H)^H|}_{\substack{\geq p \\ \text{par (3.1)}}}$, et donc on a $|N_G(H)| > |H|$, et donc $H \subsetneq N_G(H) \subseteq G$,

ainsi par maximalité :

$$N_G(H) = G$$

C'est à dire $H \triangleleft G$.

De plus, comme H est maximal dans G , G/H n'a pas de sous-groupe propre (correspondance des sous-groupes de G/H) donc G/H est cyclique (et de cardinal une puissance de p) ce qui entraîne :

$$G/H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

□

Démonstration. Considérons le sous groupe $\Phi(G) := \bigcap_{H \in \mathcal{M}} H \triangleleft G$, notons $\pi : G \rightarrow G/\Phi(G)$.

Soit $H \in \mathcal{M}$, d'après le lemme précédent, G/H est abélien, donc $D(G) \subseteq H$, donc $D(G) \subset \Phi(G)$, donc $G/\Phi(G)$ est abélien, en particulier c'est un \mathbf{Z} -module.

Soit $x \in G$, soit $H \in \mathcal{M}$, on note $\sigma : G \rightarrow G/H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors $\sigma(x^p) = p\sigma(x) = 0$, ainsi $x^p \in \text{Ker}(\sigma) = H$, donc

$$\forall x \in G; x^p \in \Phi(G)$$

Ainsi, pour tout $x \in G$ $\pi(x)^p = 1$, ainsi, de la structure de \mathbb{Z} -module sur $G/\Phi(G)$ on en déduit une structure de \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension finie, dont toutes les familles génératrices minimales sont des bases, et en particulier ont le même cardinal. □

On a démontré que les parties génératrices minimal générant le groupe entier ont même cardinal, seulement pour $G/\Phi(G)$, le lemme suivant conclut la preuve :

Lemme. $(g_i)_{i \in I}$ est génératrice de G si et seulement si $(\pi(g_i))_{i \in I}$ est génératrice de $G/\Phi(G)$.

Démonstration. L'implication directe est immédiate par surjectivité de π . Pour la réciproque, raisonnons par contraposée. Si (g_i) n'engendre pas G , considérons un sous-groupe maximal H de G contenant le sous-groupe engendré par la famille (g_i) . Alors $\Phi(G) \subseteq H \subsetneq G$, donc $\pi(H) \subsetneq G/\Phi(G)$, et la famille $(\pi(g_i))$ n'engendre pas $G/\Phi(G)$. □

Théorème. *Les parties génératrices minimales de G ont le même cardinal.*