

# ORAUX - AGRÉGATION EXTERNE 2027

LOUIS-THIBAUT GAUTHIER

3 JUILLET 2025



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Leçons d'algèbre</b>	<b>4</b>
1.1	101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.	6
1.2	102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.	6
1.3	103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.	7
1.4	104 : Groupes finis. Exemples et applications.	7
1.5	105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.	7
1.6	106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ , sous-groupes de $GL(E)$ . Applications.	7
1.7	108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.	7
1.8	120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.	7
1.9	121 : Nombres premiers. Applications.	7
1.10	122 : Anneaux principaux. Applications.	7
1.11	123 : Corps finis. Applications.	7
1.12	125 : Extensions de corps. Exemples et applications.	7
1.13	127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.	7
1.14	141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.	7
1.15	142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.	7
1.16	144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.	7
1.17	148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.	7
1.18	149 : Déterminant. Exemples et applications.	8
1.19	150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.	8
1.20	151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.	8
1.21	152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.	8
1.22	153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.	8
1.23	155 : Exponentielle de matrices. Applications.	8
1.24	156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.	8
1.25	157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.	8
1.26	158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).	8
1.27	159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.	8
1.28	161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.	8
1.29	162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.	8
1.30	170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, Applications.	9
1.31	171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.	9
1.32	181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$ . Applications en algèbre et en géométrie.	9
1.33	190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.	9
1.34	191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.	9

<b>2</b>	<b>Leçons d'analyse</b>	<b>10</b>
2.1	201 : Espaces de fonctions ; exemples et applications.	12
2.2	203 : Utilisation de la notion de compacité.	12
2.3	204 : Connexité. Exemples et applications.	12
2.4	205 : Espaces complets. Exemples et applications.	12
2.5	206 : Connexité. Exemples et applications.	12
2.6	208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.	12
2.7	209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.	12
2.8	213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.	12
2.9	214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.	12
2.10	215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.	12
2.11	218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.	12
2.12	219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.	12
2.13	220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.	12
2.14	221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.	12
2.15	223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.	13
2.16	224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.	13
2.17	226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.	13
2.18	228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.	13
2.19	229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.	13
2.20	230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.	13
2.21	234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.	13
2.22	235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.	13
2.23	236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.	13
2.24	239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.	13
2.25	241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.	13
2.26	243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.	13
2.27	245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.	14
2.28	246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.	14
2.29	250 : Transformation de Fourier. Applications.	14
2.30	253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.	14
2.31	261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications	14
2.32	262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications	14
2.33	264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.	14
2.34	266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités	14
<b>3</b>	<b>Développement d'algèbre</b>	<b>15</b>
3.1	Théorème de la base de Burnside	17



# Chapitre 1

## Leçons d'algèbre

## 1.1 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

### Liste des développements :

1. Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

### Proposition

Une action est fidèle si et seulement si  $\phi$ , le morphisme associé est injectif ssi l'intersection de tous les stabilisateurs vaut  $e_G$ .

*Démonstration.* Si  $\phi$  est injectif, soit  $g \in \bigcap_x \text{Stab}(x)$ . Alors  $\forall x \in X, g \cdot x = x$ , et donc par injectivité  $g = e_G$ . Si  $\bigcap_x \text{Stab}(x) = \{e_G\}$ , alors il est clair que  $\phi$  est injectif.  $\square$

### Théorème (Formule des classes)

$X$  est fini :

$$|X| = \sum_{x \in X/\sim} |\text{Orb}(x)|$$

Et on a :  $\text{Orb}(x)$  et  $G/\text{Stab}(x)$  sont en bijection.

*Démonstration.* Si  $G$  agit sur  $X$ , les orbites sont des classes d'équivalence. Elles sont disjointes, et forment une partition de  $X$ , reste à évaluer le cardinal d'une classe, or on a une bijection, pour  $x \in X$  :

$$f: \begin{array}{ccc} G/\text{Stab}(x) & \rightarrow & Gx \\ g\text{Stab}(x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

par passage au quotient de  $G \rightarrow Gx, g \mapsto g \cdot x$ .  $\square$

### Proposition (Formule de Burnside :)

Si  $G$  et  $X$  sont finis, alors

$$|X/\sim| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

*Démonstration.* Soit  $E$  l'ensemble des couples  $(g, x)$  où  $g \cdot x = x$ , alors

$$|E| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$$

Si  $\Omega$  est une transversale de  $X$  (donc de cardinal le nombre des orbites), on a :

$$|E| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|} = |G| \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \frac{1}{|\text{Stab}(x)|} = |G| \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \frac{1}{|\omega|} = |G| |\Omega|$$

$\square$

### Proposition

Soit  $G$  un groupe de cardinal  $p^\alpha (> 1)$ , alors le centre de  $G$  n'est pas réduit à l'élément neutre.

*Démonstration.* On considère l'action de  $G$  sur lui-même par automorphisme intérieur. par la formule des classes on a :

$$|G| = |\mathcal{Z}(G)| + \sum_{x \in A} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}$$

Avec  $A$  une transversale pour l'ensemble des orbites non réduites à un point. On en déduit que puisque le centre est non vide, qu'il est un multiple de  $p$ .  $\square$

### Application

Il n'existe que 2 groupes d'ordre  $p^2$  à isomorphisme près.

*Démonstration.* D'après la proposition précédente un tel groupe  $G$  a son centre de cardinal  $p$  ou  $p^2$ . Si il est de cardinal  $p$  un élément de  $G$  est dans  $\mathcal{Z}(G)$  si et seulement si son centralisateur  $Z_G(g)$  est  $G$ . Comme le centralisateur d'un élément  $g \in G \setminus \mathcal{Z}(G)$  contient  $g$  et contient  $\mathcal{Z}(G)$ , il est donc d'ordre  $> p$ . Donc  $\mathcal{Z}(G) = G$ , ce qui donne une contradiction. Donc  $G$  est abélien. Soit  $G$  est monogène et à se moment là il est isomorphe à  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ , sinon soit  $g \in G$ , qui n'est pas l'élément unité, le sous-groupe  $H$  engendré par  $g$  est d'ordre  $p$ . Donc  $G/H$  est d'ordre  $p$  donc isomorphe à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Donc  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .  $\square$

## 1.2 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

**1.3 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.**

— Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

**1.4 104 : Groupes finis. Exemples et applications.**

— Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

**1.5 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.**

—

**1.6 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $\text{GL}(E)$ . Applications.**

—

**1.7 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.**

— Théorème de la base de Burnside. Un max de maths p13.

**1.8 120 : Anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.**

—

**1.9 121 : Nombres premiers. Applications.**

—

**1.10 122 : Anneaux principaux. Applications.**

—

**1.11 123 : Corps finis. Applications.**

—

**1.12 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.**

—

**1.13 127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.**

**1.14 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**

—

**1.15 142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.**

—

**1.16 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.**

—

**1.17 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.**

—



**1.18 149 : Déterminant. Exemples et applications.**

—

**1.19 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.**

—

**1.20 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**

—

**1.21 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**

—

**1.22 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.**

—

**1.23 155 : Exponentielle de matrices. Applications.**

—

**1.24 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.**

—

**1.25 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**

—

**1.26 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).**

—

**1.27 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.**

—

**1.28 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.**

—

**1.29 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.**

—

**1.30 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, Applications.**

—

**1.31 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.**

—

**1.32 181 : Convexité dans  $\mathbb{R}^n$ . Applications en algèbre et en géométrie.**

—

**1.33 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**

—

**1.34 191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.**

—



# Chapitre 2

## Leçons d'analyse

**2.1 201 : Espaces de fonctions ; exemples et applications.**

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

**2.2 203 : Utilisation de la notion de compacité.**

—

**2.3 204 : Connexité. Exemples et applications.**

—

**2.4 205 : Espaces complets. Exemples et applications.**

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

**2.5 206 : Connexité. Exemples et applications.**

— Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

**2.6 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.**

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

**2.7 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.**

—

**2.8 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.**

— Théorèmes de Banach-Alaoglu. 40 dev d'analyse p27.

**2.9 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.**

—

**2.10 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.**

—

**2.11 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.**

—

**2.12 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.**

—

**2.13 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.**

—

**2.14 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.**

—

**2.15 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.**

—

**2.16 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.**

—

**2.17 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.**

—

**2.18 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.**

—

**2.19 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**

—

**2.20 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**

—

**2.21 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.**

—

**2.22 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.**

—

**2.23 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.**

—

**2.24 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**

—

**2.25 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**

—

**2.26 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**

—

**2.27 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.**

—

**2.34 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités**

—

**2.28 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.**

—

**2.29 250 : Transformation de Fourier. Applications.**

—

**2.30 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.**

—

**2.31 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications**

—

**2.32 262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications**

—

**2.33 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**

—





# Chapitre 3

## Développement d'algèbre

### 3.1 Théorème de la base de Burnside

Soit  $G$  un  $p$ -groupe (groupe fini d'ordre une puissance de  $p$  premier).

**Définition.** — *Un sous-groupe maximal de  $G$  est un sous-groupe strict de  $G$  et maximal pour l'inclusion. On note  $\mathcal{M}$  leur ensemble.*

— *Le normalisateur de  $H$  dans  $G$ ,  $N_G(H)$  est le sous-groupe de  $G$  qui laisse stable  $H$  par l'action de conjugaison.*

**Lemme.** *Soit  $H \in \mathcal{M}$ , alors  $H \triangleleft G$ , et  $G/H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* On fait agir  $H$  sur  $G/H$  par multiplication des classes à gauche, on a, par la formule des classes

$$0 \equiv |G/H| \equiv |(G/H)^H| [p] \quad (3.1)$$

Donc  $p$  divise le cardinal de  $(G/H)^H$ . Or :

$$\begin{aligned} gH \in (G/H)^H &\iff \forall h \in H; hgH = gH \\ &\iff HgH = gH \\ &\iff Hg = gH \\ &\iff g \in N_G(H) \end{aligned}$$

On peut alors considérer  $\psi : \begin{pmatrix} N_G(H) & \rightarrow & (G/H)^H \\ g & \mapsto & gH \end{pmatrix}$  application qui est donc surjective, dont le nombre d'antécédents d'un élément est  $|H|$ , donc on a l'égalité  $|N_G(H)| = |H| \times \underbrace{|(G/H)^H|}_{\substack{\geq p \\ \text{par (3.1)}}}$ , et donc on a  $|N_G(H)| > |H|$ , et donc  $H \subsetneq N_G(H) \subseteq G$ ,

ainsi par maximalité :

$$N_G(H) = G$$

C'est à dire  $H \triangleleft G$ .

De plus, comme  $H$  est maximal dans  $G$ ,  $G/H$  n'a pas de sous-groupe propre (correspondance des sous-groupes de  $G/H$ ) donc  $G/H$  est cyclique ( et de cardinal une puissance de  $p$ ) ce qui entraîne :

$$G/H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

□

*Démonstration.* Considérons le sous groupe  $\Phi(G) := \bigcap_{H \in \mathcal{M}} H \triangleleft G$ , notons  $\pi : G \rightarrow G/\Phi(G)$ .

Soit  $H \in \mathcal{M}$ , d'après le lemme précédent,  $G/H$  est abélien, donc  $D(G) \subseteq H$ , donc  $D(G) \subset \Phi(G)$ , donc  $G/\Phi(G)$  est abélien, en particulier c'est un  $\mathbf{Z}$ -module.

Soit  $x \in G$ , soit  $H \in \mathcal{M}$ , on note  $\sigma : G \rightarrow G/H = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , alors  $\sigma(x^p) = p\sigma(x) = 0$ , ainsi  $x^p \in \text{Ker}(\sigma) = H$ , donc

$$\forall x \in G; x^p \in \Phi(G)$$

Ainsi, pour tout  $x \in G$   $\pi(x)^p = 1$ , ainsi, de la structure de  $\mathbb{Z}$ -module sur  $G/\Phi(G)$  on en déduit une structure de  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de dimension finie, dont toutes les familles génératrices minimales sont des bases, et en particulier ont le même cardinal. □

On a démontré que les parties génératrices minimal générant le groupe entier ont même cardinal, seulement pour  $G/\Phi(G)$ , le lemme suivant conclut la preuve :

**Lemme.**  $(g_i)_{i \in I}$  est génératrice de  $G$  si et seulement si  $(\pi(g_i))_{i \in I}$  est génératrice de  $G/\Phi(G)$ .

*Démonstration.* L'implication directe est immédiate par surjectivité de  $\pi$ . Pour la réciproque, raisonnons par contraposée. Si  $(g_i)$  n'engendre pas  $G$ , considérons un sous-groupe maximal  $H$  de  $G$  contenant le sous-groupe engendré par la famille  $(g_i)$ . Alors  $\Phi(G) \subseteq H \subsetneq G$ , donc  $\pi(H) \subsetneq G/\Phi(G)$ , et la famille  $(\pi(g_i))$  n'engendre pas  $G/\Phi(G)$ . □

**Théorème.** *Les parties génératrices minimales de  $G$  ont le même cardinal.*