2A - Stage rentrée 2025 - Cours 1

Table des matières

I Espaces vectoriels

A $1^{\text{ères}}$ propriétés

Définition 1

Soit E un ensemble non vide, que l'on appelera l'ensemble des vecteurs. Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ systématiquement en ECG, et quasi-systématiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans les autres filières.
Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, est un triplet $(E, +_E, \cdot_{\mathbb{K},E})$, muni de lois $+_E$, et $\cdot_{\mathbb{K},E}$, c'est à dire d'applications :

$$+_E \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x +_E y \end{array} \right. \qquad \cdot_{\mathbb{K},E} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda \cdot_{\mathbb{K},E} x \end{array} \right.$$

Que l'on note le plus généralement $+$ et $\cdot$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, et tels que, si on se place sur $\mathbb{K} := \mathbb{R}$:

1. $\forall (u,v) \in E^2; u + v = v + u$. Commutativité.
2. $\forall (u,v,w) \in E^3; (u+v)+w = u+(v+w)$. Associativité. On note alors plus simplement $u + v + w$.
3. $\exists 0_E \in E, \forall u \in E; u+0_E = u = 0_E+u$. Existence d'un élément neutre.
4. $\forall u \in E, \exists(-u \in E); u+(-u) = 0_E = (-u)+u$. Existence d'un inverse.
5. $\forall u \in E; 1 \cdot u = u$.
6. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u,v) \in E; \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$. Distributivité.
7. $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E; (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$. Distributivité.
8. $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E; \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$.

Dans tout ce cours $(E, +, \cdot)$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ pour les ECG), que l'on notera parfois plus succintement E, lorsqu'il n'y pas d'ambiguité sur les lois $+$ et $\cdot$. De même $(F, +, \cdot)$ désigne un autre espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ pour les ECG toujours)

Remarque 2

Précisons que la définition d'un espace vectoriel n'est pas très utile **en pratique** mais donnons un critière intéressant pour les concours qui permet de déterminer si un ensemble possède une structure d'espace vectoriel (selon les lois usuelles) :

Définition 3

Un sous-ensemble F de E, est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$, si il vérifie les conditions suivantes :

1. $0_E \in F$. C'est à dire « Le vecteur nul de E appartient à F ».
2. $\forall (x, y) \in F^2; \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad (\lambda \cdot x + \mu \cdot y) \in F$. C'est à dire : « F est stable par combinaisons linéaires ».

Proposition 4

Pour la stabilité par combinaisons linéaires de F : le point 2 de la définition précédente, on peut se contenter de :

$$\forall (x, y) \in F^2; \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda \cdot x + y) \in F$$

Théorème 5

Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, est en particulier un $\mathbb{K}$-espace vectoriel !

Remarque 6 (Extrêmement importante)

Il faut bien comprendre, qu'en pratique, à la question, montrer que $(T, +_T, \cdot_T)$ est un espace vectoriel, il faudra déterminer de quel espace vectoriel connu il est un sous-espace vectoriel !

Exercice 1

1. Soit

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - 2y + z = 0 \right\} \quad F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 3y - z \\ 4x - 3z \end{pmatrix} | (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Montrer que F_1 et F_2 sont des espaces vectoriels.

Proposition 7 (Espaces vectoriels de référence)

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Nous connaissons les espaces vectoriels de référence suivant :

$$\begin{array}{cccccc} \mathbb{R}^n & \mathbb{K}^n & \mathbb{R}[X] & \mathbb{R}_r[X] & \mathbb{K}[X] & \mathbb{K}_r[X] \\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) & \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) & \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & & & \end{array} \tag{1}$$

Nous n'allons pas faire de rappels détaillés sur l'ensemble des fonctions polynômiales, pour les ECG, et l'ensemble des polynômes à une indéterminée, et à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ pour les filières scientifiques. Qui sont notés :

$$\begin{cases} \mathbb{R}[x] \text{ (ECG)} \\ \mathbb{K}[X] \text{ (Maths sup)} \end{cases}$$

Cependant :

Définition 8

Posons $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ les ensembles :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & := & \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \deg P \leq n\} \\ \mathbb{K}_n[X] & := & \{P \in \mathbb{K}[X]) \mid \deg P \leq n\} \end{cases}$$

Proposition 9

Soit E un espace vectoriel. Soit F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels quelconques de E. Alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

En réalité, on a mieux : Voir la proposition 11 page 3.

Exercice 2 Détailler les lois, dans l'équation (1), avec les hypothèses de la proposition 7, de $\mathbb{R}[X], \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi que leurs vecteurs nuls.

Par exemple, pour le premier, en faisant l'abus d'écriture de noter verticalement $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

Démonstration.

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Son élément neutre 0_E, est le vecteur nul :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- et :

$$+\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n\\ \left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix}x_1+y_1\\ \vdots\\ x_n+y_n\end{pmatrix}\end{array}\right. \qquad \cdot\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n\\ \left(\lambda,\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

□

Exercice 3 Montrer que :

$$F=\{P\in\mathbb{R}[X]|P(1)=0\}\qquad G=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}|\forall n\in\mathbb{N}u_{n+1}=2u_n\}$$

sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Exercice 4 Est-ce que

$$H=\{P\in\mathbb{R}[X]|P(0)=1\}\qquad I=\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}|u_1=2\}$$

sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

B Comb. linéaires

Définition 10

Soit $x, x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E. On dit que x est combinaison linéaire des $x_1, \cdots, x_n$, lorsqu'il existe n scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tels que :

$$x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n=\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i$$

Exemple : Le vecteur $x := \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, est combinaison linéaire de $x_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, et $x_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, pour $\lambda_1 := 1$, et $\lambda_2 := -2$:

$$x=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\cdot x_1-2\cdot x_2$$

On peut utiliser les systèmes linéaires comme outils pour résoudre des questions concernant les espaces vectoriels, c'est l'objet de l'exercice suivant :

Exercice 5 Soit $u=\begin{pmatrix}7\\2\\-6\end{pmatrix}, u_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$. Montrer que u est combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3.

C Le « Vect »

Soit E un espace vectoriel.

Proposition 11

Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Définition-Proposition 12 (Hors-programme en ECG)

Soit $A \subset E$. L'espace vectoriel engendré par A, est le plus petit sous-espace vectoriel de E, qui contienne A. Il existe, c'est l'intersection de tous les sous-expaces vectoriels de E, qui contiennent A :

$$\mathrm{Vect}(A)=\bigcap_{E' \text{ sous ev de } E \text{ tel que } A\subseteq E'}E'$$

C'est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\mathrm{Vect}(A)=\left\{\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i|n\in\mathbb{N}^*;\lambda_i\in\mathbb{R};x_i\in A\right\}$$

Remarque 13

L'ensemble $\mathrm{Vect}(A)$ des combinaisons linéaires d'une famille A (non vide la plupart du temps [1]) de vecteurs d'un **même** espace vectoriel E, est toujours un sous-espace vectoriel de E !
En ECG, on parle surtout du « Vect » d'une famille finie de vecteurs.

Ce qui amène à une définition « plus concrète » :

1. Même si $\mathrm{Vect}(\varnothing)$ a un sens, on ne le mentionne pas souvent, étant donné le peu d'intérêt qu'il représente.

Définition-Proposition 14 (Plus appropriée en ECG)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors on a :

$$\text{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

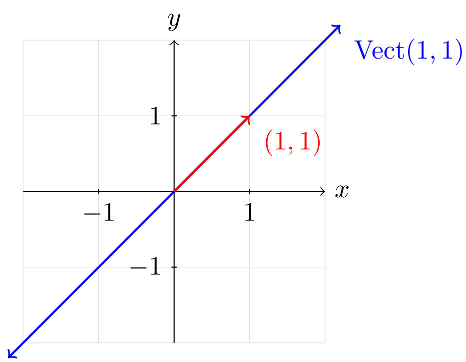
D Exemples

Exemple :

$$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple :

Dessinons, dans le plan $\mathbb{R}^2$, le sous-espace vectoriel : $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.

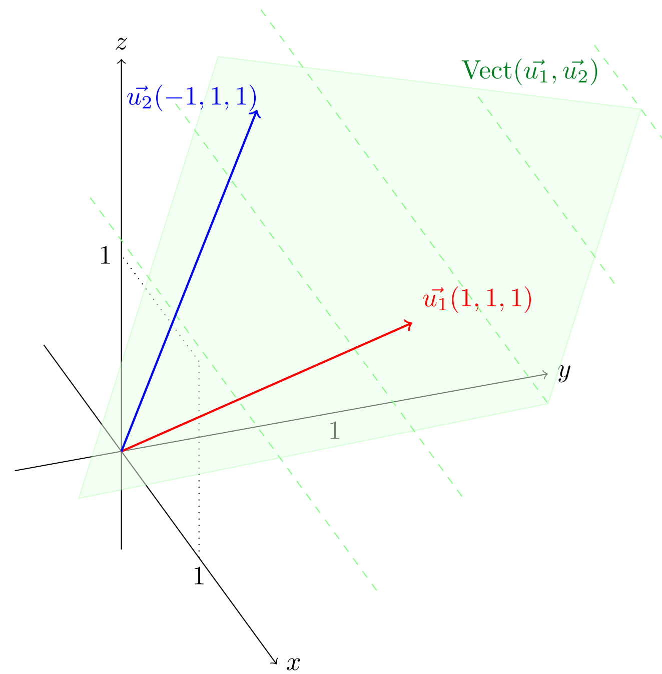


Pour visualiser $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, vous devez comprendre que cet ensemble est constitué de tous les multiples scalaires du vecteur $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, par exemple il y a $2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ mais aussi $\begin{pmatrix}-3.5\\-3.5\end{pmatrix}$ etc.

Exemple :

On remarque qu'on obtient un plan vectoriel : Dessinons, dans l'espace $\mathbb{R}^3$, le sous espace vectoriel :

$$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$



Détaillons dans l'exercice suivant une méthode pour écrire un sous-espace vectoriel sous forme de « vect ».

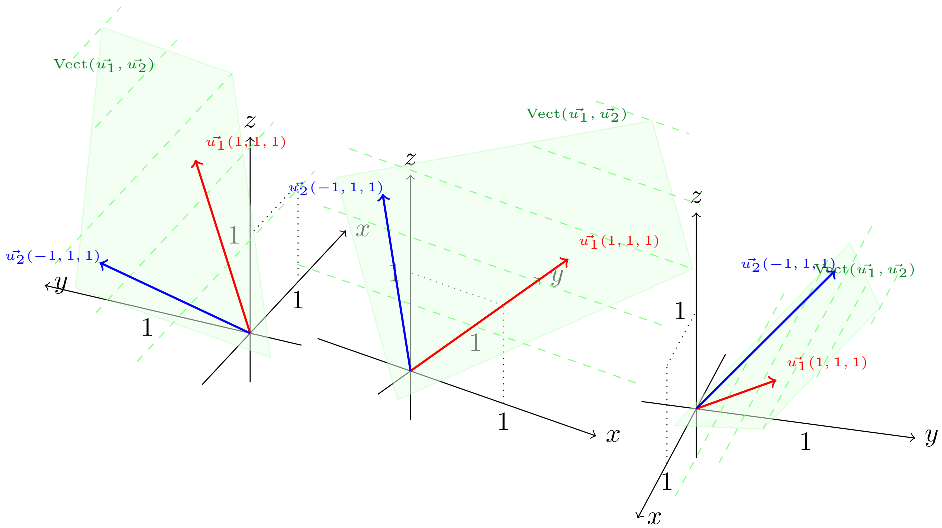
Exercice 6 Soit

$$F := \left\{\begin{pmatrix}x-y\\2x+3y-z\\4x-3z\end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Trouver trois vecteurs X_1, X_2, X_3, chacun dans $\mathbb{R}^3$, tels que $F = \text{vect}(X_1, X_2, X_3)$.

Remarque 15

On a donc montré dans l'exercice précédent, en particulier, que F est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Ceci peut être une méthode pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, ou un sous-espace vectoriel.



Donnons un exemple légèrement plus subtil :

Exercice 7 Soit

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - 2y + z = 0 \right\}$$

Exprimer F sous forme de « vect » :