1A - Stage rentrée 2025 - Cours 1

Table des matières

I Rédaction

A Notations

Dans tout le stage, on utilise les notations usuelles ci-après :

1. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls, c'est à dire ≥ 1.
2. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs.
3. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des fractions :
$$\frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$$
4. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls. $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
5. $\mathbb{C}$ (en CPGE Ingé seulement) est l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

On a les inclusions :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Les nombres réels non rationnels sont dits **irrationnels**.

Définition 1

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, on appelle $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers entre a et b. Par exemple :
$$[\![0, 3]\!] = \{0, 1, 2, 3\}$$ [1]

B Vocabulaire

Définition 2 (Segments de $\mathbb{R}$)

soit a et b deux nombres réels, on note indifféremment $[a, b]$ ou $[b, a]$ l'ensemble des réels compris, au sens large, entre a et b.
Exemples :
$$[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 4\}$$
Les ensembles de la forme $[a, b]$ sont appelés **segments de $\mathbb{R}$**.

1. Nous donnerons une vision (approximative) de ce qu'est un ensemble dans le deuxième cours.

Définition 3 (Partie entière d'un nombre réel)

La **partie entière** d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier relatif plus petit que x. Autrement dit, $\lfloor x \rfloor$ appartient à $\mathbb{Z}$ et vérifie :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Exemple : Donnons les valeurs des parties entière suivantes :

$$\lfloor 4,2 \rfloor = \qquad \lfloor 2 \rfloor = \qquad \lfloor -6.4 \rfloor =$$

C Limites

Définition 4 (Limites)

On appelle « droite numérique achevée », que l'on note $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble :

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Pour a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$, la notations :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

est source de mauvaise rédaction, car elle suppose à priori l'existence d'une limite. Il vaut mieux écrire, surtout lorsqu'on fait un calcul :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$$

Remarque 5

Pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, « n ne peut tendre que vers $+\infty$ ». On écrit :

$$u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l$$

Nous allons voir, et commenter la définition très précise de la notion de limite d'une suite réelle, puis vous étudierez dans le cours de première année celle de la limite d'une fonction réelle à variable réelle. En CPGE ingé, vous les manipulerez en exercices, moins en ECG.

Exemple : On illustre la définition précédente avec les limites des fonctions suivantes en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + 2, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2 - 3x}{x}$$

Et des suites :

$$u_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}, \quad v_n = \frac{1 - n^3}{n - 5n^3}$$

D Quantificateurs

La rédaction mathématique obéit à des règles précises qui doivent être rapidement maîtrisées. Voici les plus importantes :

1. Un objet mathématique est déclaré avant d'être utilisé, en général par le terme « soit » ; la déclaration précise la nature de l'objet (exemples : « soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul », « soit z un nombre complexe non réel », « soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ »...).

2. Un discours mathématique n'est pas une suite de symboles. L'argumentation est, pour l'essentiel, rédigée en langage français ordinaire (et correct), avec des phrases complètes. Sans abréviations. En particulier, les quantificateurs et les symboles d'implication $\rightarrow$ et d'équivalence $\Leftrightarrow$, utiles pour énoncer de manière précise et concise des propriétés, ne doivent pas être employés comme des abréviations à l'intérieur du discours.

3. Il est bon d'annoncer ce que l'on va faire, par des locutions du type « Montrons que ».

Bien rédiger s'acquiert essentiellement par l'usage ; les exemples présentés dans la suite devraient vous donner une idée de ce qui est attendu.

Les quantificateurs sont évoqués dans le programme de Terminale sans que les notations les concernant ne soient exigibles. Précisons ces notations, dont l'emploi est très commode et que nous utiliserons dans la suite :

Définition 6 (Quantificateurs et assertions)

Soit $P(x)$ une propriété, qui peut être vraie, ou fausse, et dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.

- **Quantificateur universel :** Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E, on écrit :

$$\forall x \in E, P(x)$$

Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel** et se lit « **quel que soit** ».

- **Quantificateur existentiel** Pour signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E, on écrit :

$$\exists x \in E, P(x)$$

Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel** et se lit « **il existe** »., (sous entendu : au moins un)
Lorsqu'on écrit $\exists!$, on entend « **il existe un unique** ».

Un énoncé mathématique, comprenant un ou plusieurs quantificateurs, et faisant intervenir une ou des variables, ainsi qu'une propriété dépendant de ce ou ces variables. Et qui peut prendre deux valeurs : Vrai (V), ou Faux (F). Est appelée **assertion**, ou **proposition**.

Remarque 7

Les quantificateurs permettent de formuler de manière condensée certaines propriétés.

Exemple : L'assertion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0$$

signifie que, pour tout réel x, le réel e^x est strictement positif.

Exemple : L'assertion :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \quad y = x^5 - 5x$$

signifie que, pour tout réel y, il existe (au moins) un réel x tel que

$$y = x^5 - 5x$$

ce que l'on peut établir au moyen d'une étude de fonction en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

Remarque 8 (IMPORTANTE : à conserver pour la relire plus tard)

On n'emploie les symboles $\forall$, et $\exists$ que dans des phrases intégralement écrites en langage quantifié. En aucun cas on ne peut mélanger quantificateur et phrase française[2] : les quantificateurs ne sont pas des abréviations. Commencer une démonstration par un quantificateur est une faute grave. Si l'on veut prouver qu'une propriété est vraie pour tout réel x, la rédaction commence en déclarant x : « Soit x dans $\mathbb{R}$. ». On montre ensuite que la propriété désirée est vraie pour ce x quelconque qu'on a choisi.

Remarque 9

Attention au fait que l'ordre des quantificateurs est très important[3]. Lorsque plusieurs quantificateurs apparaissent dans une proposition, on ne peut pas intervertir leur ordre sans changer (en général) le sens de la proposition.

Par exemple, ces deux assertions :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists t \in \mathbb{R}, x = t^2 \tag{1}$$

$$\exists t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, x = t^2 \tag{2}$$

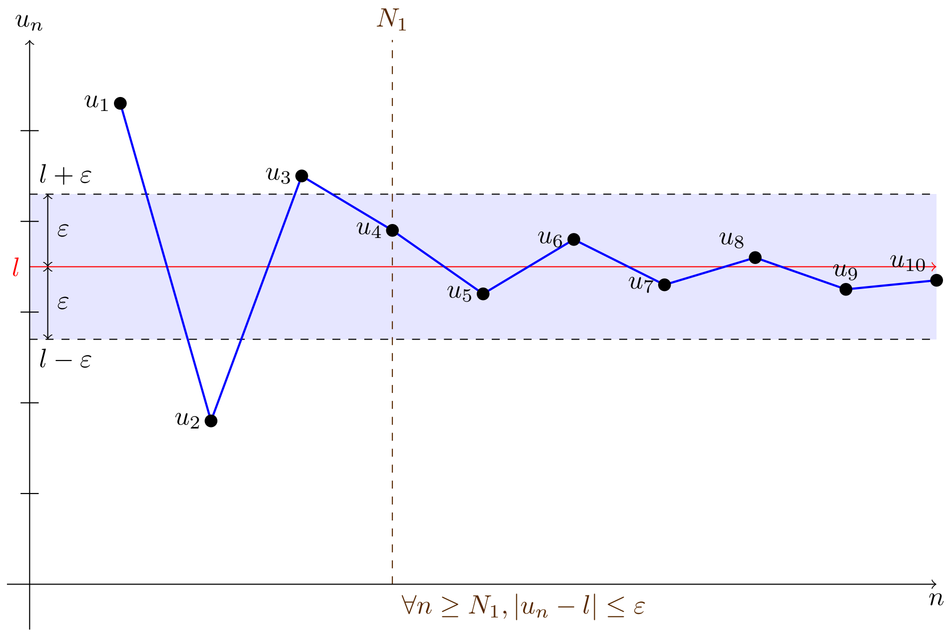
Ne signifient pas la même chose ! (1) est-elle vraie ou fausse ? Et (2) ? Pourquoi ?

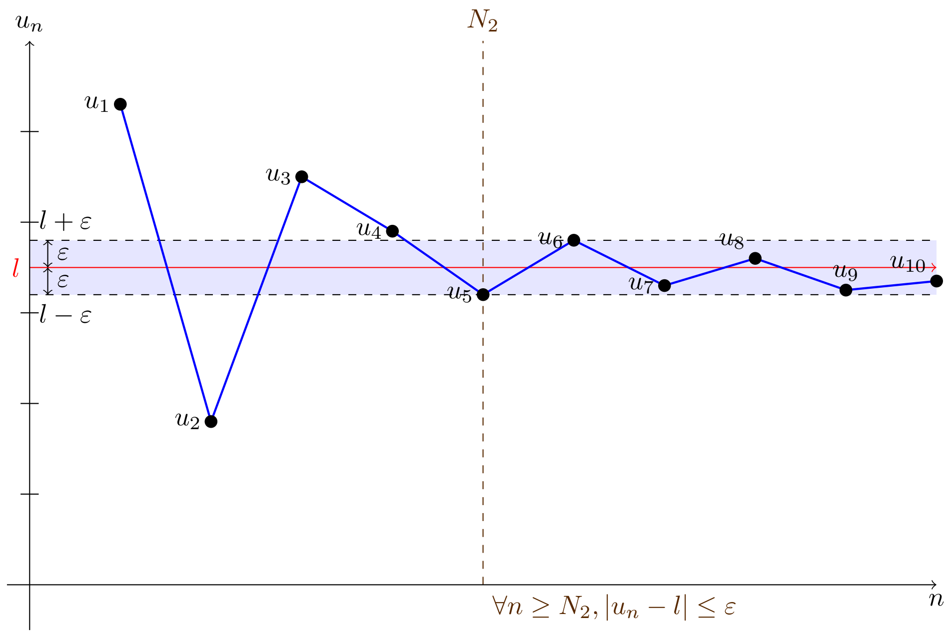
Exemple : Vous verrez par exemple en cours d'année, que pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'assertion « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ », est définie par :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$$

Donnons deux illustrations de cette définition :

2. À moins que vous vouliez avoir l'air d'un cuistre.
3. Quel genre de cuistot sert le riz au lait avant le risotto au parmesan et aux morilles ?





Remarque 10

Ces schémas nous indiquent que si « le canal est plus petit », ie si on réduit la valeur de ϵ, le rang N est susceptible d'augmenter [4].

II Logique

A Connecteurs logiques

Revenez 1 min à la définition 6 page 3.

Définition 11 (Négation)

Soit P et Q deux propositions.
La **négation** de P est la proposition, notée **non** P, ou encore $\overline{P}$, définie par :

- non P est vraie lorsque P est fausse.
- non P est fausse lorsque P est vraie.

Donnons sa table de vérité :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Définition 12 (Et & Ou)

La **conjonction** de P et de Q est la proposition, notée P **et** Q, ou encore $P \wedge Q$, définie de la manière suivante :

- P et Q est vraie lorsque P et Q sont vraies.
- P et Q est fausse lorsqu'au moins une des deux propositions est fausse.

La **disjonction** de P et Q est la proposition, notée P **ou** Q, ou encore $P \vee Q$, définie de la manière suivante :

- P ou Q est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie.
- P ou Q est fausse lorsque P et Q sont fausses.

4. Mais pas forcément, de plus le rang N n'est jamais unique.

Leurs tables de vérité sont :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

P	Q	$P \vee Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

B Implication

Définition 13

Soit P et Q deux propositions.
L'implication P entraîne Q est la proposition, notée $P \Rightarrow Q$ est définie par (non P ou Q).
L'équivalence de P et de Q est la proposition, notée $P \Leftrightarrow Q$, définie par la conjonction de $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Exercise 14

Donner leurs tables de vérité.

Démonstration. Remplissons les tableaux suivants :

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q : P \Rightarrow Q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

□

Définition 15

Soit P et Q deux propositions.

- Lorsque $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit que P est une **condition suffisante** pour avoir Q, et que Q est une **condition nécessaire** pour avoir P.
- Lorsque $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, P est une **condition nécessaire et suffisante** pour avoir Q.

Définition 16 (Autres formulations)

Soit P et Q deux assertions.
Au lieu de dire on a « $P \Rightarrow Q$ », on peut dire :

- Pour Q soit vraie, il suffit que P le soit.
- Pour que P soit vraie, il faut que Q le soit.
- P est une condition suffisante pour que Q soit vraie.
- Q est une condition nécessaire pour que P soit vraie.

Au lieu de dire on a « $P \Leftrightarrow Q$ », on peut dire :

- P est vraie si et seulement si Q l'est.
- Pour que Q soit vraie, il faut et il suffit que P le soit.
- P est une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit vraie.

Remarque 17

Considérons l'implication :

Je suis à Lyon $\Longrightarrow$ Je suis en France.

Il est clair qu'elle est vraie, et on a :

- Pour être en France, il suffit d'être à Lyon.
- Pour être à Lyon, il est nécessaire d'être en France.
- Il est suffisant d'être à Lyon pour être en France.
- Il est nécessaire d'être en France pour être à Lyon.

C Négation

Proposition 18 (Négation des propositions avec quantificateurs)

Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un paramètre x, où x est un élément d'un ensemble E.

1. La négation de la proposition $\forall x \in E, P(x)$ est : $\exists x \in E, \text{non } P(x)$.
2. La négation de la proposition $\exists x \in E, P(x)$ est : $\forall x \in E, \text{non } P(x)$.

Exemple : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Donner la négation de la proposition suivante :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

Cette dernière signifie que la suite $(u_n)_n$ est bornée.

Rappel19

Une proposition est fausse si et seulement si sa négation est vraie.

Exemple :

1. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Que penser de l'assertion suivante (vraie, fausse ?)
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x) \geq 0 \vee f(x) \leq 0) \quad ?$$
2. De même, que penser de l'assertion
$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \, (\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0) \vee (\forall x' \in \mathbb{R}; f(x') \leq 0) \quad ?$$

III Récurrence & $\sum$, $\prod$

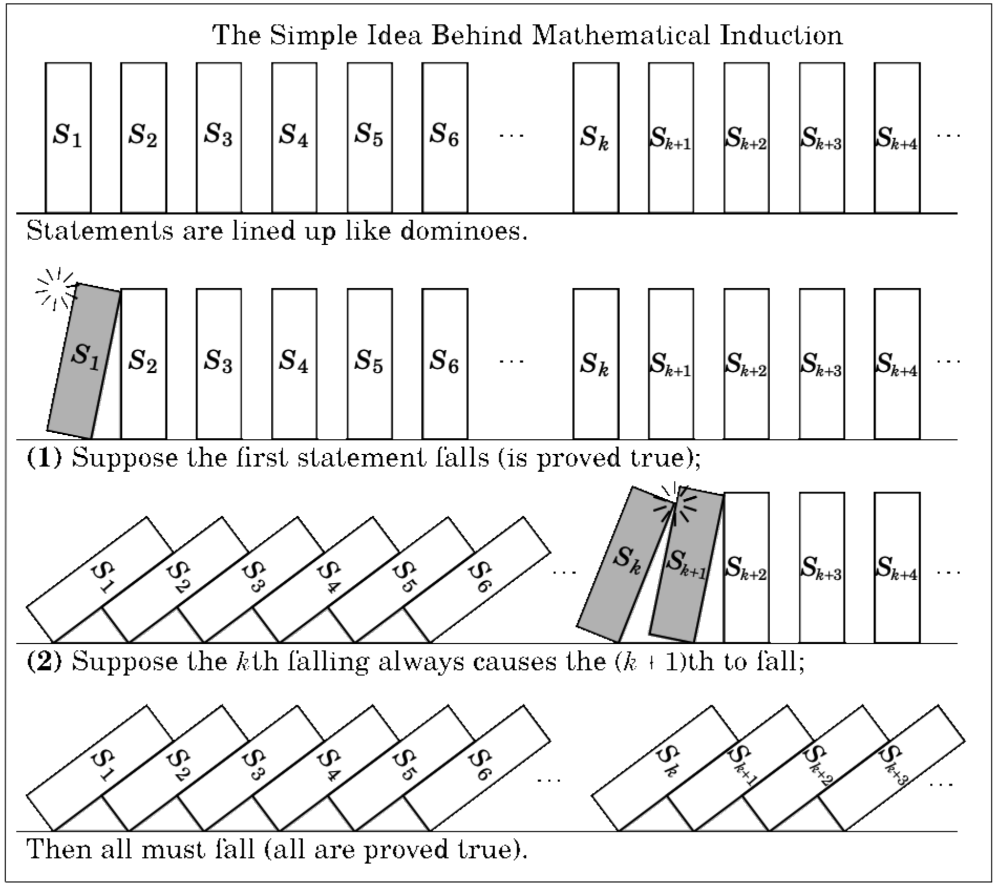
A Rappels

Rappel20

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de n dans $\mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On peut montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, tel que $n \geq n_0$ en montrant successivement :

- Initialisation : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, [\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)]$.

Donnons une explication « heuristique », avec des dominos :



Exercice 1 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 := 1$, et :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} := \ln(1 + u_n)$$

Montrer que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, u_n est strictement positif.

B Sommes $\sum$

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

Définition 21

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle somme des u_k, pour k allant de 0 à n , que l'on note : $\sum_{k=0}^{n} u_k$ l'expression[5] :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k := u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Exemple : On a :

$$\sum_{k=0}^{5} k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Il n'est bien sûr, pas obligatoire de sommer en partant de 0. Si $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a \leq b$, on généralise la définition précédente pour la somme : $\sum_{k=a}^{b} u_k := u_a + u_{a+1} + \cdots + u_{b-1} + u_b$

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$, Lorsqu'on parle de $\sum_{k=-n}^{n} k$, on parle de :

$$\sum_{k=-n}^{n} k = -n - (n-1) - \cdots - 1 + 0 + 1 + \cdots + n \quad \text{Ce qui est égal ... à } 0\,!$$

Proposition 22 (Somme d'une constante)

Soit $n \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{Z}$, tels que $a \leq b$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ apparitions de } 1} = n \quad \text{et} \quad \sum_{k=a}^{b} 3 = (b - a + 1) \times 3$$

Formule à connaitre par cœur : si $a \leq b \,(\in \mathbb{Z})$, alors $[\![a, b]\!]$ possède $b - a + 1$ éléments !

5. Qui veut bien dire ce qu'elle veut dire.

Proposition 23 (Sommes géométriques)

Soit $q \in \mathbb{R}, n_0, n_1 \in \mathbb{Z}$, tels que $n_0 \leq n_1$. Alors[6] :

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} q^k = \begin{cases} n_1 - n_0 + 1 & \text{si} \quad q = 1 \\ q^{n_0} \times \frac{1 - q^{n_1 - n_0 + 1}}{1 - q} & \text{si}^{7} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

En particulier si $n_0 = 0$ et $n_1 = n$, alors on a plus simplement :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n + 1 & \text{si} \quad q = 1 \\ \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

Je vous recommande grandement de retenir cette formule dans le cas $q \neq 1$ (raison différente de 1) par une phrase :

$$\text{« premier terme, fois, } \frac{1 \text{ moins raison}^{\text{puissance nombre de termes}}}{\text{sur, } 1 \text{ moins raison}} \text{ »}$$

Remarque 24 Attention aux parenthèses !

Il ne faut pas confondre $\sum_{k=0}^{n} (k+1)$ avec $\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + 1$. Pensez-y lorsque vous écrirez un « + », dans une somme Σ, par exemple, l'expression sans parenthèses suivante peut être ambiguë. :

$$\sum_{k=0}^{n} k + 1$$

Exercise 25

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

En déduire la valeur, pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $\sum_{k=0}^{n+1} k$, de $\sum_{k=0}^{n-1} k$, et de $\sum_{k=0}^{n^2} k$

6. Cette formule est atroce à retenir.
7. Voir la proposition 22 sur cette page.

Proposition 26 Linéarité de la somme

Soit $(u_k)_{k\in[\![0,n]\!]}, (v_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ deux familles de réels. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ [8]. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k + \mu v_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(2 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2$$

Exercise 27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\alpha \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de n et de α :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(\alpha + \frac{4}{k}\right)$

8. Autrement dit, qui ne dépendent pas de k.