TEMA3: Sistemas Discretos

Contenidos del tema:

- ❑ Definición y ejemplos
- ❑ Variables de estado:
  - ◆Modelos y ecuaciones
  - ◆Relación con la función de transferencia
- ❑ Estructuras alternativas:
  - ◆Propiedades y ejemplos
  - ◆Formas canónicas
  - ◆Transposición de sistemas
- ❑ Sistemas con propiedades especiales
- ❑ Restricciones en los coeficientes

Sistemas Discretos

- Un sistema que acepta secuencias de números y las procesa numéricamente

0,9856565
0,4533677
0,4356289
0,9934286
0,5674833
0,6666666
....
....

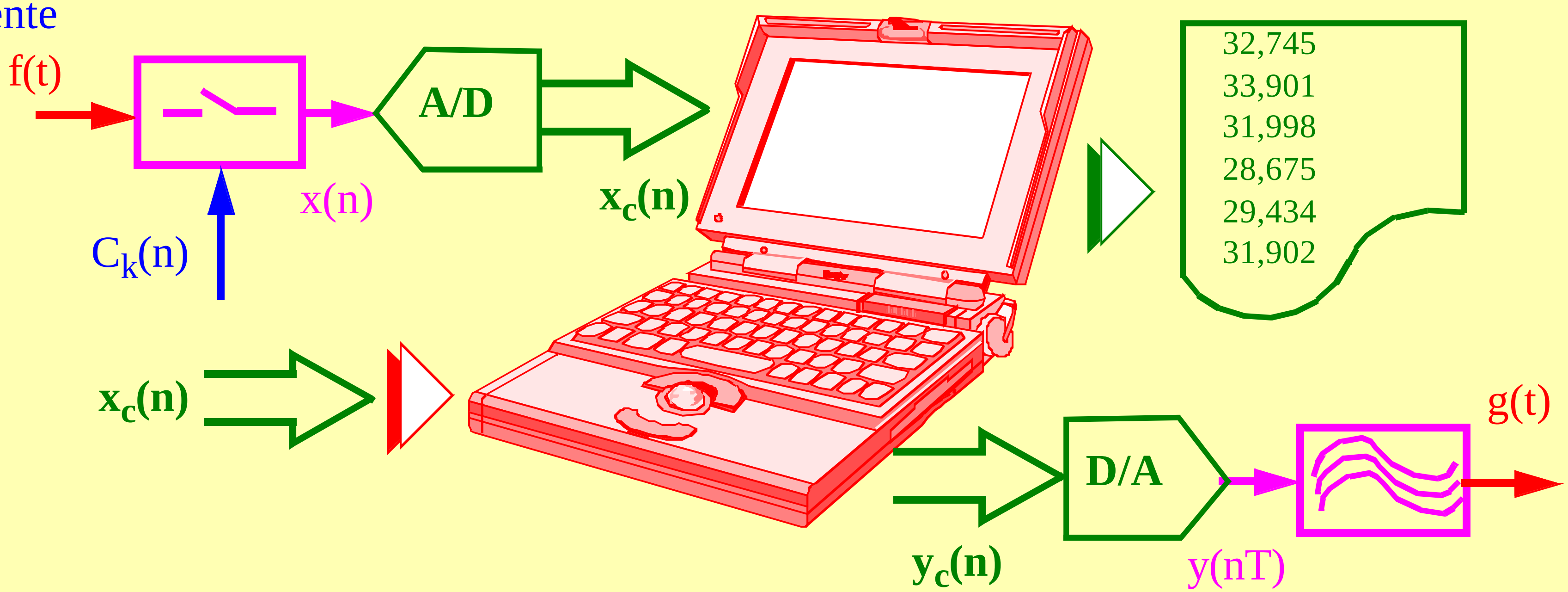
```
p = 1 - 0.05*pi
a = poly (p)
[H,w]=freq(1,a,256);
dB=20log10(mag);
semilogx(f,dB)
semilogx(f,phse)
....................
....................
```

32,745
33,901
31,998
28,675
29,434
31,902
....
....

- Desde el punto de vista "físico" es un problema exclusivamente de software.
- El tiempo no aparece explícitamente
- Hay errores de "redondeo" que afectan fundamentalmente a la precisión del resultado

Sistemas Discretos

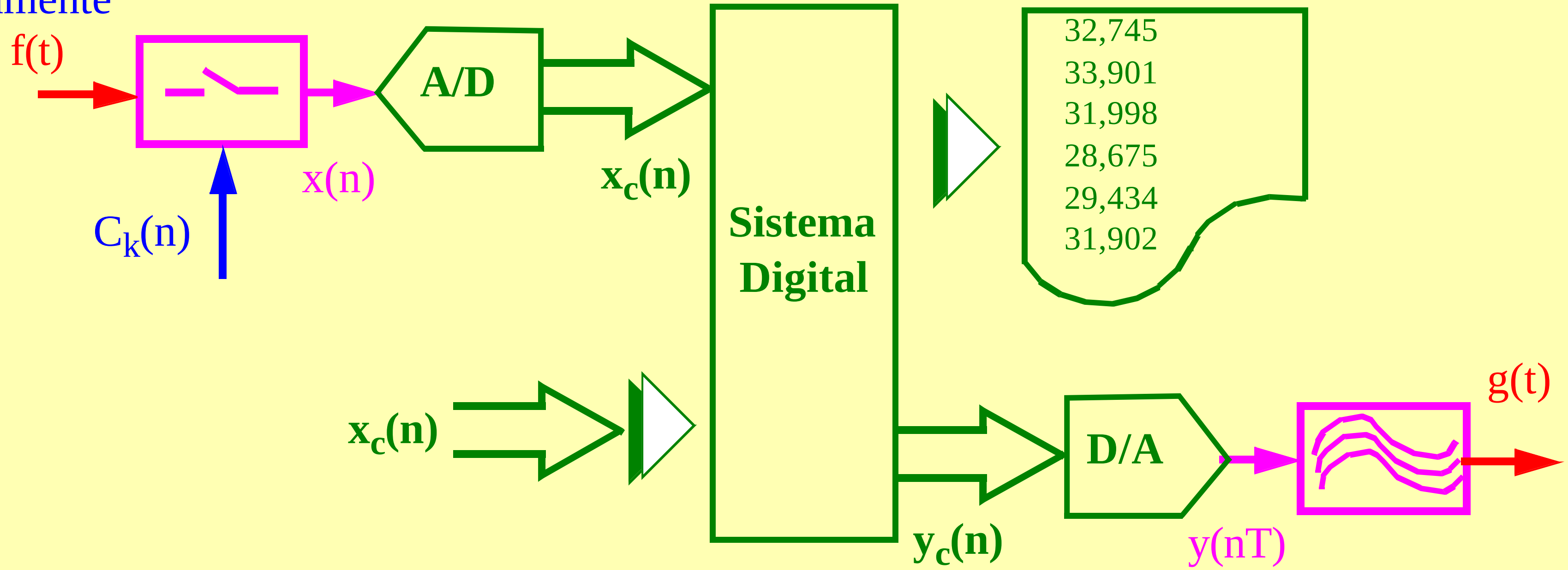
❑ Un sistema de “propósito general” que acepta señales/secuencias y las procesa numéricamente



- Desde el punto de vista “físico” hay combinación de software y hardware.
- El tiempo aparece explícitamente
- El procesamiento se hace por un programa secuencial y su duración puede tener un gran impacto sobre la operación “global” del sistema
- Hay errores de “redondeo” y de sincronización que pueden afectar incluso a la estabilidad

Sistemas Discretos

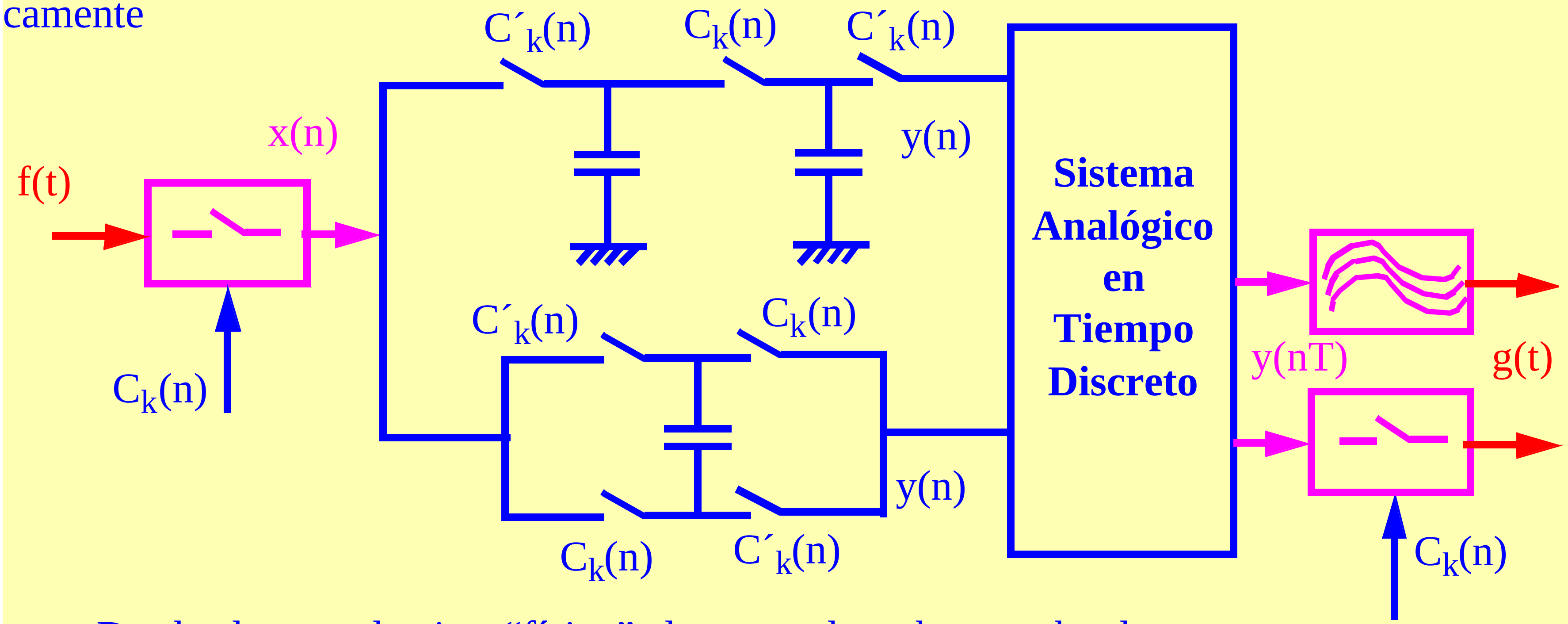
❑ Un sistema de “propósito específico” que acepta señales/secuencias y las procesa numéricamente



- Desde el punto de vista “físico” el procesado se hace en hardware.
- El tiempo aparece explícitamente
- El procesamiento se hace de la manera más rápida y su duración puede tener un gran impacto sobre la operación “global” del sistema
- Hay errores de “redondeo” y de sincronización que pueden afectar incluso a la estabilidad

Sistemas Discretos

❑ Un sistema de "propósito específico" que acepta señales/secuencias y las procesa numéricamente



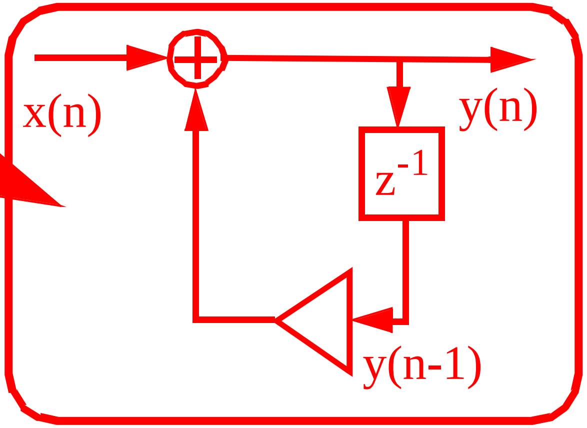
- Desde el punto de vista "físico" el procesado se hace en hardware.
- El tiempo aparece explícitamente
- No hay digitalización de las señales
- La validez de las señales suele estar limitada
- Hay una "visión" Macroscópica del t y otra Microscópica

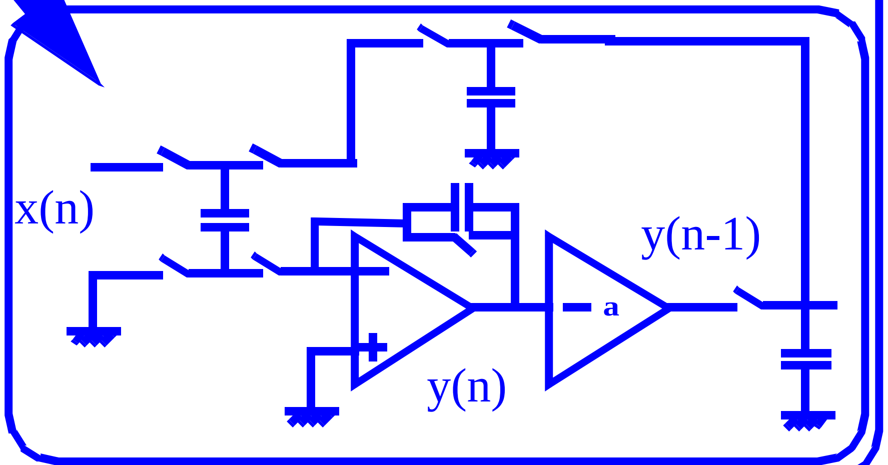
Sistemas Discretos: Ejemplo

$$y(n) = x(n) + ay(n-1)$$

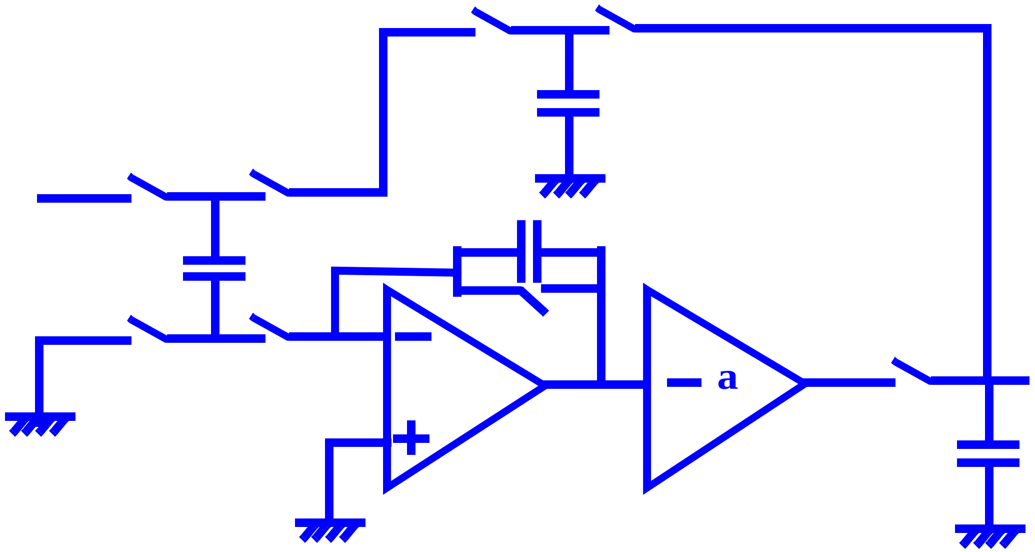
$$H(z) = (1 - az^{-1})^{-1}$$

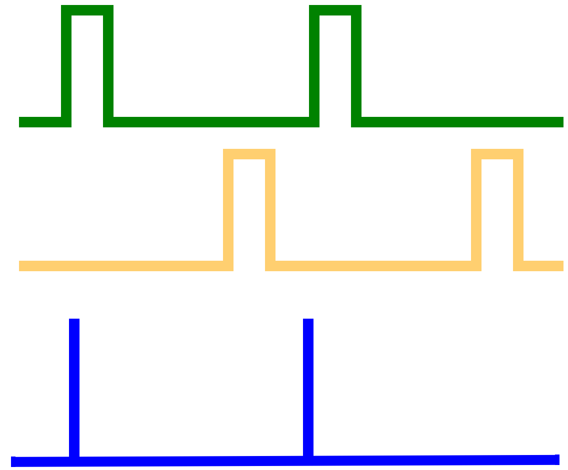
```
1 w = 0
2 Read K
3 Read x
4 y = x + w
5 Print y
6 w = y
7 IF K=1 THEN Stop
8 GOTO 2
9 Stop
```

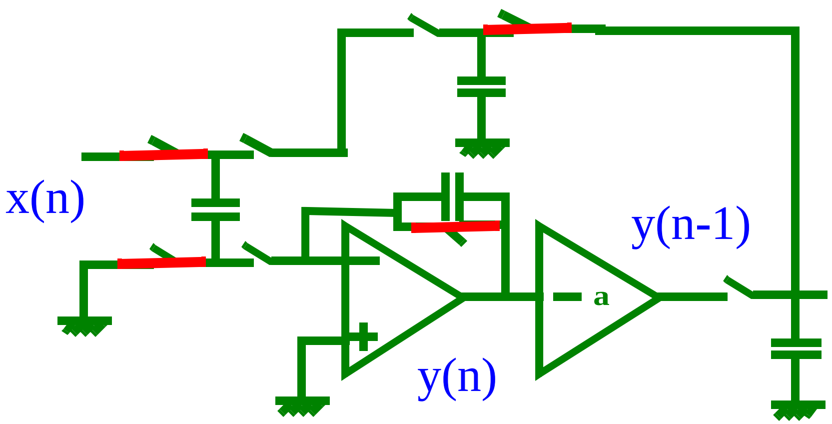


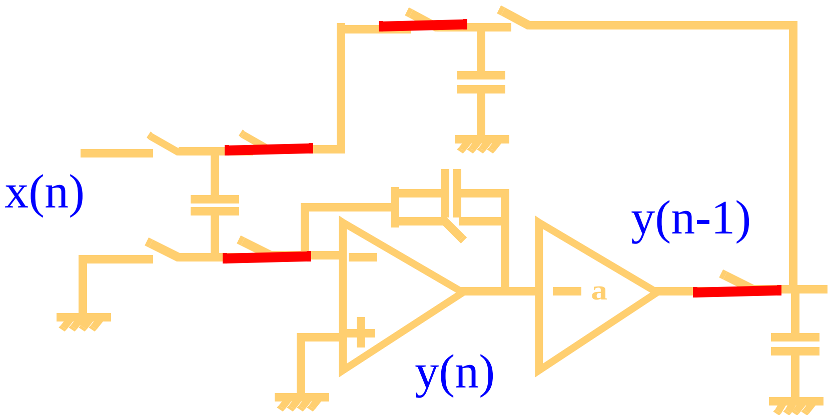


Sistemas Discretos: Ejemplo (II)

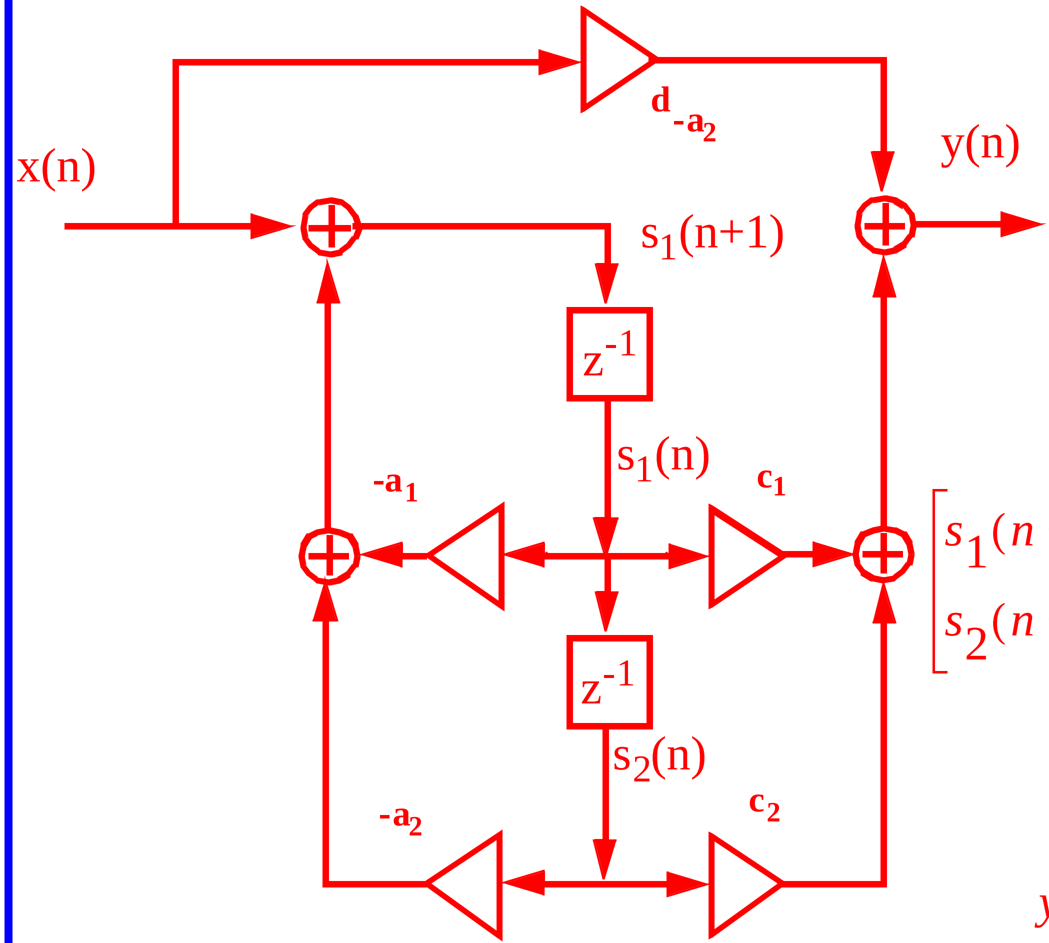








Variables de Estado



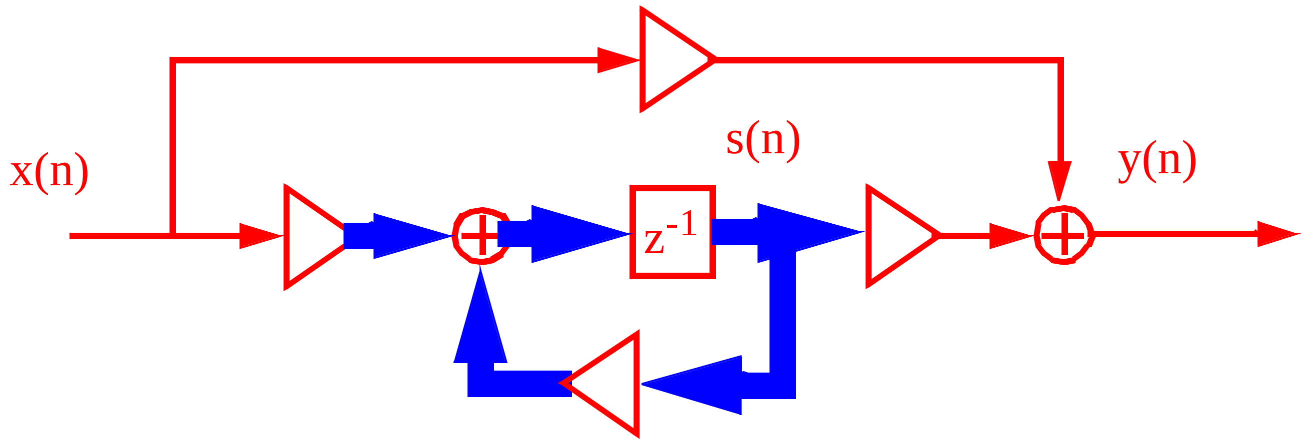
$$s_1(n+1) = x(n) - a_1 s_1(n) - a_2 s_2(n)$$
$$s_2(n+1) = s_1(n)$$
$$y(n) = dx(n) + c_1 s_1(n) + c_2 s_2(n)$$

$$\begin{bmatrix} s_1(n+1) \\ s_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

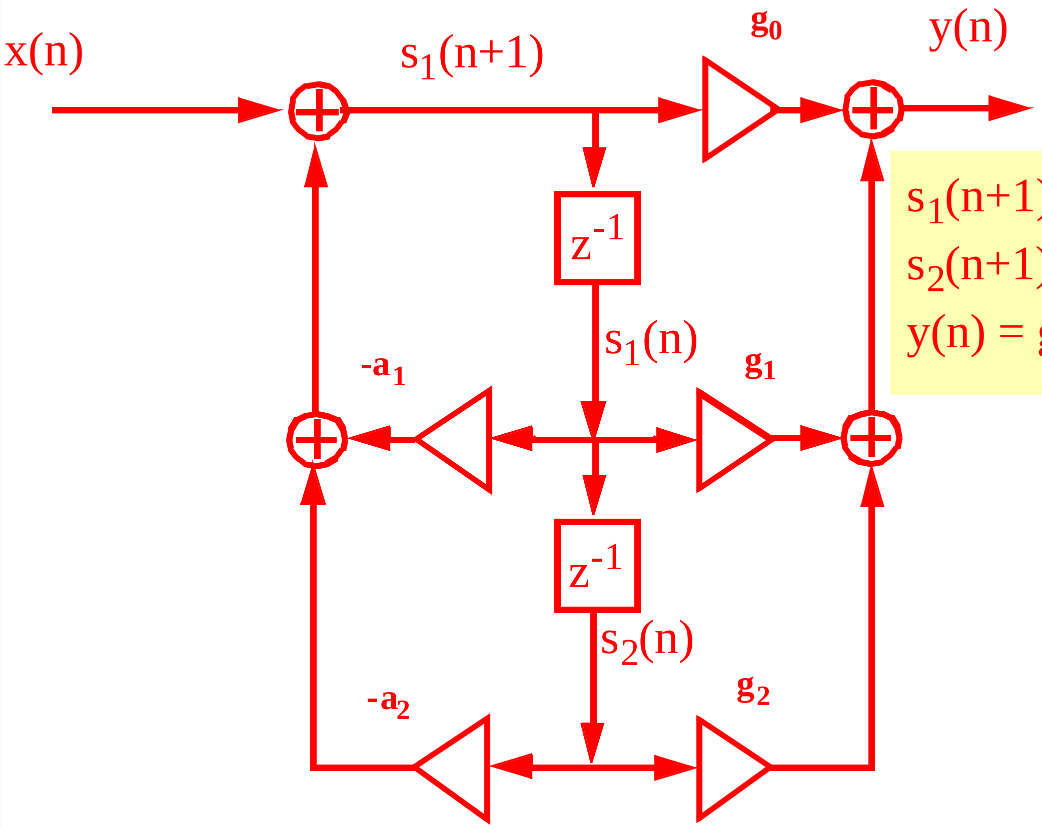
$$y(n) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + dx(n)$$

Variables de Estado

$$\begin{bmatrix} s_1(n+1) \\ s_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n) \qquad y(n) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + dx(n)$$



Variables de Estado



$s_1(n+1) = x(n) - a_1 s_1(n) - a_2 s_2(n)$

$s_2(n+1) = s_1(n)$

$y(n) = g_0 x(n) + (g_1 - a_1 g_0) s_1(n) + (g_2 - a_2 g_0) s_2(n)$

A cada ***retraso*** le asignamos una ***variable de estado***, $s_j(n)$

Respuesta a d(n)

$$\underset{\sim}{s}(n+1) = \mathbf{A}\underset{\sim}{s}(n) + \underset{\sim}{b}x(n)$$

$$y(n) = \underset{\sim}{c}^{t}\underset{\sim}{s}(n) + dx(n)$$

Valor de la entrada muestra a muestra:

$\delta(0) = 1$ -----> $\delta(1) = 0$ -----> $\delta(2) = 0$ -----> $\delta(n)|_{k>0} = 0$

Valor del estado muestra a muestra:

$\underline{s}(0) = 0$ -----> $\underline{s}(1) = \underline{b}\delta(0) = \underline{b}$ -----> $\underline{s}(2) = \mathbf{A}\underline{b}$ -----> $\underline{s}(3) = \mathbf{A}^2\underline{b}$ -----> $\underline{s}(n) = \mathbf{A}^{n-1}\underline{b}$; $n > 1$

Valor de la salida muestra a muestra:

$y(n) = h(n)$

$h(0) = d$ -----> $h(1) = \underline{c}^t\,\underline{s}(1) + d\delta(1) = \underline{c}^t\underline{b}$ -----> $h(2) = \underline{c}^t\mathbf{A}\underline{b}$ ------>

$$h(n) = \underline{c}^t\mathbf{A}^{n-1}\underline{b}u(n-1) + d\delta(1)$$

Respuesta a d(n)

$$h(n) = \underset{\sim}{c}^{t}\mathbf{A}^{n-1}\underset{\sim}{b}\,u(n-1) + d\delta(n)$$

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\sim}{c}^{t}\mathbf{A}^{n-1}\underset{\sim}{b}\,z^{-n} + d = d + z^{-1}\underset{\sim}{c}^{t}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{A}^{k}z^{-k}\right]\underset{\sim}{b}$$

Si todos los autovalores de A tienen módulos menores que |z|:

$$H(z) = d + z^{-1}\underset{\sim}{c}^{t}\left[\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A}\right]^{-1}\underset{\sim}{b}$$

Respuesta a d(n): Función de Transferencia

$$H(z) = d + z^{-1}\underset{\sim}{c}^{t}\left[\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A}\right]^{-1}\underset{\sim}{b}$$

$$H(z) = d + \frac{\sum_{k=1}^{N} c_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{\sum_{k=1}^{N} g_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

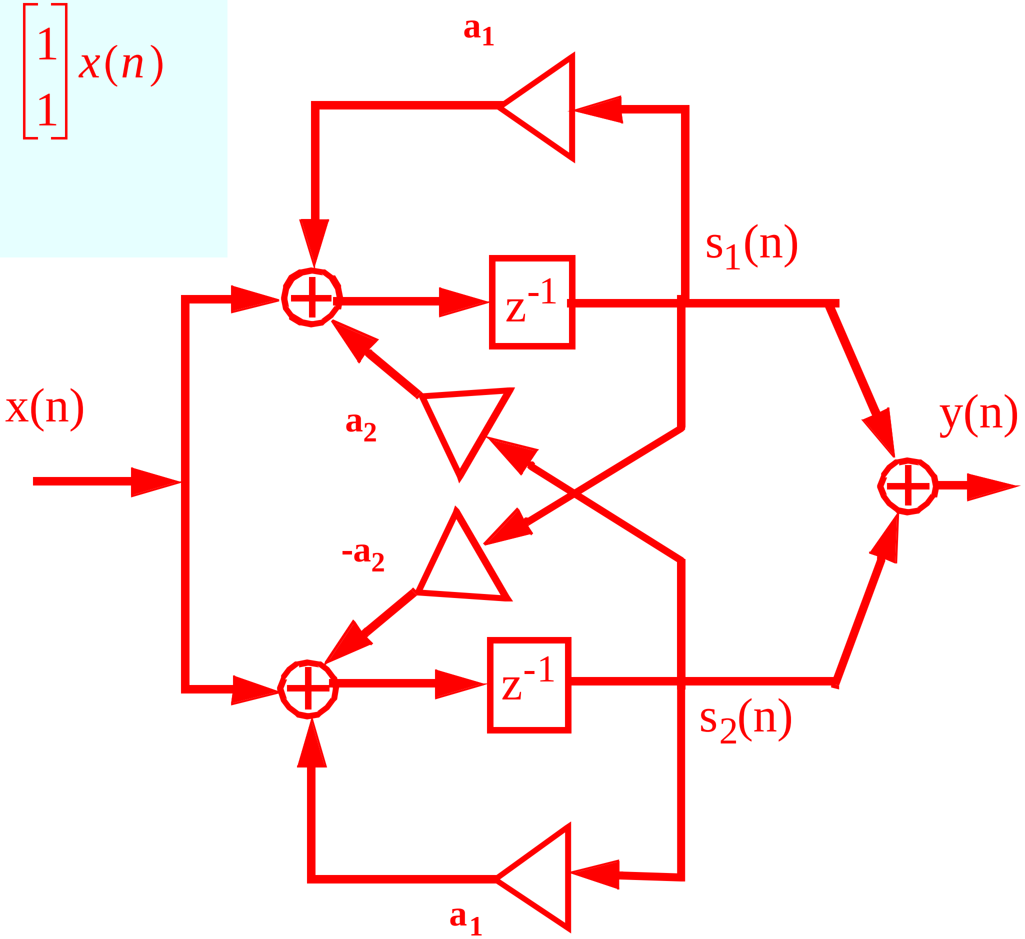
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_N \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{c}^{t} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & \dots & c_N \end{bmatrix}$$

Autovalores de **A:** |**A** - λ**I**| = 0 ---------------------> Polos de H(z): |z**I** - **A**|

Ejemplos y propiedades

$$\begin{bmatrix} s_1(n+1) \\ s_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix}$$



$D(z) = (z - a_1)^2 + a_2^2$

$p_{1,2} = a_1 + ja_2$

Ejemplos y propiedades

Teorema de Cayley-Hamilton:

Si $D(z) = z^N + d_{N-1}z^{N-1} + d_{N-2}z^{N-2} + \dots + d_1 z + d_0$

Se cumplirá $D(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^N + d_{N-1}\mathbf{A}^{N-1} + d_{N-2}\mathbf{A}^{N-2} + \dots + d_1\mathbf{A} + d_0\mathbf{I} = \mathbf{0}$

***Diagonalización de* A:**

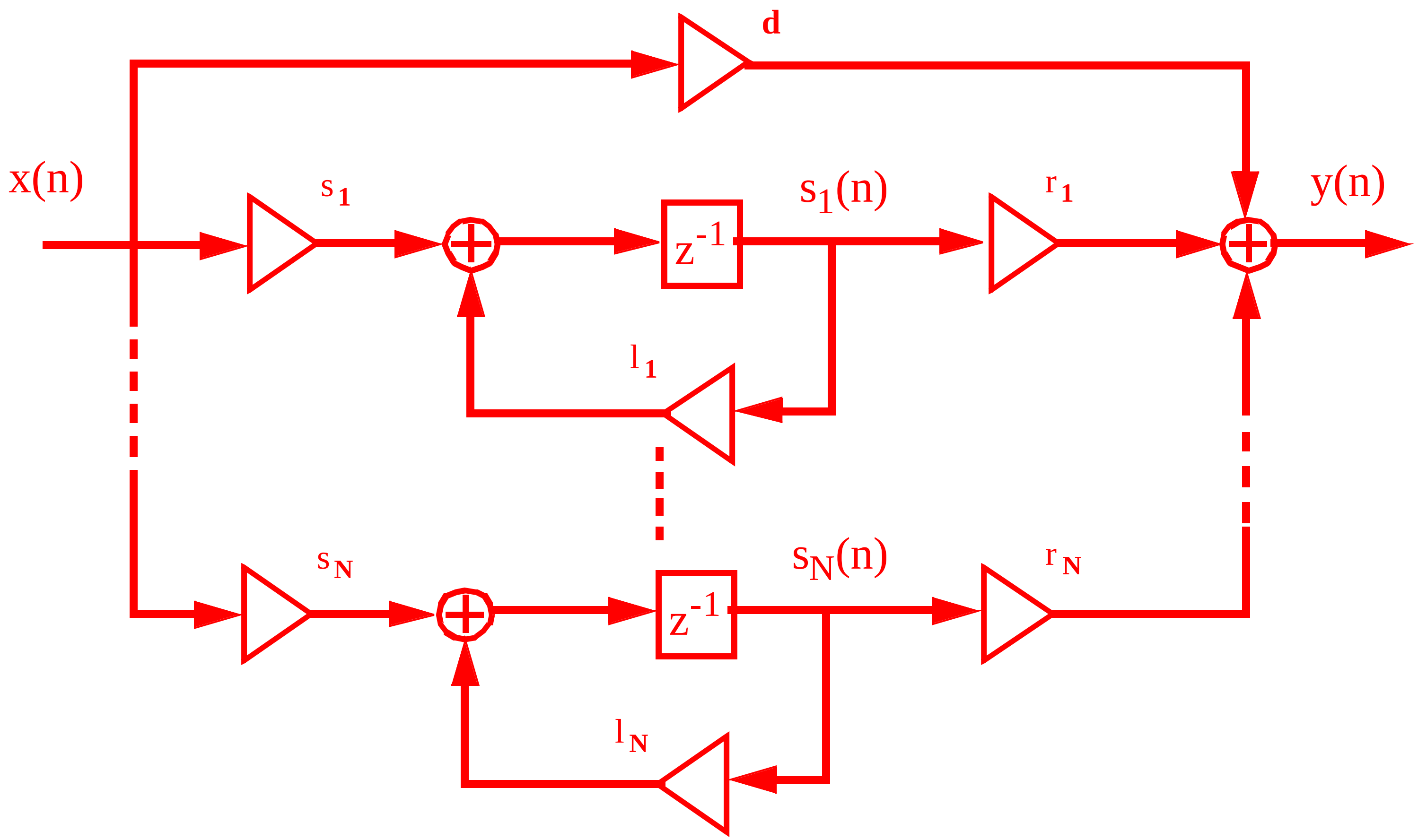
Si todos los autovalores de **A,** λ_k, son distintos:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}L\mathbf{P}^{-1} \text{ con } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Aplicaciones:

- $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}L^n\mathbf{P}^{-1}$
- $$H(z) = d + \underset{\sim}{c}^t\mathbf{P}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{P}^{-1}\underset{\sim}{b} = d + \sum_{i=1}^{N}\frac{\sigma_i\rho_i}{z - \lambda_i} = d + \sum_{i=1}^{N}\frac{\sigma_i\rho_i z^{-1}}{1 - \lambda_i z^{-1}}$$

Forma Canónica en Sectiones Desacopladas de 1er Orden



Elementos para construir Sistemas Discretos

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Sistemas IIR

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-k}$$

Sistemas FIR

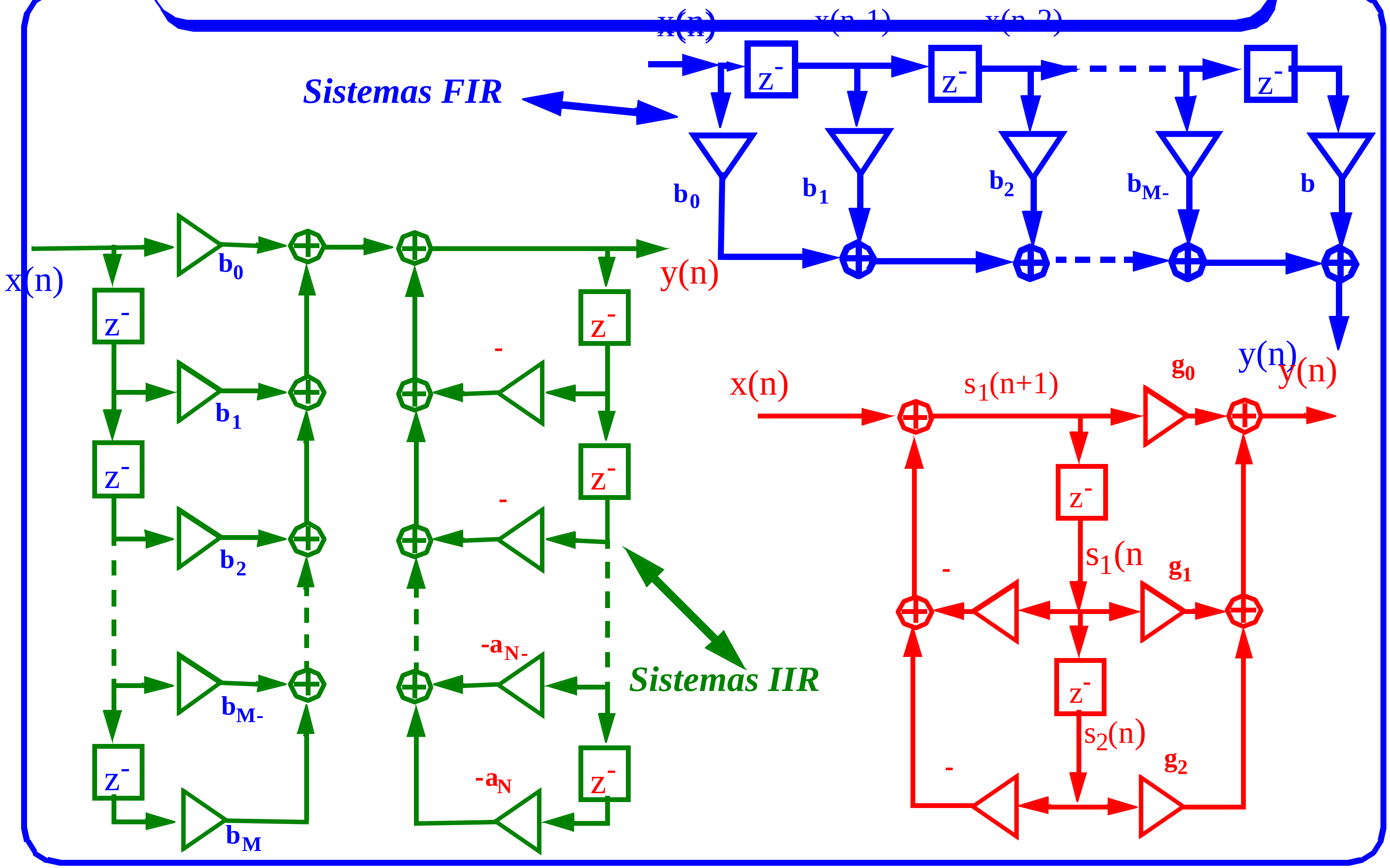
$$\underset{\sim}{s}(n+1) = \mathbf{A}\underset{\sim}{s}(n) + \underset{\sim}{b}x(n)$$

$$y(n) = \underset{\sim}{c}^t \underset{\sim}{s}(n) + dx(n)$$

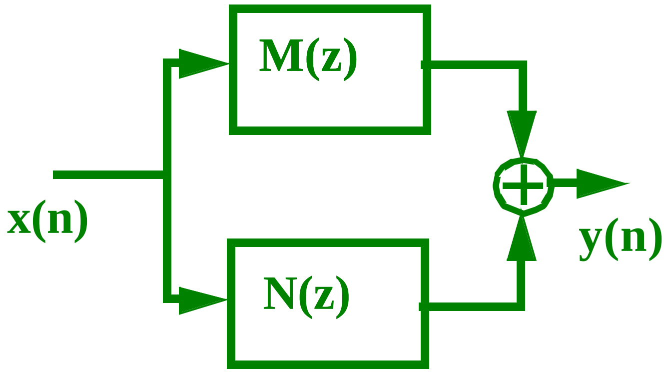
$$h(n) = \underset{\sim}{c}^t \mathbf{A}^{n-1} \underset{\sim}{b} u(n-1) + d\delta(n)$$

$$H(z) = d + z^{-1} \underset{\sim}{c}^t \left[\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A}\right]^{-1} \underset{\sim}{b}$$

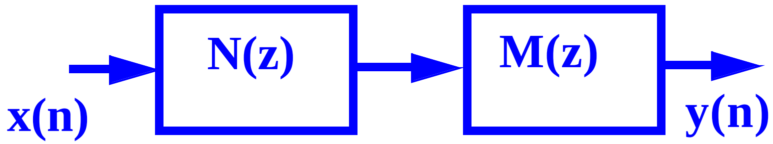
Estructuras para construir Sistemas Discretos



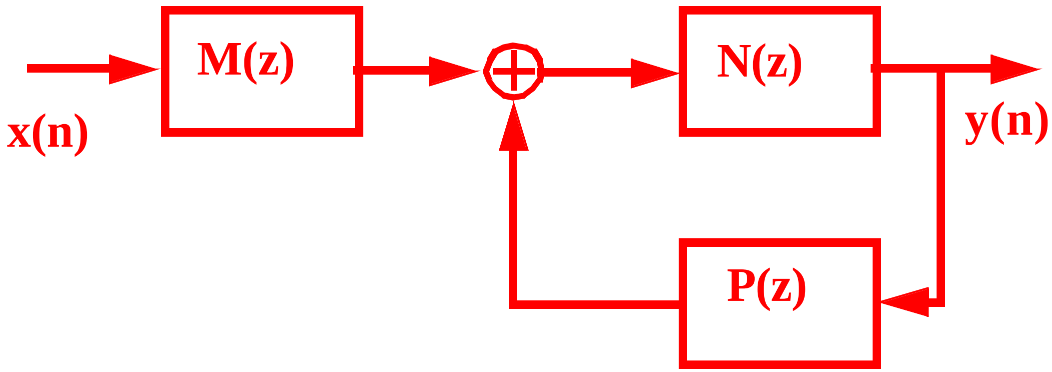
Algebra de Bloques



$$H(z) = M(z) + N(z)$$

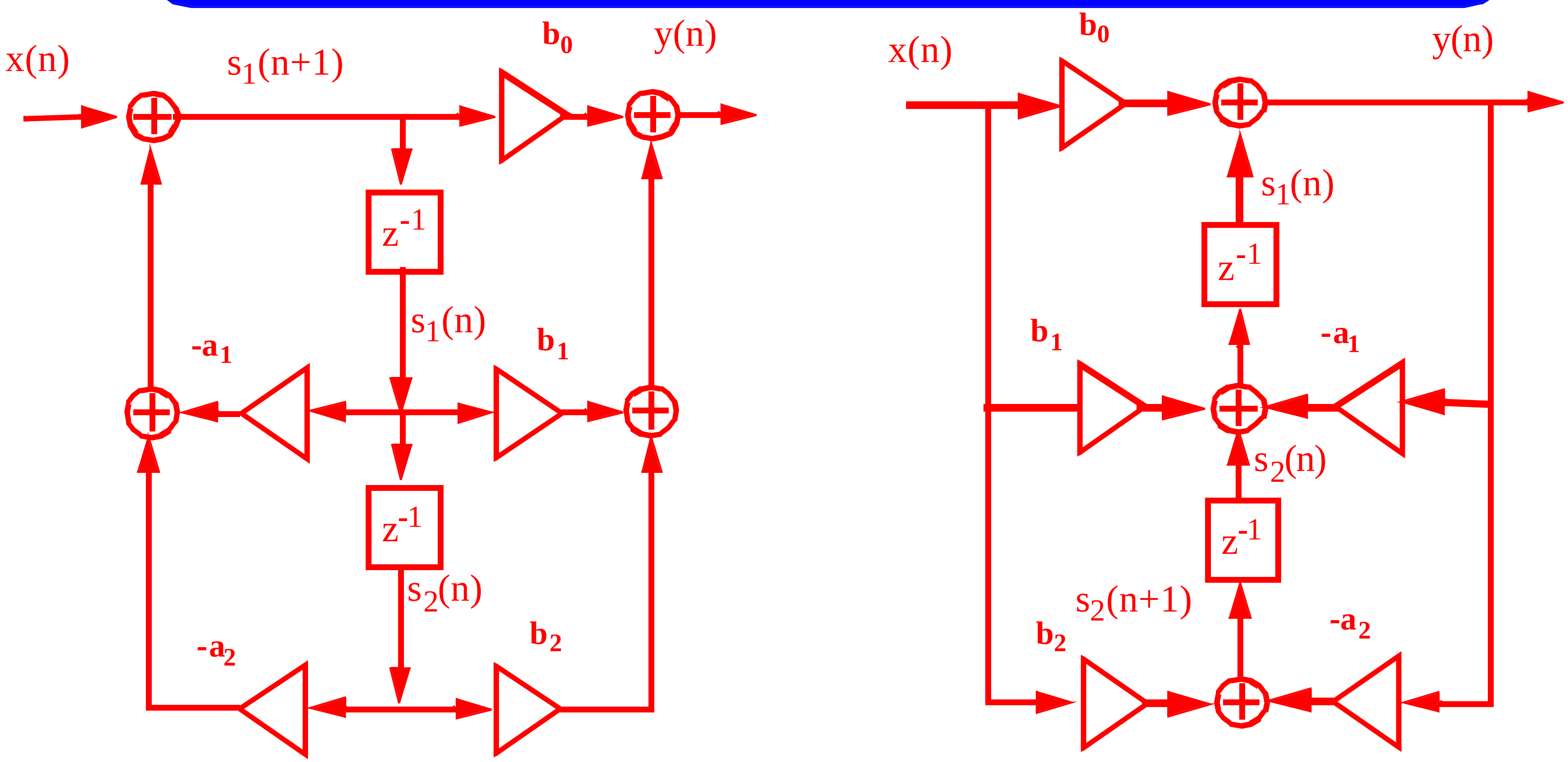


$$H(z) = M(z)\,N(z)$$



$$H(z) = \frac{M(z)N(z)}{1 - M(z)N(z)}$$

Equivalencia entre Sistemas Transpuestos



$s_1(n+1) = x(n) - a_1 s_1(n) - a_2 s_2(n)$

$s_2(n+1) = s_1(n)$

$y(n) = b_0 x(n) + (b_1 - a_1 b_0) s_1(n) + (b_2 - a_2 b_0) s_2(n)$

$s'_1(n+1) = b_1 x(n) - a_1 y(n) - a_2 s'_2(n)$

$s'_2(n+1) = b_2 x(n) - a_2 y(n)$

$y(n) = b_0 x(n) + s'_1(n)$

Equivalencia entre Sistemas Transpuestos

$s_1(n+1) = x(n) - a_1 s_1(n) - a_2 s_2(n)$
$s_2(n+1) = s_1(n)$
$y(n) = b_0 x(n) + (b_1 - a_1 b_0) s_1(n) + (b_2 - a_2 b_0) s_2(n)$

$$\begin{bmatrix} s_1(n+1) \\ s_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix} + d x(n)$$

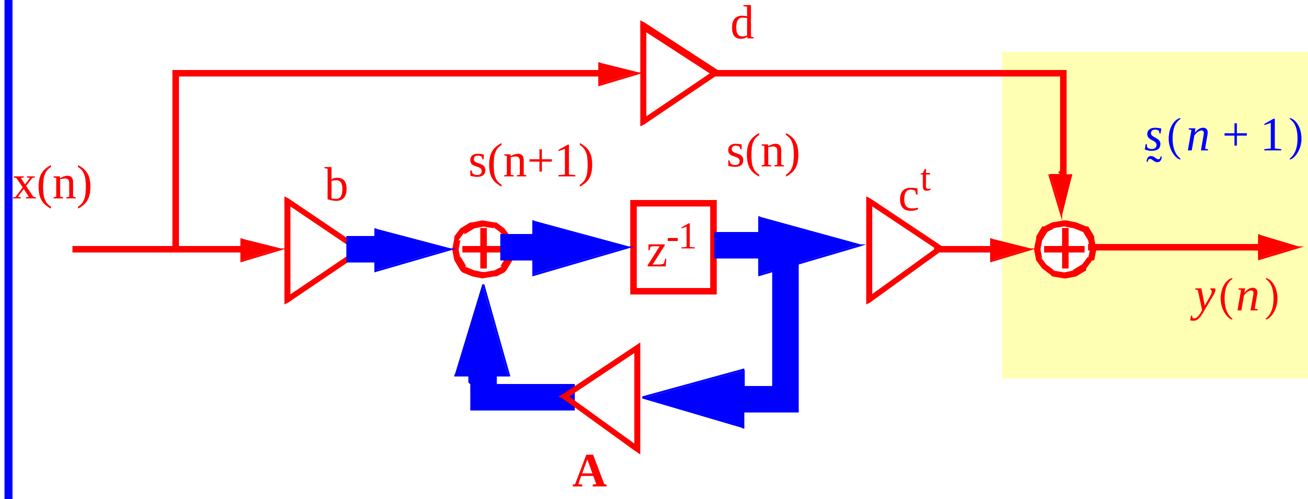
$c_1 = (b_1 - a_1 b_0)$
$c_2 = (b_2 - a_2 b_0)$
$d = b_0$

$s'_1(n+1) = (b_1 - a_1 b_0) x(n) - a_1 s'_1(n) + s'_2(n)$
$s'_2(n+1) = (b_2 - a_2 b_0) x(n) - a_2 s'_1(n)$
$y(n) = b_0 x(n) + s'_1(n)$

$$\begin{bmatrix} s'_1(n+1) \\ s'_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_1(n) \\ s'_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} x(n)$$

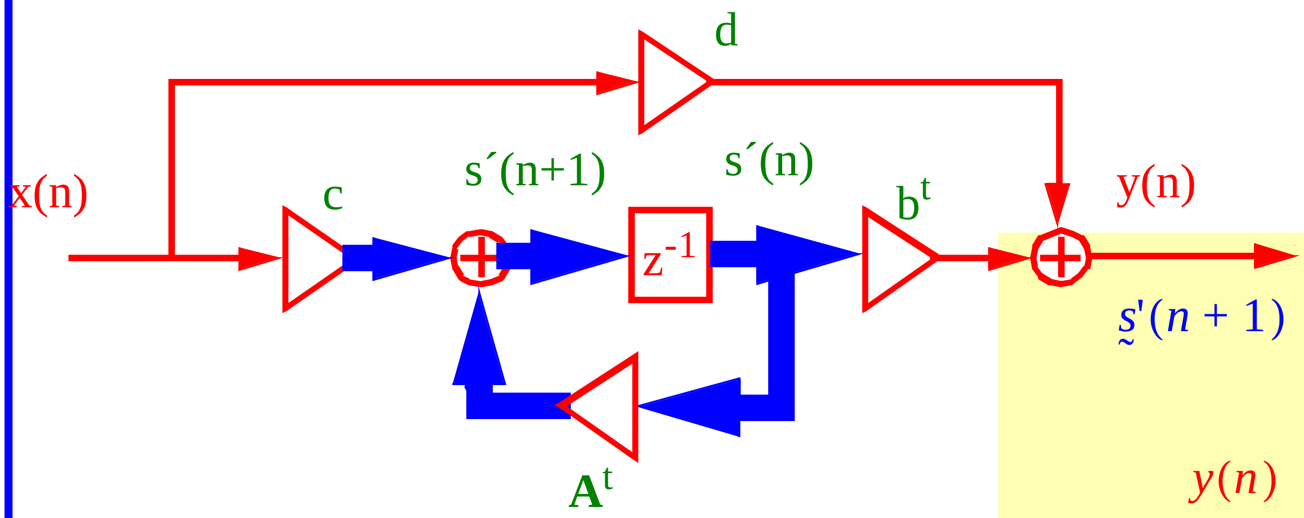
$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_1(n) \\ s'_2(n) \end{bmatrix} + d x(n)$$

Equivalencia entre Sistemas Transpuestos



$$\underset{\sim}{s}(n+1) = \mathbf{A}\underset{\sim}{s}(n) + \underset{\sim}{b}x(n)$$

$$y(n) = \underset{\sim}{c}^{t}\underset{\sim}{s}(n) + dx(n)$$



$$\underset{\sim}{s}'(n+1) = \mathbf{A}^{t}\underset{\sim}{s}'(n) + \underset{\sim}{c}^{t}x(n)$$

$$y(n) = \underset{\sim}{b}\underset{\sim}{s}'(n) + dx(n)$$

Equivalencia entre Sistemas Transpuestos

$$\underset{\sim}{s}(n+1) = \mathbf{A}\underset{\sim}{s}(n) + \underset{\sim}{b}x(n)$$

$$y(n) = \underset{\sim}{c}^t\underset{\sim}{s}(n) + dx(n)$$

$$H(z) = d + z^{-1}\underset{\sim}{c}^t\left[\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A}\right]^{-1}\underset{\sim}{b}$$

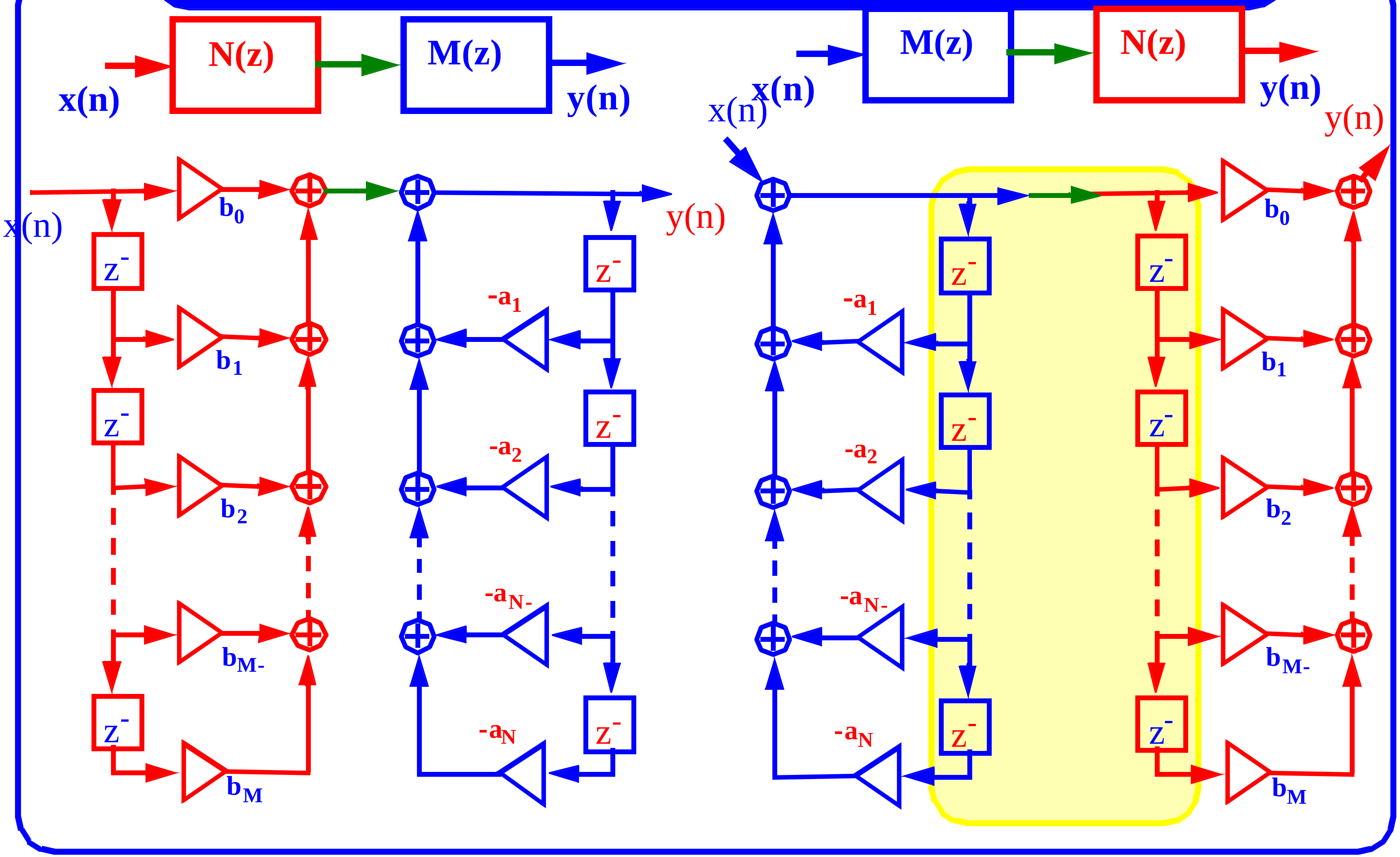
$$\boxed{H_t(z) = H^t(z) = H(z)}$$

$$\underset{\sim}{s}'(n+1) = \mathbf{A}^t\underset{\sim}{s}'(n) + \underset{\sim}{c}^t x(n)$$

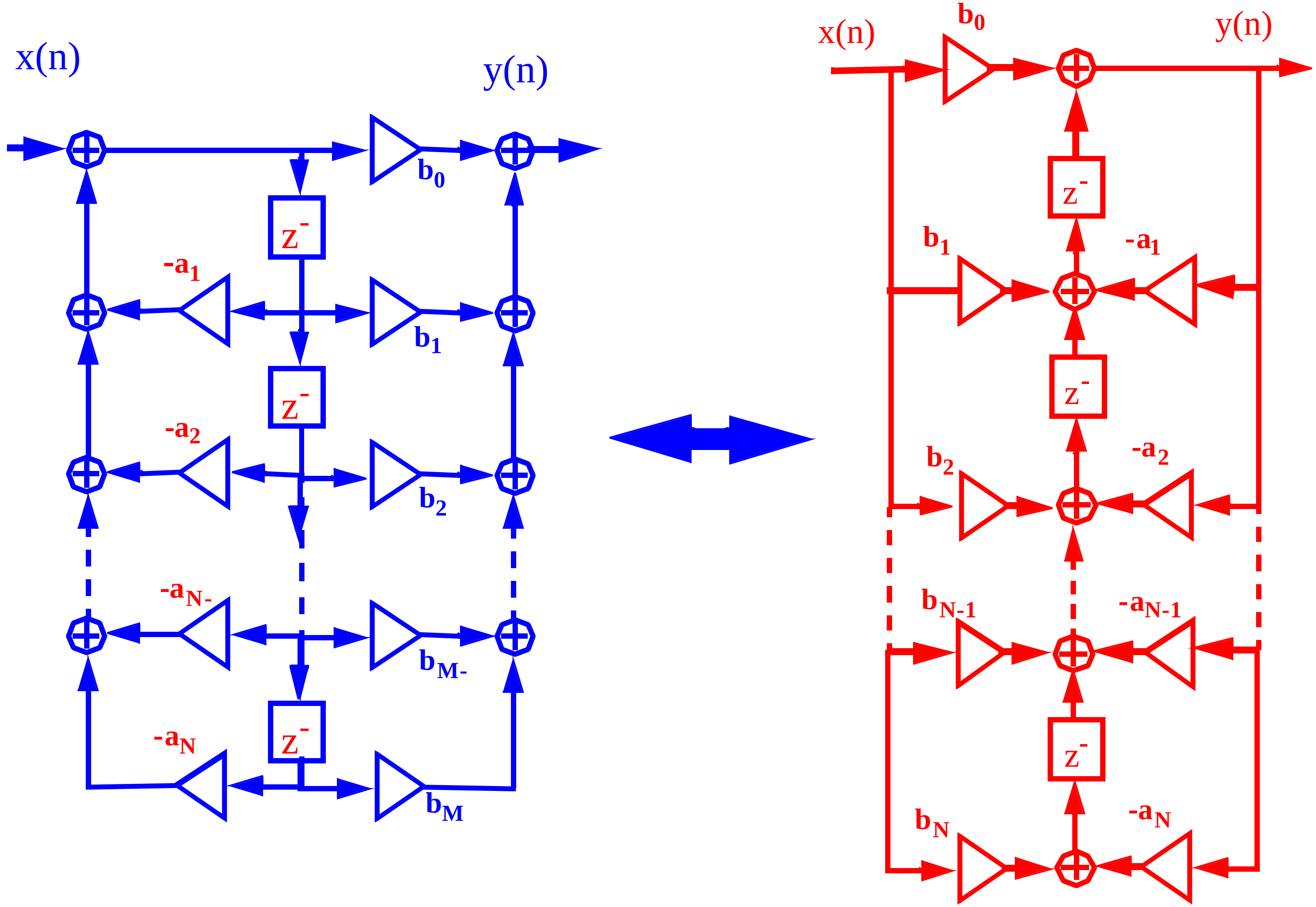
$$y(n) = \underset{\sim}{b}\underset{\sim}{s}'(n) + dx(n)$$

$$H_t(z) = d + z^{-1}\underset{\sim}{b}^t\left[\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{A}^t\right]^{-1}\underset{\sim}{c}$$

Formas Directas

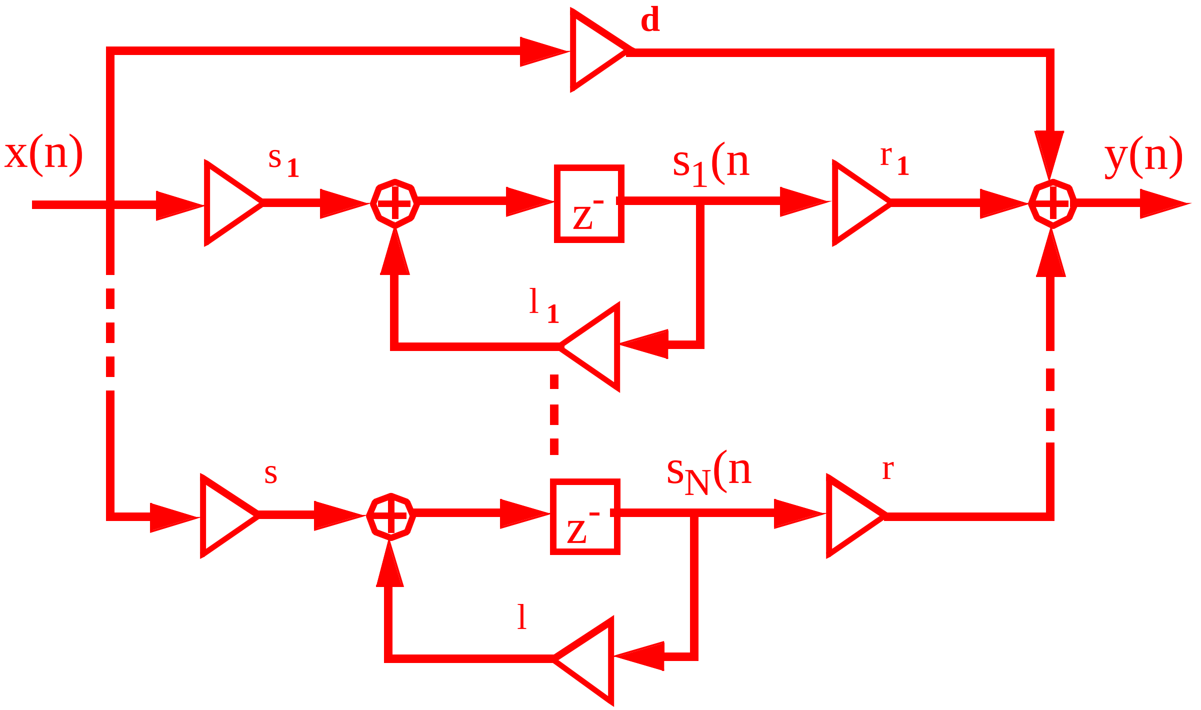


Formas Directas II y I



Formas Paralelas

- $H(z) = d + \underset{\sim}{c}^t \mathbf{P}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{P}^{-1}\underset{\sim}{b} = d + \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i \rho_i}{z - \lambda_i} = d + \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i \rho_i z^{-1}}{1 - \lambda_i z^{-1}}$



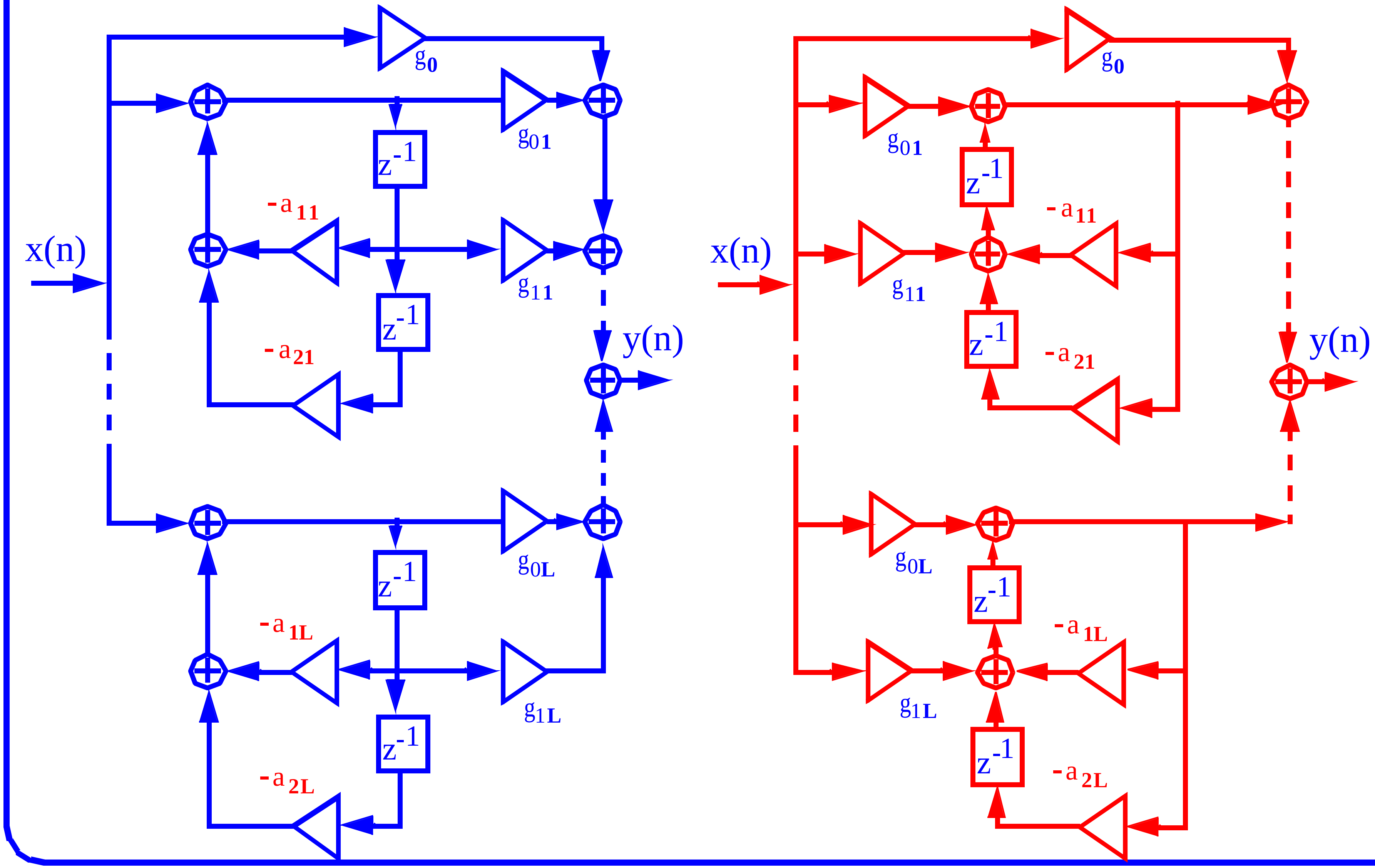
Formas Alternativas

- $$H(z) = d + \underset{\sim}{c}^t \mathbf{P}[z\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{P}^{-1}\underset{\sim}{b} = d + \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i \rho_i}{z - \lambda_i} = d + \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i \rho_i z^{-1}}{1 - \lambda_i z^{-1}}$$

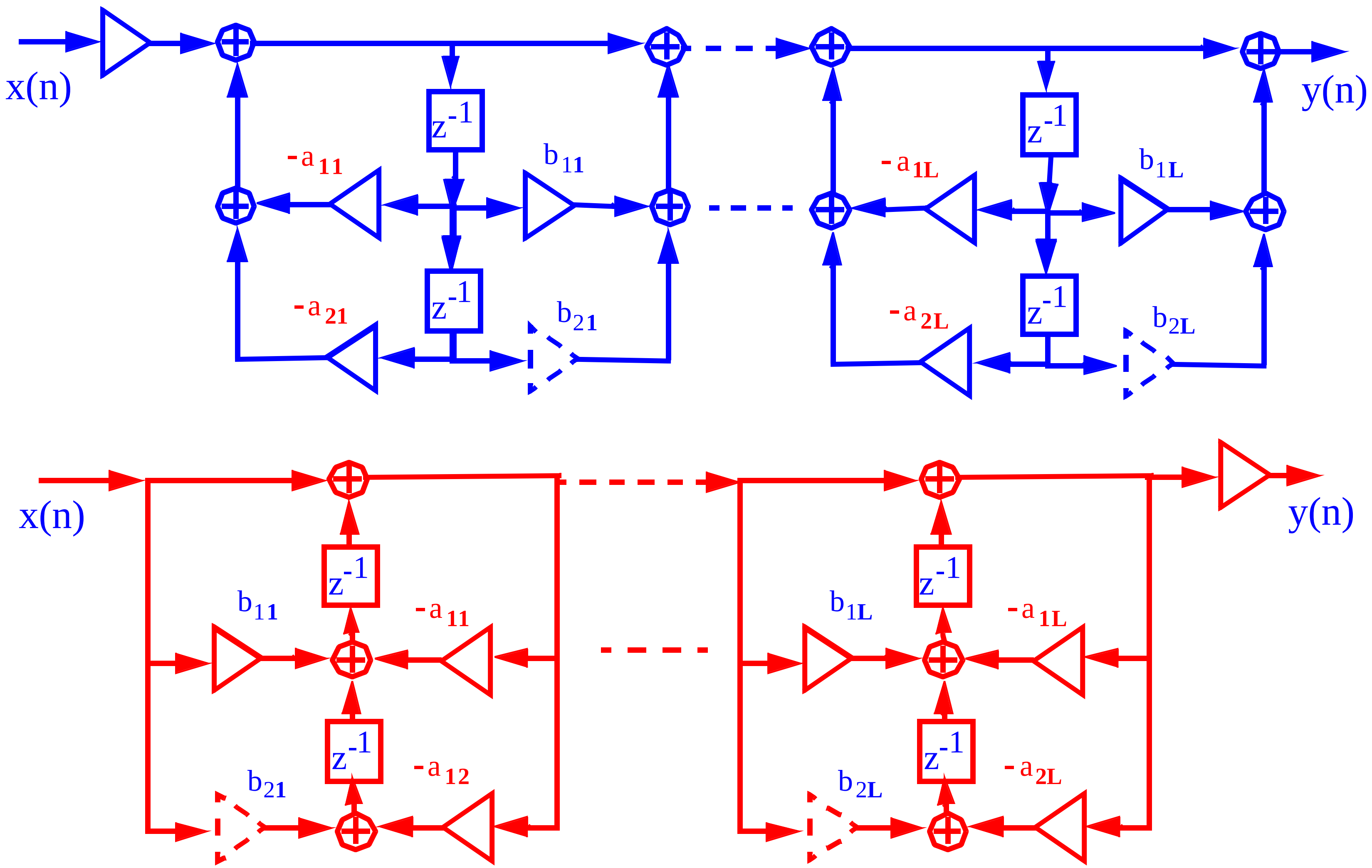
- $$H(z) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{L} \frac{\gamma_{0i} + \gamma_{1i} z^{-1}}{1 + \alpha_{1i} z^{-1} + \alpha_{2i} z^{-2}} \quad ; L = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor_{ent} ; M = N$$

- $$H(z) = b_0 + \prod_{k=1}^{N} \frac{1 - z_k z^{-1}}{1 - p_k z^{-1}} = b_0 \prod_{i=1}^{L} H_i(z) \dashrightarrow H_i(z) = \frac{1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2}}{1 + \alpha_{1i} z^{-1} + \alpha_{2i} z^{-2}}$$

Formas Paralelas Alternativas



Formas en Cascada



Sistemas con Propiedades Especiales

- **Sistemas FIR con Simetrìa (par o impar)**

$$H(z) = b_0\left(1 \pm z^{-M}\right) + b_1\left(1 \pm z^{-M+1}\right)\ldots+b_{\frac{M}{2}}\left(1 \pm z^{-\frac{M}{2}}\right)$$

- **Sistemas de Pasa-Todo**

$$H(z) = z^{-M}\frac{D\left(z^{-1}\right)}{D(z)}$$

- **Sistemas Complementarios $H_1(z)$ y $H_2(z)$**

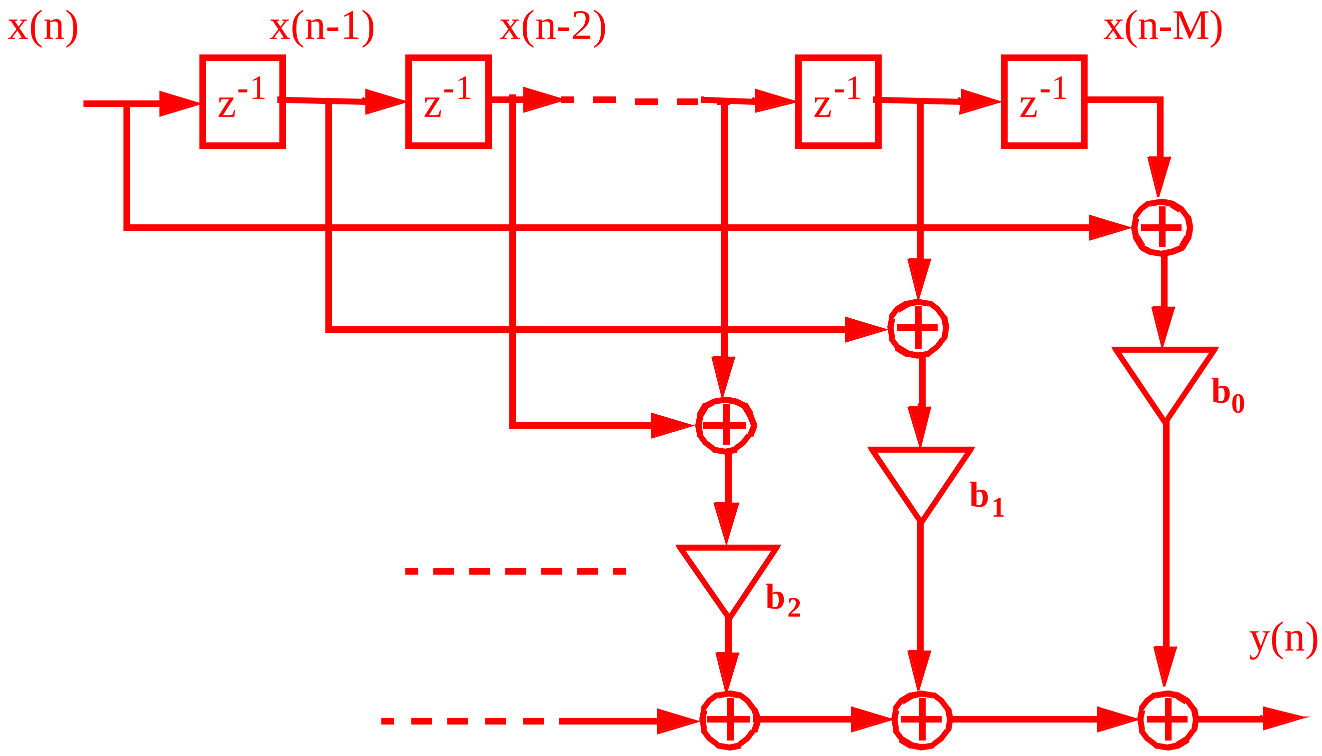
$$\left|H'_1(\omega)\right|^2 + \left|H'_2(\omega)\right|^2 = 1$$

- **Sistemas en Peine**

$$H_k(z) = H\left(z^k\right)$$

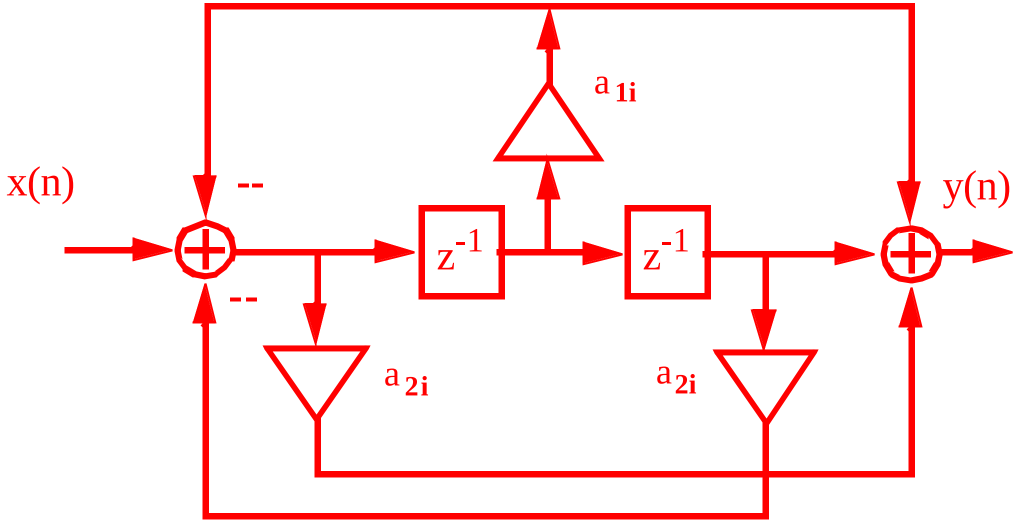
Sistemas FIR Simétricos

$$H(z) = b_0\left(1 \pm z^{-M}\right) + b_1\left(1 \pm z^{-M+1}\right) \ldots + b_{\frac{M}{2}}\left(1 \pm z^{-\frac{M}{2}}\right)$$



Sistemas Pasa-Todo

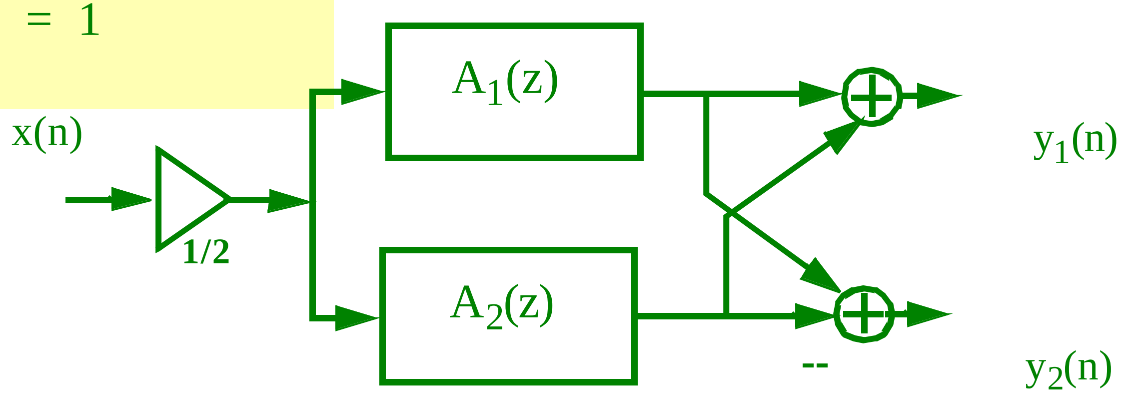
$$H(z) = z^{-M}\frac{D\left(z^{-1}\right)}{D(z)} = \prod_{k=1}^{L}\frac{z^{-2}+\alpha_{1i}z^{-1}+\alpha_{2i}}{1+\alpha_{1i}z^{-1}+\alpha_{2i}z^{-2}}$$



❑ Sistemas Complementarios $H_1(z)$ y $H_2(z)$

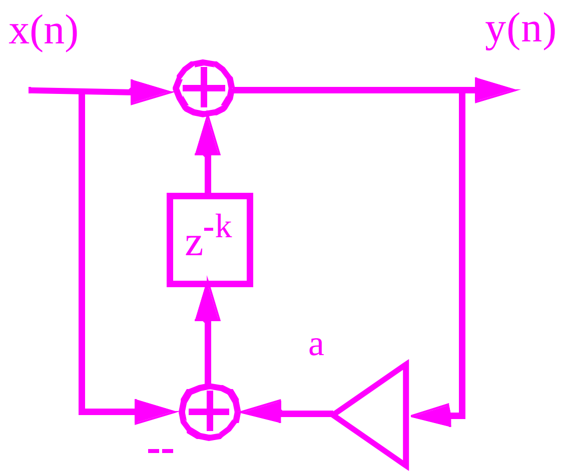
$$\left|H_1(\omega)\right|^2 + \left|H_2(\omega)\right|^2 = 1$$

$A_j(z)$ = Pasa-Todo



❑ Sistemas en Peine

$$H_k(z) = H\left(z^k\right)$$



Restricciones sobre los coeficientes

- **Denominador de las Secciones de 2º Orden:**

$$D_i(z) = 1 + \alpha_{1i} z^{-1} + \alpha_{2i} z^{-2} = \left(1 - p_{1i} z^{-1}\right)\left(1 - p_{2i} z^{-1}\right)$$

- **Condición de Estabilidad**

  $|p_{1i}|, |p_{2i}| < 1$

- **Implicaciones:**

  $|a_{2i}| = |p_{1i} p_{2i}| < 1$

  $|a_{1i}| < 1 + a_{2i}$

- **Polos Complejos:**

  $a_{1i}^2 < 4 a_{2i}$