第十七届北京信息科技大学程序设计竞赛 简要题解

author: postpone

A

最优的方案是把最长的两个木板作为边界。

B

我们把这个操作视为一个映射 $a \mapsto L(a)$。对于一个 a，如果我们把它的末尾反转（$0 \leftrightarrow 1$），那么答案也会反转。那么在所有数组中，$L(a)$ 取 0 和取 1 的数量相同，各为总数的一半。

因此答案为 2^{n-1}。复杂度 $O(T \log n)$。

C

将整个棋盘染成黑白相间的颜色（不妨令起点是黑色）。此时任意两个相邻的格子颜色都不同。如果起点和终点是一个颜色，那么整个路径走过的黑色格子比白色格子多 1 个；否则走过的黑色格子和白色格子数量相同。于是检查整个棋盘的黑白格子数量，是否符合要求即可。

在此基础上研究，可以得到更简单的结论：如果 n 和 m 都是偶数，一定不行；否则一定可以。

D

$n < 5$ 一定无解。$n \geq 5$ 时，构造一个“∞”形状的图（两个环有且仅有一个公共点）。

E

我们将操作得到的字符串，视作块与块的拼接：每个块可以是 `空`、`0`、`1` 或 `01`。这些块拼起来，形成了最终的字符串。而每个字符串也可以用这些块表示出来。

进一步地，考虑怎么表示字符串，能让**块的数量最少**。发现首先要把空块全部删掉。然后如果两个块依次是 `0` 和 `1`，那么我们以一个块 `01` 可以代替，块数减少。除此之外没别的情况了，块的序列是确定的。因此任意最终字符串的，**最小块数**的表示方法，一定是**唯一**的。

设最小**块数**（注意不是字符串长度）恰好为 m 的本质不同字符串数量为 $g(m)$，考虑如何转移。

若末尾为 `0` 或 `01`，则来自所有 $g(m-1)$ 的所有情况；若结尾是 `1`，那就不能来自 $g(m-1)$ 中末尾是 `0` 的情况，也就是要从 $g(m-1)$ 中扣去 $g(m-2)$。三种情况相加，即有

$$g(m) = 3g(m-1) - g(m-2)$$

这个递推非常眼熟，我们知道对于斐波那契数列 $F(x)$，有

$$\begin{aligned} F(2x+2) &= F(2x+1) + F(2x) \\ &= 2F(2x) + F(2x-1) \\ &= 3F(2x) - F(2x-2) \end{aligned}$$

这两个的递推是一样的。再由初值 $g(1) = 3 = F(4)$，得

$$g(m) = F(2m+2)$$

现在要求 $\sum_{m=0}^{n} g(m)$，即求 $\sum_{m=0}^{n} F(2m+2)$，由斐波那契数列求和恒等式

$$\sum_{m=0}^{n} F(2m+2) = F(2m+3) - 1$$

于是快速递推斐波那契数列即可，复杂度 $O(\log n)$。

> 这题 $n = 10^7$，也可以直接求出所有 $g(m)$ 之后求和，复杂度 $O(n)$。

F

假如我在一个桶里放了 a 个鲱鱼罐头和 b 个鸡腿，那么奶龙抽到鳕鱼罐头的概率为

$$f(a,b) = \frac{a}{2(a+b)} + \frac{n-a}{2(2n-a-b)}$$

a 和 b 都是 $[0,n]$ 的整数，且 $a+b \neq 0$，$2n-a-b \neq 0$。现在要求 $f(a,b)$ 的最大值。

提供一个初等的解法。

设 $s = a+b$，有

$$
\begin{aligned}
f(a,b) &= \frac{a}{2s} + \frac{n-a}{2(2n-s)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{s} + \frac{n-a}{2n-s}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[a\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2n-s}\right) + \frac{n}{2n-s}\right] \\
&:= \frac{1}{2}\left[g(s)\times a + h(s)\right]
\end{aligned}
$$

得：对于给定的 s，f 是关于 a 的一次函数。即最值一定出现在 a 取值的两个端点。

对于所有 s，最值都是 a 取端点时取到。

在 $1 \le s \le n$ 时，$a \in [0, s]$，有

$$
f(0,s) = \frac{n}{2(2n-s)}, \quad f(s,0) = \frac{1}{2} + \frac{n-s}{2(2n-s)}
$$

在 $n \le s \le 2n-1$ 时，$a \in [s-n, n]$，有

$$
f(n, s-n) = \frac{n}{2s}, \quad f(s-n, n) = 1 - \frac{n}{2s}
$$

由对称性，我们仅关注 $n \le s \le 2n-1$ 的情况，设

$$
g(s) = \frac{n}{2s}
$$

于是两个最值可以写成 $g(s)$ 和 $1-g(s)$，在定义域上，前者严格递减，后者严格递增。那么同样地，**全局最值一定会出现在 s 在定义域中取两端的时候**。

于是我们将 s 与 a 的最值代入，能得到，当 $s=1$ 且 $a=1$，或 $s=2n-1$ 且 $a=n-1$ 时，f 取最大值

$$
\boxed{f_{max} = \frac{3n-2}{2(2n-1)}}
$$

G

将三个点按照 x 坐标排序。然后连接两个点并延长，看剩下那个点在直线的上方还是下方，就可以判断开口方向。正确性是由二次函数的凸性保证的。

H

先将能选的区间处理出来。那么这题就变为：给 $O(n)$ 个区间，问最少选几个，能将覆盖 $[1,n]$。

经典贪心。从点 1 开始，不断选能到的，最远的右端点，复杂度 $O(n)$。

I

若 n 是奇数，构造 n 个 `a` 即可；否则在序列最后再加一个 `b`，正确性显然。

J

设 $f(0/1)$ 表示最后一次是减/加的情况下，最优的答案。对于每个位置，可以不选，如果选的话有 $f(0)+x \to f'(1)$，和 $f(1)-x \to f'(0)$。

规定了第一次一定是加，但是最后一次的符号是任意的。那么我们从后往前扫过去 dp 就行了，最后答案为 $f(1)$。

K

二分。检查时照题意模拟即可，复杂度 $O(n\log V)$，V 为值域。

L

本质上是看每个位置最终去了哪里。

设 $f(1,n)$ 为 $\{1,2,\dots,n\}$ 的排列按题意操作之后的结果。设 $f'(1,n)$ 为将 $f(1,n)$ 再翻转过来。那么有

$$\begin{aligned} f(1,n) &= \{n, f'(1,n-1)\} \\ &= \{n, f(1,n-2), n-1\} \\ &= \{n, n-2, f'(1,n-3), n-1\} \\ &= \dots \\ &= \{n, n-2, n-4, \dots, 1, \dots, n-3, n-1\} \end{aligned}$$

也就是说

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \to \{a_n, a_{n-2}, \dots, a_1, \dots, a_{n-3}, a_{n-1}\}$$

现在知道操作完的序列，那么变回去就行了。

M

按题意模拟。