



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی مکانیک

پروژه دوم درس
بررسی خیز و ارتعاشات تیر تیموشنکو با الگان محدود

نگارش
رضا نوپور هولاری (۴۰۲۱۲۶۹۲۴)

استاد درس
جناب آقای دکتر محمدرضا اسلامی

چکیده

در پروژه دوم درس المان محدود، به بررسی خیز و ارتعاشات تیر تموشناکو به روش المان محدود پرداخته می‌شود. در ابتدا، کلیات و اهمیت تیر و معادلات حاکم بر مسئله و همچنین شرح توضیحاتی از روش حل و الگوریتم داده شده است. سپس، در انتهای، بعد از صحتسنجی روش حل، نتایج حاصل در غالب نمودار و جدول شرح داده شده است. برای صحتسنجی کد Python نوشته شده در این پروژه از روش GDQ، المان محدود تجاری و مقاله معتبر موجود استفاده شد.

صفحه

فهرست مطالب

۷	فصل اول مقدمه و مرور ادبیات.....
۸	۱- مقدمه بر تیر تیموشنکو.....
۸	۲- تاریخچه و پیدایش تیر تیموشنکو.....
۹	۳- مطالعات موردی در زمینه تیر تیموشنکو.....
۱۱	۴- المان محدود.....
۱۲	۵- جمع‌بندی.....
۱۳	فصل دوم مسئله المان محدود تیر تیموشنکو.....
۱۴	۱- تیر نیموشنکو (حالت استاتیکی).....
۱۶	۲- تیر تیموشنکو (حالت دینامیکی).....
۱۶	۳- المان محدود تیر تیموشنکو.....
۱۸	۴- تابع شکل.....
۱۹	۵- روش نیومارک.....
۲۲	فصل سوم برنامه کامپیوترا.....
۲۳	۱- پیش‌پردازش.....
۲۴	۲- پردازش.....
۲۵	۳- پس‌پردازش.....
۲۶	فصل چهارم نتایج حالت استاتیک.....
۲۷	۱- ابزار صحّت‌سنگی.....
۳۰	۲- همگرایی پاسخ.....
۳۱	۳- اثر شرایط مرزی بر خیز تیر.....
۳۱	۴- اثر ضخامت به طول بر خیز تیر.....
۳۴	۵- اثر بارگذاری روی تیر.....
۳۷	فصل پنجم نتایج ارتعاشات.....
۳۸	۱- ابزار صحّت‌سنگی.....
۴۶	۲- همگرایی پاسخ دینامیکی.....
۴۷	۳- شکل‌های مود.....
۵۰	۴- اثر ضخامت به طول تیر بر فرکانس.....
۵۱	۵- شماره مود و فرکانس طبیعی.....
۵۱	۶- پاسخ گذرای سیستم.....

۵۵	فصل ششم جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
۵۷	منابع و مراجع
۵۸	منابع
۵۹	پیوست‌ها
۵۹	پ-۱- روش تفاضلات مربعی در حل تیر تیموشنسکو
۶۲	پ-۲- حل تحلیلی تیر تیموشنسکو
۶۳	پ-۲-۱- تیر تیموشنسکو دو سر ساده
۶۴	پ-۲-۲- تیر تیموشنسکو یک سر گیردار
۶۴	پ-۲-۳- تیر تیموشنسکو دو سر گیردار
۶۵	پ-۲-۴- تیر تیموشنسکو یک سر گیردار، یک سر ساده
۶۶	پ-۳- کدهای پروژه

صفحه

فهرست اشکال

شکل ۲ - ۱ تغییر شکل المان تیر تیموشنکو ۱۴

شکل ۳ - ۱ الگوریتم کد تیر تیموشنکو ۲۴

شکل ۴ - ۱ نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر با پاسخ تحلیلی برای $h = 0.001$ ۲۷

شکل ۴ - ۲ نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر با پاسخ تحلیلی برای $h = 0.002$ ۲۸

شکل ۴ - ۳ نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر با پاسخ تحلیلی برای $h = 0.01$ ۲۹

شکل ۴ - ۴ نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر با پاسخ تحلیلی برای $h = 0.02$ ۲۹

شکل ۴ - ۵ همگرایی نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر برای $h = 0.001$ ۳۰

شکل ۴ - ۶ نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر برای $h = 0.001$ ۳۱

شکل ۴ - ۷ نتایج المان محدود خیز تیر دوسر گیردار با ضخامت به طول متفاوت به طول یک متر ۳۲

شکل ۴ - ۸ نتایج المان محدود خیز تیر دوسرساده با ضخامت به طول متفاوت به طول یک متر ۳۲

شکل ۴ - ۹ نتایج المان محدود خیز تیر یک سرساده و یک سر گیردار با ضخامت به طول متفاوت به طول یک متر ۳۳

شکل ۴ - ۱۰ نتایج المان محدود خیز تیر یک سر گیردار با ضخامت به طول متفاوت به طول یک متر ۳۳

شکل ۴ - ۱۱ نتایج المان محدود خیز تیر دوسر گیردار با بارگذاری متفاوت به طول یک متر ۳۴

شکل ۴ - ۱۲ نتایج المان محدود خیز تیر دوسرساده با بارگذاری متفاوت به طول یک متر ۳۵

شکل ۴ - ۱۳ نتایج المان محدود خیز تیر یک سر گیردار یک سر ساده با بارگذاری متفاوت به طول یک متر ۳۵

شکل ۴ - ۱۴ نتایج المان محدود خیز تیر یک سر گیردار با بارگذاری متفاوت به طول یک متر ۳۶

شکل ۵ - ۱ شکل مود اول در حالت دو سر گیردار در تحلیل مودال انسیس ۴۴

شکل ۵ - ۲ شکل مود دوم در حالت دو سر گیردار در تحلیل مودال انسیس ۴۵

شکل ۵ - ۳ شکل مود اول در حالت یک سر گیردار - یک سر آزاد در تحلیل مودال انسیس ۴۵

شکل ۵ - ۴	شکل مود دوم در حالت یک سر گیردار - یک سر آزاد در تحلیل مودال انسیس.....	۴۵
شکل ۵ - ۵	همگرایی نتایج المان محدود فرکانس تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر.....	۴۶
شکل ۵ - ۶	نتایج المان محدود برای شکل مود تیر با شرایط مرزی دو سر گیردار به طول یک متر.....	۴۷
شکل ۵ - ۷	نتایج المان محدود برای شکل مود تیر با شرایط مرزی دو سر ساده به طول یک متر.....	۴۸
شکل ۵ - ۸	نتایج المان محدود برای شکل مود تیر با شرایط مرزی یک سر گیردار - یک سر ساده به طول یک متر.....	۴۹
شکل ۵ - ۹	نتایج المان محدود فرکانس تیر تیموشنکو برای ضخامت به طول متفاوت برای انواع شرایط مرزی.	۵۰
شکل ۵ - ۱۰	نتایج المان محدود فرکانس تیر تیموشنکو برای شماره مودهای متفاوت برای انواع شرایط مرزی.	۵۱
شکل ۵ - ۱۱	نتایج نیومارک پاسخ گذرا تیر تیموشنکو برای شرط مرزی دوسر گیردار.....	۵۲
شکل ۵ - ۱۲	نتایج نیومارک پاسخ گذرا تیر تیموشنکو برای شرط مرزی یک سر گیردار - یک سر آزاد.....	۵۲
شکل ۵ - ۱۳	نتایج نیومارک پاسخ گذرا تیر تیموشنکو برای شرط مرزی یک سر گیردار- یک سر ساده.....	۵۳
شکل ۵ - ۱۴	نتایج نیومارک پاسخ گذرا تیر تیموشنکو برای شرط مرزی دوسر ساده.....	۵۳
شکل ۵ - ۱۵	مقایسه نتایج نیومارک پاسخ گذرا تیر تیموشنکو برای انواع شرایط مرزی.....	۵۴
شکل ۵ - ۱۶	نمودار مکان زمان تابع $Ft = 100\sin 2tsin(\pi xL)$	۵۴
شکل پ - ۱	فلوچارت اجرای کد المان محدود Python برای تیر تیموشنکو	۶۶

صفحه

فهرست جداول

جدول ۳ - ۱	قسمت پیش‌پردازش کد پایتون برای تیر تیموشنسکو.....	۲۳
جدول ۳ - ۲	قسمت پس‌پردازش کد پایتون برای تیر تیموشنسکو.....	۲۵
جدول ۵ - ۱	مقایسه نتایج حاصل از المان محدود با (دو سر گیردار).....	۳۹
جدول ۵ - ۲	مقایسه نتایج حاصل از المان محدود با (دو سر ساده).....	۴۰
جدول ۵ - ۳	مقایسه نتایج حاصل از المان محدود با روش GDQ (دو سر گیردار).....	۴۱
جدول ۵ - ۴	مقایسه نتایج حاصل از المان محدود با روش GDQ (دو سر ساده).....	۴۲
جدول ۵ - ۵	مقایسه نتایج حاصل از المان محدود با روش GDQ (یک سر گیردار، یک سر آزاد).....	۴۳
جدول ۵ - ۶	مقایسه نتایج حاصل از نرم‌افزار انسیس و حل المان محدود برای دو حالت دو سر گیردار و یک سر گیردار - یک سر آزاد و محاسبه خطای موجود.....	۴۴
جدول پ - ۱	کد Python مسئله المان محدود برای خیز تیر تیموشنسکو.....	۶۷
جدول پ - ۲	کد فانکشن Newmark مسئله المان محدود برای پاسخ گذرا تیر تیموشنسکو.....	۷۱
جدول پ - ۳	کد حل ارتعاشات تیر تیموشنسکو به روش GDQ (برای صحتسنجی) با استفاده از کد پایتون نوشته شده.....	۷۲
جدول پ - ۴	کد حل ارتعاشات تیر تیموشنسکو به روش FEM با استفاده از کد پایتون نوشته شده.....	۷۴

فصل اول

مقدمه و مرور ادبیات

مقدمه

در این بخش ابتدا خلاصه‌ای از اهمیت خیز و ارتعاشات و روش المان محدود در پژوهش‌ها بیان خواهد شد.

۱-۱- مقدمه بر تیر تیموشنکو

در دنیای مهندسی سازه و مکانیک جامدات، مدل‌های مختلفی برای تحلیل رفتار تیرها و سازه‌های خمی وجود دارند. یکی از این مدل‌های برجسته، تیر تیموشنکو است که به نام استفان تیموشنکو^۱، مهندس و دانشمند روسی-آمریکایی، نامگذاری شده است. تیر تیموشنکو به دلیل دقیق‌تری خود در تحلیل تغییر شکل‌ها و تنش‌ها، به ویژه در تیرهای کوتاه و ضخیم، جایگاه ویژه‌ای در تحقیقات و کاربردهای مهندسی یافت.

۱-۲- تاریخچه و پیدایش تیر تیموشنکو

استفان تیموشنکو (۱۸۷۸-۱۹۷۲)، یکی از پیشگامان مکانیک جامدات و تحلیل سازه‌ها، در اوایل قرن بیستم مدل تیر خود را معرفی کرد. در آن زمان، تئوری کلاسیک تیر اویلر-برنولی که تنها تغییر شکل‌های خمی را در نظر می‌گرفت، به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گرفت. این تئوری فرض می‌کرد که مقاطع عرضی تیر پس از خمی همچنان عمود بر محور خنثی باقی می‌مانند و از اثرات تغییر شکل بر بشی صرف‌نظر می‌کرد. اما تیموشنکو با ارائه مدل خود، این محدودیت‌ها را برطرف کرد و مدلی جامع‌تر و دقیق‌تر برای تحلیل تیرها ارائه داد. مدل تیر تیموشنکو بر اساس دو فرض اساسی استوار است:

۱- توزیع برش عرضی: در مدل تیموشنکو، تغییر شکل بر بشی در مقاطع تیر مورد توجه قرار می‌گیرد.

این تغییر شکل‌ها منجر به تغییرات اضافی می‌شوند که در مدل اویلر-برنولی نادیده گرفته شده

¹ Stepan Prokopovich Timoshenko

بودند. این اصلاح کلیدی به مدل تیموشنکو اجازه می‌دهد تا رفتار تیرها را با دقت بیشتری تحلیل کند، به ویژه در مواردی که اثرات برشی قابل توجه است.

۲- تغییر شکل دورانی: تیموشنکو همچنین اثرات دوران مقاطع عرضی را در نظر می‌گیرد. در حالی که در مدل اویلر-برنولی فرض می‌شود که مقاطع عرضی پس از خمس همچنان عمود بر تار خنثی باقی می‌مانند، در مدل تیموشنکو این مقاطع ممکن است دوران داشته باشند. این دوران‌ها منجر به تغییرات اضافی در توزیع تنش‌ها و تغییر شکل‌ها می‌شوند که در مدل کلاسیک لحاظ نشده‌اند. تیر تیموشنکو در مقایسه با مدل اویلر-برنولی، دقت بیشتری در تحلیل رفتار تیرها دارد، به ویژه در تیرهای کوتاه و ضخیم که اثرات برشی و چرخشی برجسته‌تر هستند. این دقت بالا باعث شده است که مدل تیموشنکو در بسیاری از زمینه‌های مهندسی و علوم کاربردی مورد استفاده قرار گیرد، از جمله: **مهندسی عمران:** در تحلیل و طراحی پل‌ها، ساختمان‌ها و سایر سازه‌های بزرگ که نیاز به دقت بالا در تحلیل تغییر شکل‌ها و تنش‌ها دارند.

مهندسی مکانیک: در طراحی و تحلیل قطعات مکانیکی مانند تیرهای حامل بار در ماشین‌آلات و وسایل نقلیه.

صنایع هوافضا: در تحلیل و طراحی بال‌ها و بدنه هوپیماها که نیاز به دقت بالا در پیش‌بینی تغییر شکل‌ها تحت بارهای مختلف دارند.

نانوتکنولوژی: در تحلیل رفتار سازه‌های ریزمقیاس که اثرات برشی و چرخشی در آن‌ها قابل توجه است.

۱-۳- مطالعات موردنی در زمینه تیر تیموشنکو

در دهه‌های اخیر پژوهش‌های اجرا شده در زمینه تیر تیموشنکو را می‌توان در چند بخش به شرح ذیل دسته‌بندی نمود، تحلیل تیرهای تیموشنکو ساخته شده از مواد کامپوزیت، تحلیل تیرهای تیموشنکو با استفاده از روش‌های المان محدود، تحلیل‌ها در مقیاس نانو و تحلیل‌های دینامیکی و حرارتی.

در سال ۲۰۰۱ توسط لین و هیاسو، معادلات حاکم بر ارتعاش خطی تیر تیموشنکو چرخان با استفاده از اصول دالamber و کار مجازی استخراج شده‌اند [۱]. برای درک تمام اثرات اینرسی و اتصالات بین تغییر

شکل‌های امتدادی و خمشی، از نظریه تیر کاملاً غیرخطی هندسی استفاده شده است. همچنین، تأثیر نیروی کوریولیس بر فرکانس طبیعی تیر چرخان بررسی و روشی مبتنی بر حل سری توانی برای تعیین فرکانس طبیعی پیشنهاد شده است. وانگ و همکاران در سال ۲۰۰۶، به تحلیل ارتعاشات آزاد نanolوله‌های کربنی چند دیواره با استفاده از مدل تیر Timoshenko می‌پردازند [۲]. با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی (DQ)، معادلات حاکم بر تیر Timoshenko برای نanolوله‌های با نسبت‌های طول به قطر و شرایط مرزی مختلف حل شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که مدل تیر اویلر برای نسبت‌های طول به قطر کوچک و مودهای ارتعاش بالا فرکانس‌ها را به طور قابل توجهی بیشتر برآورد می‌کند و در این شرایط مدل تیر Timoshenko به پیش‌بینی دقیق‌تری از فرکانس‌ها منجر می‌شود. سیمسک در ۲۰۱۰، به تحلیل دینامیکی غیرخطی یک تیر FG با تکیه‌گاه‌های پین‌شده تحت بار هارمونیک متحرک با استفاده از نظریه تیر Timoshenko و روابط کرنش-جابجایی غیرخطی فون-کارمان پرداخته است [۳]. شرایط قیود تکیه‌گاه‌ها با استفاده از ضرایب لاگرانژ در نظر گرفته شده و معادلات غیرخطی حرکت به کمک روش Newmark- β و روش تکرار مستقیم حل شده‌اند. در این مطالعه، اثرات تغییرات بزرگ، توزیع مواد، سرعت بار متحرک و فرکانس تحریک بر جابجایی‌های تیر، ممان‌های خمشی و تنش‌ها بررسی شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که این اثرات نقش بسیار مهمی در پاسخ‌های دینامیکی سازه دارند و نتایج جدیدی برای دینامیک غیرخطی تیرهای FG تحت بارهای متحرک ارائه شده است.

در [۴]، ویژگی‌های ارتعاش آزاد میکروبیم‌هایی ساخته شده از مواد FGM بر اساس نظریه تیر Timoshenko با گرادیان کرنش موری-تانaka مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از یک مطالعه پارامتری تأثیر ضخامت تیر، پارامتر مقیاس بی‌بعد و نسبت نازکی بر فرکانس‌های طبیعی میکروبیم‌های FGM نشان داده شد. همچنین، مشاهده شد که با افزایش نسبت طول به ضخامت میکروبیم، مقدار فرکانس طبیعی بی‌بعد به ازای همه مقادیر شاخص گرادیان به کاهش می‌پیوندد. در مقاله [۵]، به تحلیل ارتعاش آزاد نanolوله‌های کربنی دو دیواره تعبیه‌شده در یک محیط الاستیک بر اساس نظریه الاستیسیته غیر محلی ارینگ با استفاده از نظریه تیر Timoshenko می‌پردازد. معادلات حرکت که با نیروهای بین‌لایه‌ای و اندروالس به هم متصل هستند، با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده و با روش المان محدود برای یافتن فرکانس‌های طبیعی حل شده‌اند؛ اثرات پارامترهای مختلف و شرایط مرزی نیز بررسی شده‌اند. همچنین، [۶] به مطالعه ارتعاشات با دامنه بزرگ قوس‌های ساخته شده از مواد متخلخل با FG با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول Timoshenko می‌پردازد. معادلات حرکت غیرخطی با استفاده از اصل همیلتون و غیرخطی هندسی فون-

کارمان استخراج شده و با تکنیک دو مرحله‌ای perturbation و روش گالرکین برای شرایط مرزی پیشنهاد شده حل شده‌اند؛ تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های خطی و غیرخطی قوس‌ها بررسی شده است.

۱-۴- المان محدود

در تاریخچه مکانیک، روش اجزای محدود (FEM) پیشینه‌ای دارد که به اوایل قرن بیستم برمی‌گردد. بنیان‌گذاران این روش، افرادی مانند والتر ریتز و بوریس گالرکین بودند که با ایده‌های نوآورانه خود، زمینه را برای توسعه این تکنیک عددی قادرمند فراهم کردند. والتر ریتز، ریاضیدان برجسته، در دهه ۱۹۲۰ روش variational را معرفی کرد که بعدها به عنوان پیشگامی برای FEM شناخته شد. روش ریتز شامل تقریب حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از مجموعه‌ای از توابع آزمایشی بود. این روش که به نام خود او معروف شد، گامی مهم در جهت تحلیل عددی مسائل ساختاری پیچیده به شمار می‌رفت.

بوریس گالرکین با تکیه بر کار ریتز، در میانه قرن بیستم الگوی حل مسائل را اصلاح کرد و روشی را ابداع نمود که امروزه به روش گالرکین معروف است. نوآوری گالرکین شامل ضرب معادله دیفرانسیل در یک تابع وزن و انتگرال‌گیری در دامنه بود که منجر به سیستمی از معادلات جبری می‌شد که قابلیت حل محاسباتی داشتند. روش گالرکین چارچوبی سیستماتیک و دقیق‌تر برای حل معادلات دیفرانسیل از طریق تقریب عددی فراهم کرد. ادغام ایده‌های ریتز و گالرکین زمینه را برای فرمول‌بندی و حل روش اجزای محدود در دهه ۱۹۵۰ فراهم آورد. مهندسان و ریاضیدانان به پتانسیل FEM به عنوان ابزاری کارآمد برای حل مسائل مهندسی، خصوصاً در تحلیل سازه‌ها، پی برندند.

کاربردهای اولیه FEM بر حل مسائل مکانیک سازه مانند تحلیل خرپاها و قاب‌ها متمرکز بود. توانایی این روش در مدیریت هندسه‌های پیچیده و شرایط مرزی، آن را به ابزاری ارزشمند برای پیش‌بینی رفتار سازه‌ها تحت شرایط بارگذاری مختلف تبدیل کرد. با ظهور رایانه‌های دیجیتال در نیمه دوم قرن بیستم، قابلیت‌های FEM به طور چشمگیری گسترش یافت. به لطف قدرت محاسباتی این ماشین‌ها، مهندسان اکنون می‌توانند مسائل بزرگ‌تر و پیچیده‌تر را با دقت و کارایی بیشتری حل کنند.

پذیرش گسترده FEM در صنایعی مانند هوافضا، خودروسازی و مهندسی عمران، موقعیت آن را به عنوان یک تغییر دهنده بازی در زمینه مکانیک ثبت کرد. بسته‌های نرم‌افزار تجاری FEM در دهه‌های

و ۱۹۸۰ به بازار آمدند و این روش را برای مهندسان و طراحان در سراسر جهان در دسترس تر کردند. با پیشرفت منابع محاسباتی، محققان شروع به استفاده از FEM در طیف وسیع تری از رشته‌ها، از جمله دینامیک سیالات، انتقال حرارت و الکترومغناطیسی کردند. تطبیق‌پذیری این روش، آن را به ابزاری برای شبیه‌سازی طیف متنوعی از پدیده‌های فیزیکی در حوزه‌های مختلف علمی و مهندسی تبدیل کرده است. در عصر حاضر، FEM به ابزاری ضروری برای مهندسان و دانشمندان تبدیل شده است و آنها را قادر می‌سازد تا با مسائل پیچیده در محیط‌های مجازی با دقت و قابلیت اطمینان برخورد کنند. از دستگاه‌های ریزمقیاس در فناوری نانو گرفته تا پروژه‌های زیرساختی بزرگ، FEM نقشی محوری در طراحی، تحلیل و بهینه‌سازی سیستم‌های مکانیکی ایفا می‌کند.

تکامل FEM از اندیشه‌های نوآورانه ریتز و گالرکین تا وضعیت کنونی آن به عنوان سنگ بنای مکانیک محاسباتی، گواهی بر نوآوری و پشتکار محققان است. در زمینه مهندسی سازه، وقتی پیچیدگی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل سازه از حوزه حل‌های تحلیلی فراتر می‌رود، روش‌های عددی و نیمه‌تحلیلی مختلفی برای مقابله با این چالش پیشنهاد می‌شود. FEM بسیار تطبیق‌پذیر است و می‌تواند برای طیف گسترده‌ای از مسائل در مهندسی سازه، از جمله مسائل با هندسه‌های پیچیده و خواص مواد، اعمال شود [۷-۱۰].

۱-۵-۱- جمع‌بندی

با توجه به مطالب بیان شده، می‌توان نتیجه گرفت مطالعه غشاء‌ها در مهندسی دارای کاربردهای فراوانی می‌باشد. بنابراین در این پژوهه، بررسی المان محدود یک غشاء مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. در فصل دوم، به مدلسازی المان محدود پرداخته می‌شود، سپس در فصل چهارم، به بررسی کد المان محدود موجود، در فصل چهارم بخ نتایج استاتیک و در نهایت فصل پنجم به نتایج ارتعاشات پرداخته خواهد شد. در انتهای نیز جمع‌بندی و نتیجه‌گیری بیان شده است.

فصل دوم

مسئله المان محدود تیر تیموشنکو

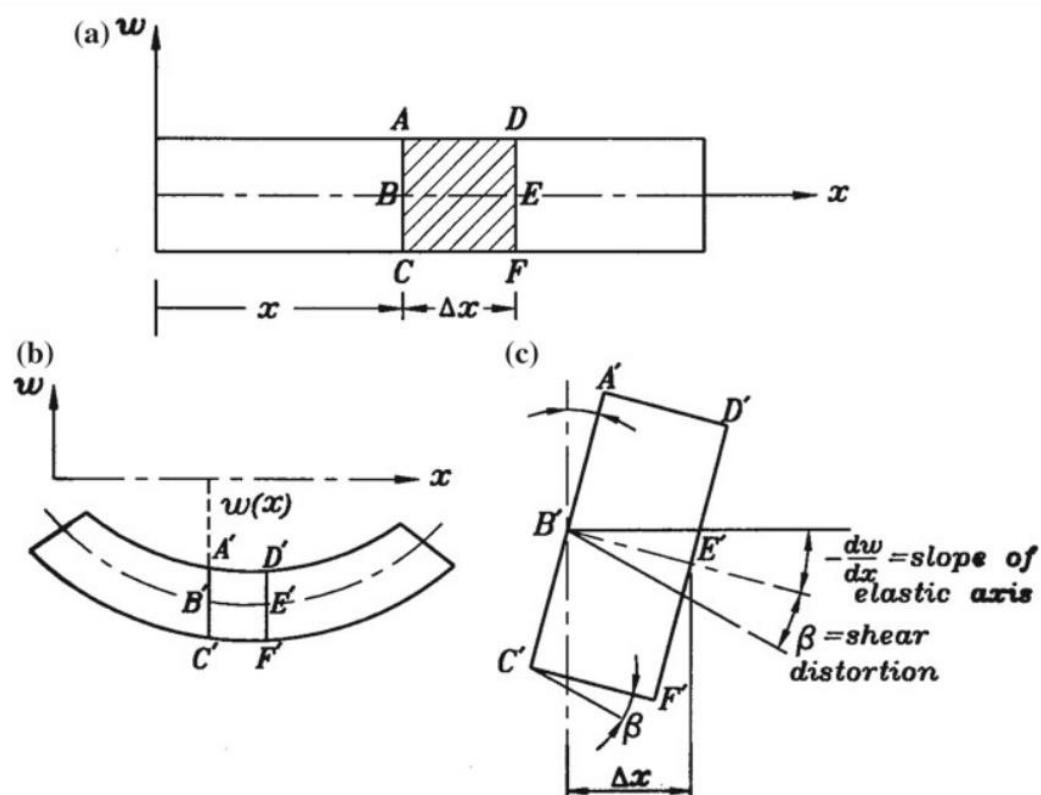
مقدمه

در این قسمت مسئله المان محدود برای خیز و ارتعاشات تیر تیموشنکو مورد مطالعه قرار می‌گیرد [۱].

۱-۲- تیر تیموشنکو (حال استاتیکی)

بر اساس تئوری تیر تیموشنکو، تیری که تحت بار جانبی و توزیع لنگر خمشی در طول آن قرار می‌گیرد، تغییر شکل می‌دهد به طوری که مقاطع صفحه آن پس از تغییر شکل صاف می‌مانند، اما لزوماً عمود بر محور طولی تیر نیستند. این فرض منجر به موقعیتی می‌شود که در آن تغییر شکل برشی عرضی وجود دارد، برخلاف نظریه تیر اویلر، که در آن این فرض نادیده گرفته شد.

تیری را همانطور که در شکل ۱-۲ (a) نشان داده در نظر بگیرید. انحراف جانبی با w نشان داده می‌شود. المانی از تیر در فاصله x از مبدأ با طول Δx نشان داده می‌شود. پس از تغییر شکل جانبی تیر، المان به مقدار $(x)w$ به سمت پایین تغییر شکل داده و به موقعیت نشان داده شده در شکل ۱-۲ (b) رسیده است.



شکل ۲ - ۱ تغییر شکل المان تیر تیموشنکو.

مقطع صفحه صاف ABC شکل ۱-۲ (a) که در ابتدا بر محور تیر عمود بود، به خط صاف $A'B'C'$ که دیگر عمود بر محور تیر نیست و با زاویه $(x)\psi$ چرخیده است تبدیل شده است. زاویه $(x)\psi$ با شیب تیر ψ برابر نیست و بنابراین، خط $A'B'C'$ بر محور تیر نیز عمود نمی‌باشد. تفاوت $(-dw/dx) - \psi$ اندازه‌ای از تنش برشی است و به تغییر شکل برشی مربوط می‌شود. مولفه‌های جابجایی در راستای ضخامت تیر برابر هستند با،

$$\begin{aligned} u &= -z\psi(x) \\ v &= 0 \\ w &= w(x) \end{aligned} \quad (1-2)$$

تنش‌های غیر صفر برابرند با،

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -Ez \frac{d\psi}{dx} \\ \tau_{zx} &= Gk \left(-\psi + \frac{dw}{dx} \right) \end{aligned} \quad (2-2)$$

که در آن G مدول برشی و k ثابت تصحیح برشی است.

برای گشتاور M و نیروی برشی V به تنش نرمال σ_{xx} و تنش برشی τ_{zx} می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma_{xx} z dA = -EI \frac{d\psi}{dx} \\ V &= \int_A \tau_{zx} dA = kGA \left(-\psi + \frac{dw}{dx} \right) \end{aligned} \quad (3-2)$$

از تئوری تیرها، نیروی برشی و لنگر خمی به صورت زیر داریم،

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= -f(x) \\ \frac{dM}{dx} &= V \end{aligned} \quad (4-2)$$

که در آن $f(x)$ توزیع بار جانبی در واحد طول است. با جایگزینی معادلات (۳-۲) در (۴-۲) خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[kGA \left(-\psi + \frac{dw}{dx} \right) \right] + f(x) &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\psi}{dx} \right) + kGA \left(-\psi + \frac{dw}{dx} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5-2)$$

سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی^۱ برای توابع ψ و w باید به طور همزمان (کوپل) حل شود تا توزیع استاتیکی این توابع در امتداد محور تیر بدست آید.

۲-۲- تیر تیموشنکو (حالت دینامیکی)

هنگامی که نیروی جانبی اعمال شده تابعی از زمان است، $f = f(x, t)$ ، تیر به ارتعاش درمی‌آید و عبارت اینرسی باید در معادلات حاکم گنجانده شود. سیستم معادلات حاکم بر ارتعاشات جانبی تیر تیموشنکو به شرح زیر می‌باشد،

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[kGA \left(-\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + f(x, t) &= m\ddot{w} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + kGA \left(-\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= J\ddot{\psi} \end{aligned} \quad (6-2)$$

که m جرم تیر در واحد طول و J ممان جرمی در واحد طول است. هنگامی که خواص مکانیکی و هندسی در طول تیر ثابت باشد، خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} -kGA \frac{\partial \psi}{\partial x} + kGA \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t) - m\ddot{w} &= 0 \\ EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - kGA\psi + kGA \frac{\partial w}{\partial x} - J\ddot{\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (7-2)$$

۳-۲- المان محدود تیر تیموشنکو

مدل المان محدود تیر با تقسیم تیر به تعدادی المان آغاز می‌شود. برای المان پایه (e)، توابع شکل تقریبی برای توابع وابسته ψ و w برابر هستند با،

$$\begin{aligned} \psi^* &= \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \psi_i(t) \\ w^* &= \sum_{i=1}^m N_i(x) w_i(t) \end{aligned} \quad (8-2)$$

^۱ ordinary differential equations (ODEs)

با جایگزینی توابع شکل برای ψ^* و w^* در معادله (۷-۲)، باقی مانده ها به دست می آیند. سپس باقیمانده ها با توجه به توابع شکل طبق روش استاندارد گالرکین به صورت متعامد ساخته خواهد بود،

$$\begin{aligned} \int_{V(e)} \left[-kGA \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + kGA \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + f(x, t) - m\ddot{w}^* \right] N_i \, dx dy &= 0 \\ \int_{V(e)} \left[EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - kGA\psi + kGA \frac{\partial w^*}{\partial x^*} - J\ddot{\psi}^* \right] \phi_i \, dx dy &= 0 \end{aligned} \quad (9-2)$$

فرم ضعیف ترم های $\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}$ در معادله (۹-۲) به صورت زیر بدست خواهد آمد،

$$\begin{aligned} kGA \frac{\partial w^*}{\partial x} N_i \Big|_0^L - kAG \int_0^L \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{dN_i}{dx} dx - kAG\psi^* N_i \Big|_0^L \\ + kAG \int_0^L \psi^* \frac{dN_i}{dx} dx + \int_0^L f(x, t) N_i dx \\ - m \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L w^* N_i dx = 0 \end{aligned} \quad (10-2)$$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \phi_i \Big|_0^L - EI \int_0^L \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{d\phi_i}{dx} dx - kAG \int_0^L \psi^* \phi_i dx \\ + kAG \int_0^L \frac{\partial w^*}{\partial x} \phi_i dx - J \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L \psi^* \phi_i dx = 0 \end{aligned} \quad (11-2)$$

با جایگزینی w^* و ψ^* از معادلات (۸-۲) خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} m \ddot{w}_j \int_0^L N_j N_i dx + kAGw_j \int_0^L \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx - kAG\psi_j \int_0^L \phi_j \frac{dN_i}{dx} dx \\ = \int_0^L f(x, t) N_i dx + kGA \frac{\partial w^*}{\partial x} N_i \Big|_0^L + kAG\psi^* N_i \Big|_0^L \end{aligned} \quad (12-2)$$

$$\begin{aligned} J \ddot{\psi}_j \int_0^L \phi_j \phi_i dx + EI\psi_j \int_0^L \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx + kAG\psi_j \int_0^L \phi_j \phi_i dx \\ - kAGw_j \int_0^L \frac{dN_j}{dx} \phi_i dx = EI \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \phi_i \Big|_0^L \end{aligned} \quad (13-2)$$

معادلات فوق به فرم ماتریسی به صورت زیر خواهند بود،

$$[M]\{\ddot{w}\} + [K_1]\{w\} + [K_2]\{\psi\} = \{F_1\} + \{F_1^{BC}\} \quad (14-2)$$

$$[J]\{\ddot{\psi}\} + [K_3]\{\psi\} + [K_4]\{w\} = \{F_2\} + \{F_2^{BC}\} \quad (15-2)$$

در حالی که زیرماتریس های عنصر پایه (e) برابر می باشد با،

$$\begin{aligned}
 [m]_{ij}^{(e)} &= m \int_0^L N_i N_j dx \\
 [k_1]_{ij}^{(e)} &= kAG \int_0^L \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \\
 [k_2]_{ij}^{(e)} &= kAG \int_0^L \frac{dN_i}{dx} \phi_j dx \\
 \{f_1\}^{BC} &= kAG \left(\frac{\partial w^*}{\partial x} N_i - \psi^* N_i \right)_0^L \\
 \{f_1^{BC}\}_i^{(e)} &= kAG \left(\frac{\partial w^*}{\partial x} N_i + \psi^* N_i \right)_0^L \quad (16-2) \\
 \{j\}_{ij}^{(e)} &= J \int_0^L \phi_i \phi_j dx \\
 [k_3]_{ij}^{(e)} &= EI \int_0^L \frac{d\phi_i}{dx} \phi_j dx + kAG \int_0^L \phi_i \phi_j dx \\
 [k_4]_{ij}^{(e)} &= -kAG \int_0^L \frac{dN_j}{dx} \phi_i dx \\
 \{f_2\}^{BC} &= EI \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \phi_i \right)_0^L
 \end{aligned}$$

با استفاده از یک الگوریتم مناسب برای حل، سیستم معادلات (14-۲) و (15-۲) در حوزه زمان حل می شوند. شرایط اولیه و مرزی باید برای ورود به الگوریتم دینامیک شناخته مشخص شود.

۴-۲ - قابع شکل

حال با فرض توابع شکل خطی برای متغیرهای مجھول در معادلات (۸-۲)، مقادیر ماتریس های المان محاسبه می شوند. توابع شکل ($N_i(x)$ و $\phi_i(x)$) برابر هستند با،

$$\begin{aligned}
 N_i &= \begin{cases} N_1 \\ N_2 \end{cases} & N_1 &= \frac{x_2 - x}{L} & N_2 &= \frac{x - x_1}{L} \\
 \phi_i &= \begin{cases} \phi_1 \\ \phi_2 \end{cases} & \phi_1 &= \frac{x_2 - x}{L} & \phi_2 &= \frac{x - x_1}{L} \quad (17-2)
 \end{aligned}$$

با استفاده از این توابع شکل، ماتریس های جرمی المان در معادله (16-۲) برابر خواهند بود با،

$$\begin{aligned}[M]_{ij}^{(e)} &= m \int_0^L \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_1 N_2 & N_2^2 \end{bmatrix} dx = \frac{mL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ [J]_{ij}^{(e)} &= J \int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1^2 & \phi_1 \phi_2 \\ \phi_1 \phi_2 & \phi_2^2 \end{bmatrix} dx = \frac{JL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (18-2)$$

ماتریس‌های سختی المان در معادله (16-۲) برابر خواهد بود با،

$$\begin{aligned}[K_1]_{ij}^{(e)} &= kAG \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} dx = \frac{kAG}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ [K_2]_{ij}^{(e)} &= kAG \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \phi_1 & \frac{dN_1}{dx} \phi_2 \\ \frac{dN_2}{dx} \phi_1 & \frac{dN_2}{dx} \phi_2 \end{bmatrix} dx = \frac{kAG}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ [K_3]_{ij}^{(e)} &= EI \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} & \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} \\ \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} & \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} \end{bmatrix} dx - kAG \int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1^2 & \phi_1 \phi_2 \\ \phi_1 \phi_2 & \phi_2^2 \end{bmatrix} dx \\ &= EI \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{kAGL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ [K_4]_{ij}^{(e)} &= kAG \int_0^L \begin{bmatrix} \phi_1 \frac{dN_1}{dx} & \phi_1 \frac{dN_2}{dx} \\ \phi_2 \frac{dN_1}{dx} & \phi_2 \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} dx = \frac{kAG}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

۲-۵- روش نیومارک

برای حل معادله (۱۴-۲ و ۱۵-۲) می‌توان از روش نیومارک استفاده نمود. در بسیاری از مسائل دینامیکی، به دلیل پیچیدگی معادله در حوزه زمان امکان استفاده از روش جداسازی متغیرهای مکان و زمان وجود ندارد، که از آن جمله می‌توان به ارتعاشات اجباری سازه‌ها تحت نیروی خارجی اشاره نمود. در این حالت می‌توان پس از گستته سازی معادلات به کمک روش نیومارک اقدام به حل معادلات و پاسخ سیستم نمود. در سال ۱۹۵۹ میلادی ناتان نیومارک^۱، مهندس آمریکایی و استاد دانشگاه ایینویز، روشی عددی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم ارائه نمود که به افتخار وی تحت عنوان روش نیومارک شناخته

^۱ Nathan Newmark

می شود. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل زمانی مرتبه دوم متشکل از N معادله جفت شده را با شکل زیر در نظر می گیریم،

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{F_t\}$$

که در آن، بالا نویس دات بیانگر مشتق زمانی بوده، ماتریس های سختی، میرایی و جرمی نیز به ترتیب با M و C, K نشان داده شده است. بردار نیروهای خارجی نیز F_t می باشد. در این روش نیومارک، تغییرات شتاب در بازه های زمانی متواالی بر حسب مقادیر شتاب در دو سر بازه تقریب زده می شود و الگوریتم به شرح زیر می باشد.

۱- ابتدا تعیین شرایط اولیه حاکم بر مسئله

۲- برای محاسبه شتاب در لحظه اولیه از فرمول

$$\{\ddot{X}_0\} = [M]^{-1}(\{F_0\} - [C_s]\{\dot{X}_0\} + [K]\{X_0\})$$

محدودیت این روش در وارون پذیری ماتریس جرمی می باشد.

۳- انتخاب مقادیر مناسب برای ضرایب ثابت α و β و گام زمانی،

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, \alpha_1 = \frac{\alpha}{\beta \Delta t}, \alpha_2 = \frac{1}{\beta \Delta t} \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2\beta} - 1, \alpha_4 = \frac{\alpha}{\beta} - 1, \alpha_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \end{aligned}$$

که مقادیر α و β عموما به صورت زیر تعریف می شوند،

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6} \text{ or } \frac{1}{4}$$

با توجه به فرمول ها، در هنگام در نظر گرفتن $\beta = \frac{1}{4}$ ، در هر بازه زمانی شتاب به شکل ثابت و برابر با میانگین مقدار شتاب در دو سر بازه در نظر گرفته می شود و به ازای $\beta = \frac{1}{6}$ ، شتاب در یک بازه به صورت تابع خطی از زمان در نظر گرفته می شود. برای پایداری جوابها لازم است،

$$\frac{\Delta t}{T_f} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha - 2\beta}}$$

۴- تعریف ماتریس سفی مؤثر به صورت،

$$[K^{eff}] = [K] + \alpha_0[M] + \alpha_1[C]$$

۵- نیروهای مؤثر در هر گام زمانی به صورت،

$$\begin{aligned} \{F_{t+\Delta t}^{eff}\} &= \{F_{t+\Delta t}\} + [M](\alpha_0\{X_t\} + \alpha_2\{\dot{X}_t\} + \alpha_3\{\ddot{X}_t\}) \\ &\quad + [C](\alpha_1\{X_t\} + \alpha_4\{\dot{X}_t\} + \alpha_5\{\ddot{X}_t\}) \end{aligned}$$

۶- محاسبه بردار جابجایی در زمان،

$$\{X_{t+\Delta t}\} = [K^{eff}]^{-1}\{F_{t+\Delta t}^{eff}\}$$

۷- محاسبه مقادیر سرعت و شتاب،

$$\{\dot{X}_{t+\Delta t}\} = \alpha_1(\{X_{t+\Delta t}\} - \{X_t\}) - \alpha_4\dot{X}_t - \alpha_5\ddot{X}_t$$

$$\{\ddot{X}_{t+\Delta t}\} = \alpha_0(\{X_{t+\Delta t}\} - \{X_t\}) - \alpha_2\dot{X}_t - \alpha_3\ddot{X}_t$$

۸- بازگشت به گام چهارم.

فصل سوم

برنامه کامپیووتری

مقدمه

در این بخش ابتدا خلاصه‌ای از برنامه کامپیوترا حاضر ارائه می‌شود. برنامه کامپیوترا در پایتون در دو قسمت حل استاتیکی و حل دینامیکی تهیه شده است. در قسمت حل استاتیکی، بدون در نظر گرفتن اینرسی، هدف شناسایی خیز و تغییرات عمودی تیر تیموشنکو در اثر اعمال با خارجی بر روی آن است. در قسمت دوم، بخش محاسبات شکل مود و فرکانس‌ها، و غایت پاسخ دینامیکی سازه می‌باشد. کد المان محدود نوشته شده در Python برای شرایط مرزی مختلف تیر (دو سر گیردار و ساده، یک سر گیردار و آزاد، و یک سر گیردار و یک سر ساده) توسعه یافته است. صحت این کد در ابتدای فصل چهارم و پنجم با مقایسه با نتایج تحلیلی، حل GDQ، نرم‌افزار انسیس یا مقالات معتبر صحت‌سنجی شده است.

۱-۳- پیش‌پردازش

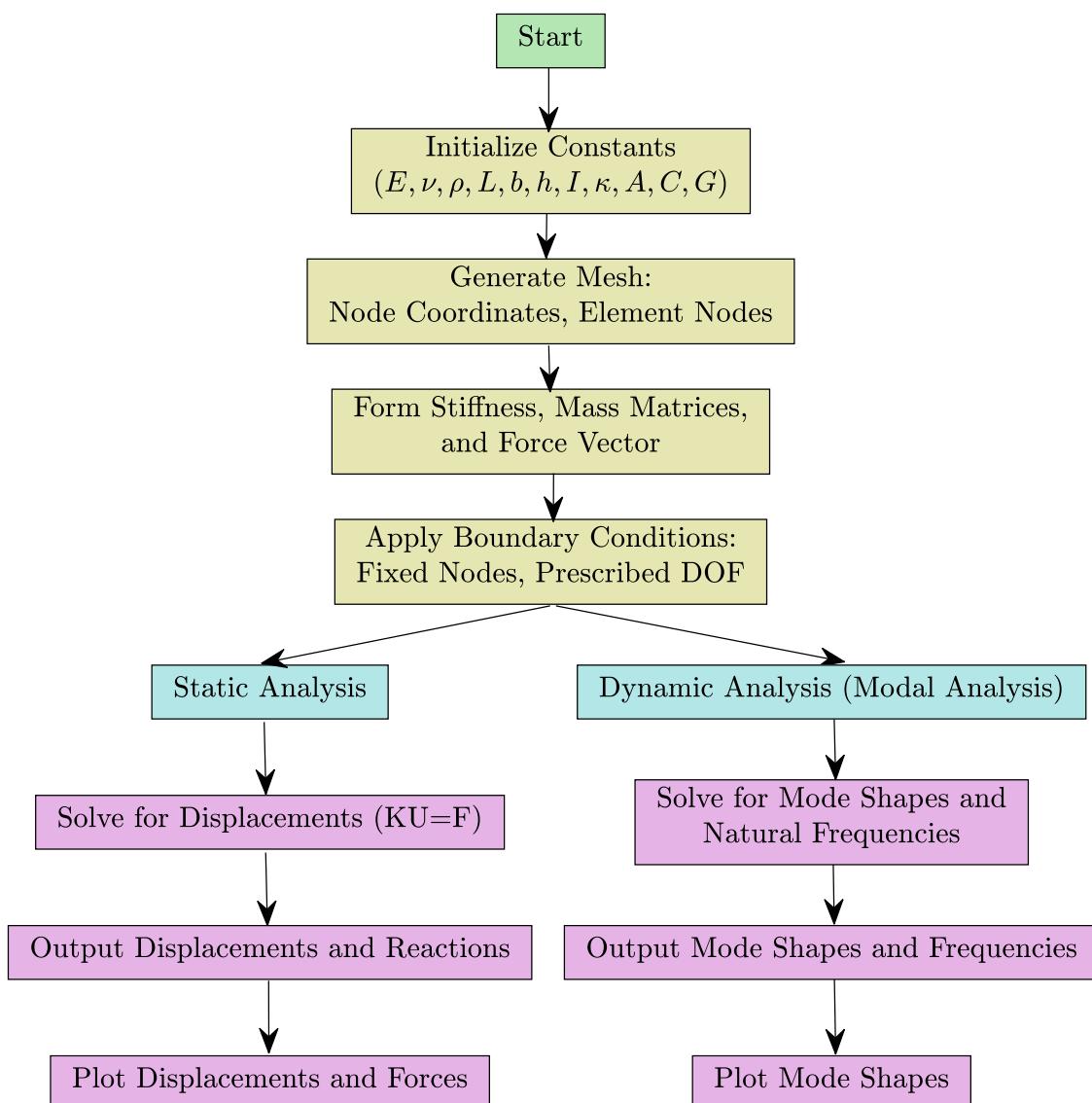
در بخش پیش‌پردازش، لازم است خواص مکانیکی، ساختاری، بارگذاری، و همچنین تعداد دامنه برای حل المان محدود مشخص شود، جدول ۳ - ۱. تعداد دامنه لازم برای حل در ابتدای فصول بعدی با نمودار همگرایی مشخص شده است تا با دقت لازم نتایج استخراج شود.

جدول ۳ - ۱ قسمت پیش‌پردازش کد پایتون برای تیر تیموشنکو.

```
# Constants
E = 10e7
poisson = 0.30
L = 1
thickness = 0.001
I = thickness**3 / 12
EI = E * I
kapa = 5 / 6
P = -1 # Uniform pressure
G = E / (2 * (1 + poisson))
# Constitutive matrix
C = np.array([[EI, 0], [0, kapa * thickness * G]])
# Mesh
numberElements = 100
nodeCoordinates = np.linspace(0, L, numberElements + 1)
elementNodes = np.vstack([np.arange(numberElements), np.arange(1,
numberElements + 1)]).T
```

۲-۳ - پردازش

واحد پردازش که بخش مرکزی کد اصلی می‌باشد، در ابتدا نحوه اتصال اجزا به یکدیگر را تشکیل می‌دهد و سپس با تشکیل ماتریس‌های جرمی و سختی، تشخیص شرایط مرزی مسئله را استاتیکی و یا دینامیکی حل خواهد نمود، فانکشن‌های تعریف شده در این قسمت در ابتدای کد قرار دارد و در قسمت پردازش (همگی در انتهای کد هستند)، از فانکشن‌های تعریف شده استفاده خواهد شد. شمای کلی این و الگوریتم این کد در شکل ۳ - ۱ رسم شده است.



شکل ۳ - ۱ الگوریتم کد تیر تیموشنکو.

۳-۳- پس‌پردازش

پس از حل سیستم خطی معادلات جبری در واحد پردازش، نتایج را باید در قالب مناسب گزارش نمود. در واحد پس‌پردازندۀ، نتایج خوانده و ترسیم می‌شوند. در این کد نتایج نیروها نیز محاسبه می‌شوند ولی در این پروژه گزارش نشده‌اند.

جدول ۳ - ۲ قسمت پس‌پردازش کد پایتون برای تیر تیموشنکو.

```
# Output displacements/reactions
output_displacements_reactions(displacements, stiffness, GDof,
prescribedDof)

# Max displacement
U = displacements[:numberNodes]
max_displacement = np.min(U)
print(f"Max displacement: {max_displacement}")

# Plot displacements
plot_displacements(nodeCoordinates, displacements[:numberNodes])

# Plot forces
F = stiffness @ displacements
plot_forces(nodeCoordinates, F[:numberNodes])
```

فصل چهارم

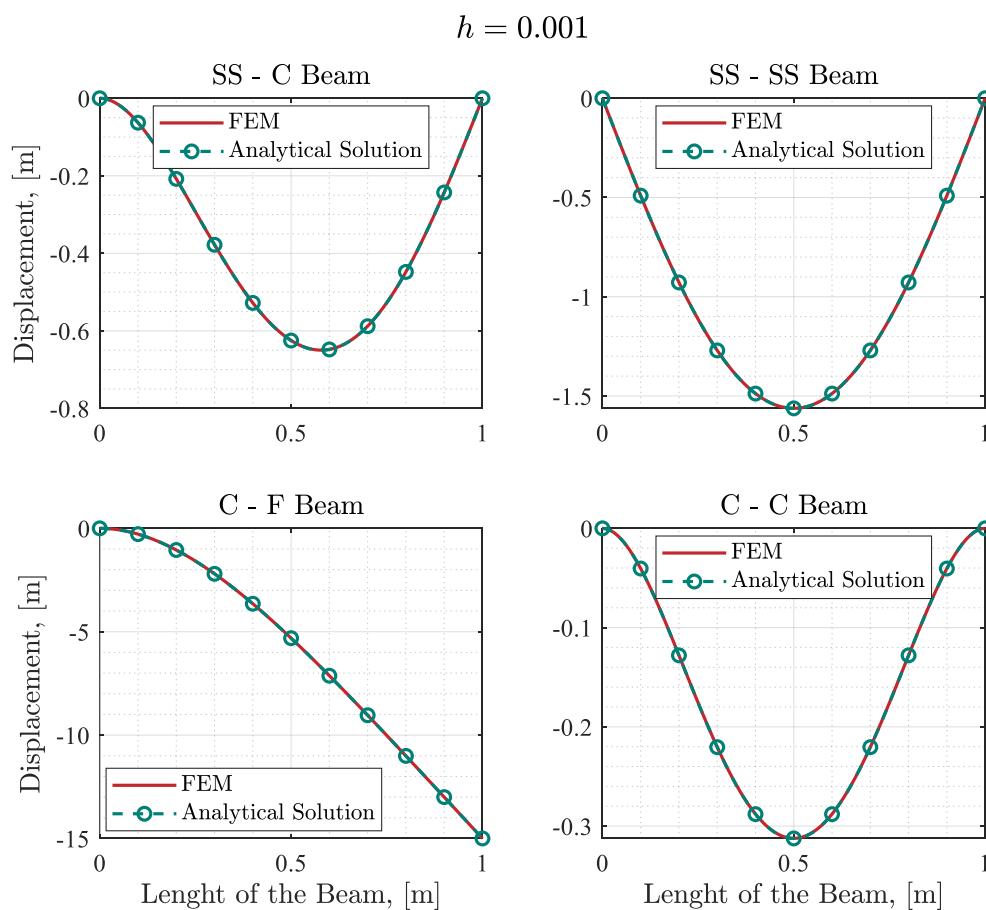
نتایج حالت استاتیک

مقدمه

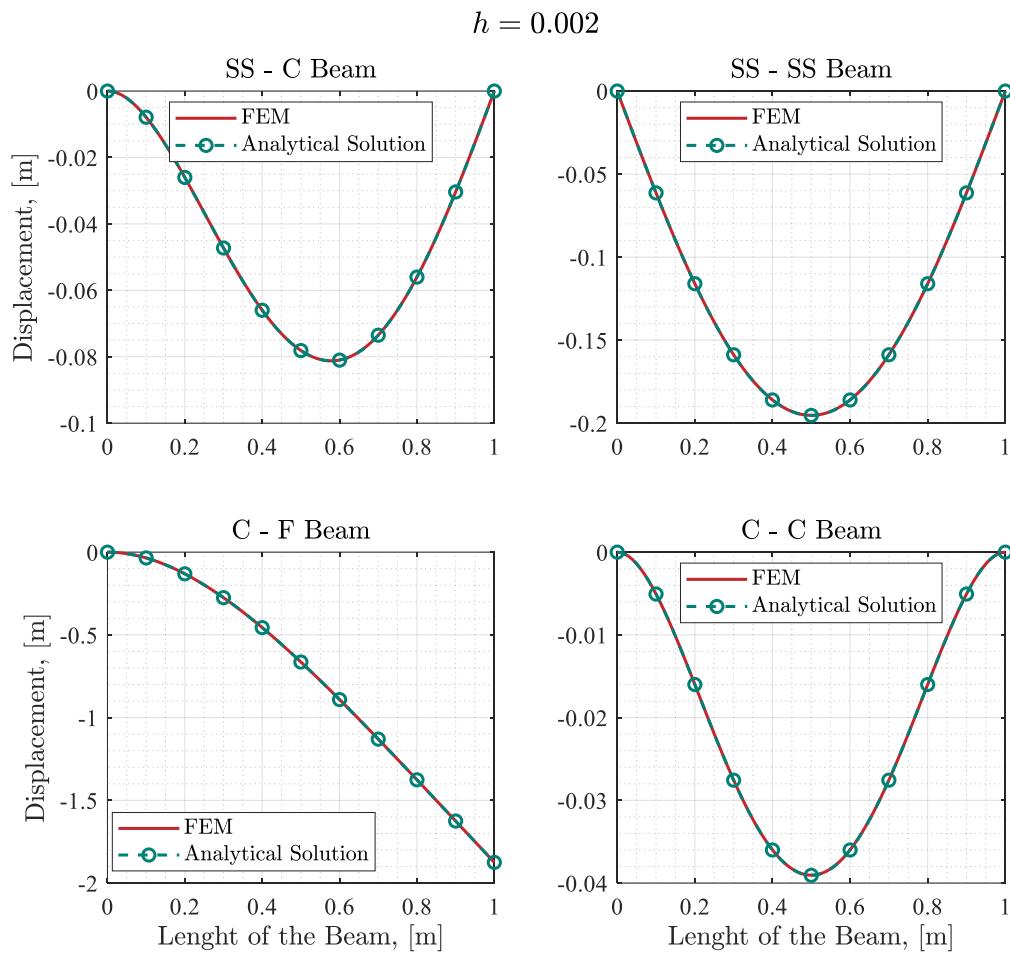
در این بخش ابتدا صحت‌سنجی بخش استاتیک پژوهش با استفاده از ابزار حل تحلیلی انجام می‌شود (توضیحات بخش تحلیلی در قسمت [پیوست بخش دوم](#) آورده شده است)، سپس همگرایی پاسخ خیز با تعداد المان‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد و در انتهای اثر پارامترهای مختلف مانند شرط مرزی و نسبت ضخامت به طول بر روی خیز ارائه می‌شود.

۴-۱-۱- ابزار صحت‌سنجی

برای ابتدا روش حل المان محدود صحه‌گذاری می‌شود. برای این کار، روابط خیز با استفاده از حل تحلیلی، که در پیوست آورده شده است، با نتایج حاصل در غالب چند نمودار برای ضخامت‌های سطح مقطع متفاوت مقایسه می‌شوند، در ابتدا برای $h = 0.001$ در شکل ۴-۱ رسم شده است.

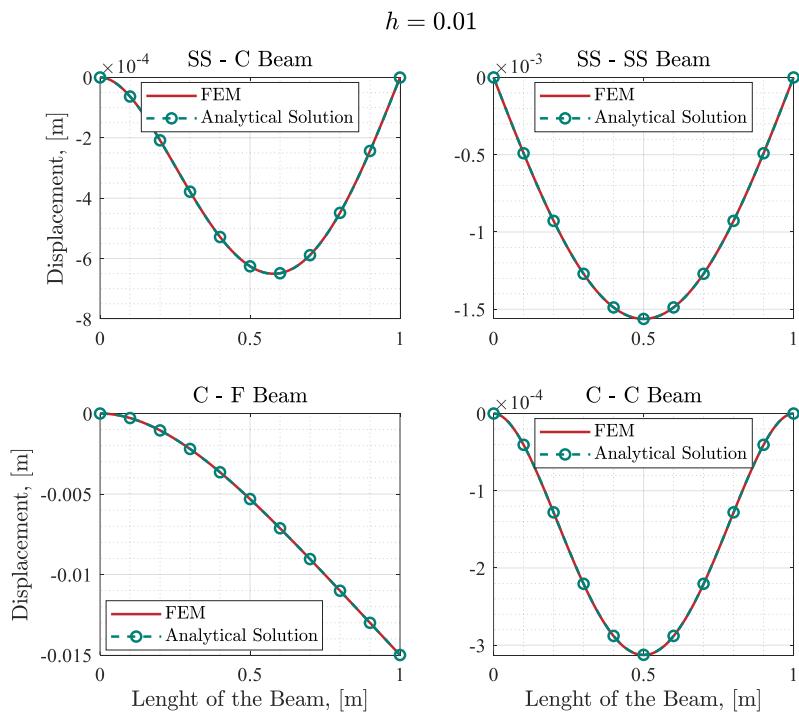


شکل ۴-۱ نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر با پاسخ تحلیلی برای $h = 0.001$

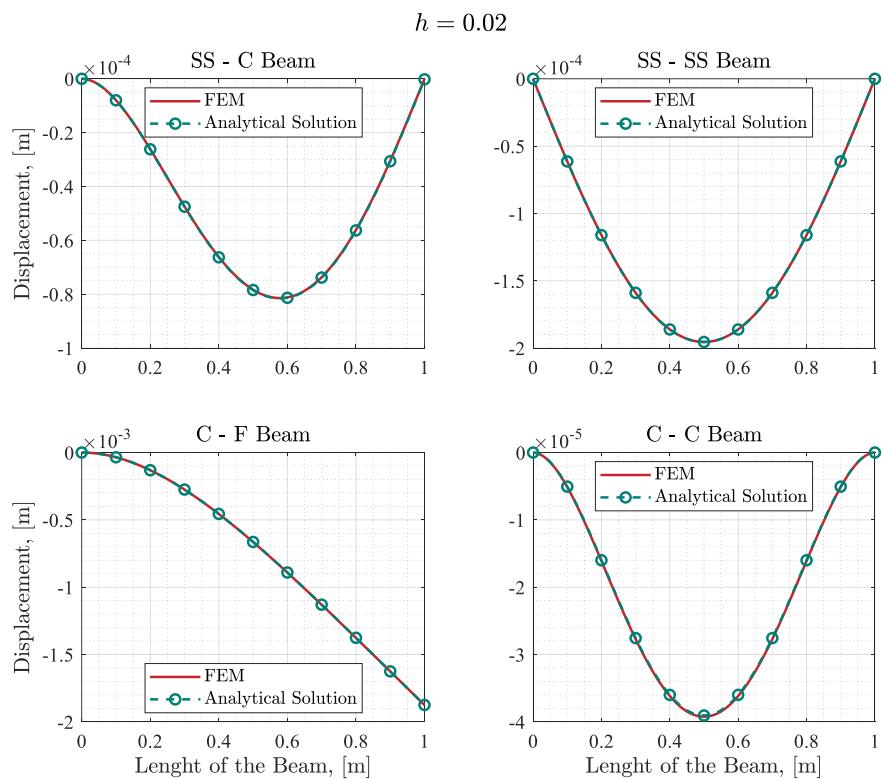


شکل ۴ - ۲ نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر با پاسخ تحلیلی برای $h = 0.002$.

با توجه به شکل ۴ - ۱ می‌توان فهمید که تفاوت معناداری بین نتایج وجود ندارد، و روش حل پیاده شده از دقت مناسبی برخوردار می‌باشد. نتایج برای ضخامت ۲ میلی‌متر نیز در شکل ۴ - ۲ ارائه شده است که اینبار نیز دقت مناسب حاصل شده است. برای ضخامت‌های بیشتر، شکل ۴ - ۳ و شکل ۴ - ۴ نیز گزارش شده است. تعداد المان در نظر گرفته شده در تمامی نمودارها برابر ۱۰۰ المان در راستای طول می‌باشد که این عدد از محاسبه همگرایی پاسخ‌ها در قسمت بعدی حاصل شده است.



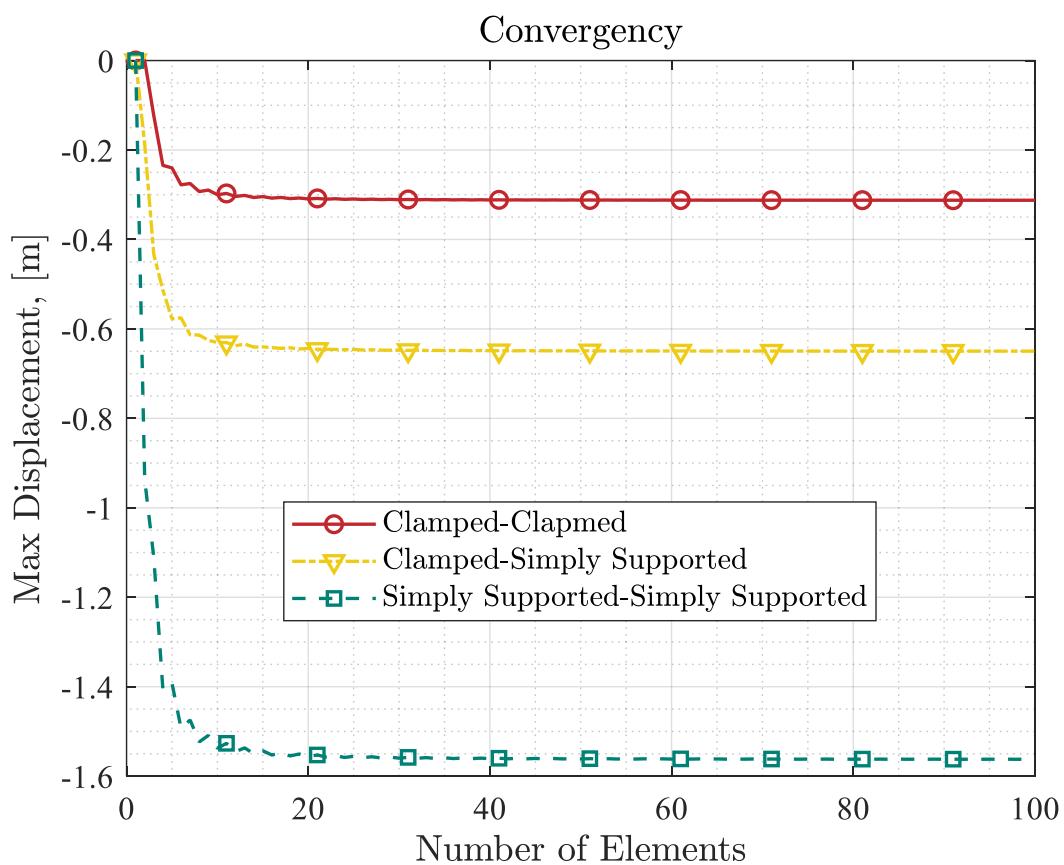
شکل ۴ - ۳ نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر با پاسخ تحلیلی برای $h = 0.01$



شکل ۴ - ۴ نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر با پاسخ تحلیلی برای $h = 0.02$

۴-۲- همگرایی پاسخ

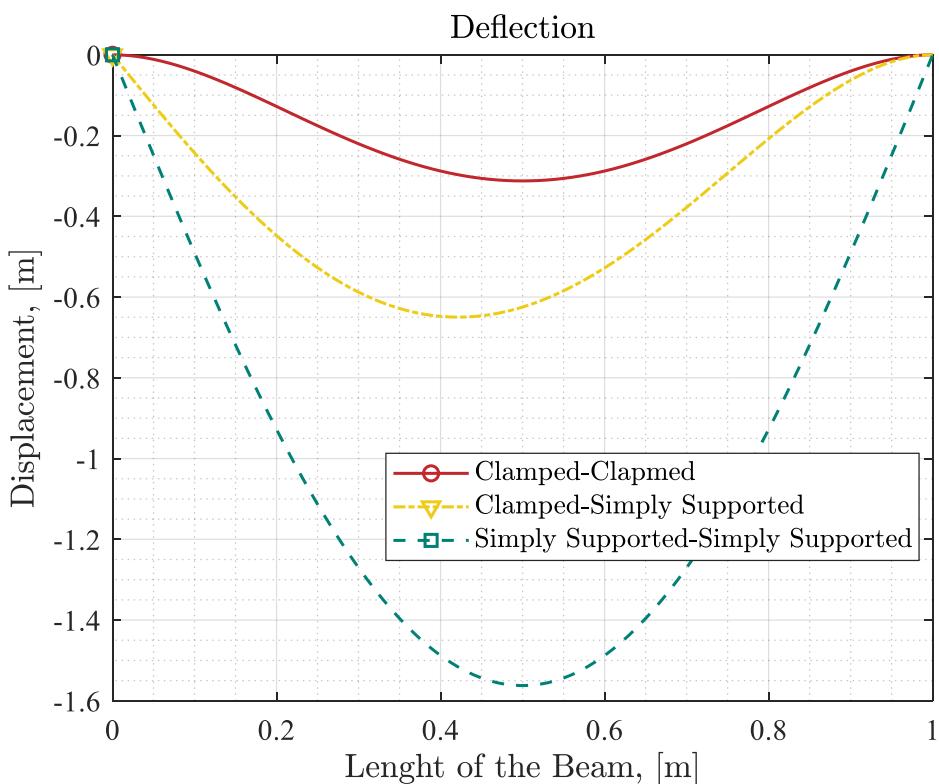
برای در دست داشتن بهترین تعداد المان برای پاسخ المان محدود، همگرایی پاسخ با افزایش تعداد المان‌ها رسم و در شکل ۴-۵ به تصویر کشیده شده است. مشاهده شده است که تعداد المان ۱۰۰ برای محاسبات المان محدود مقدار منطقی از لحاظ دقیق محاسبات می‌باشد. از دیگر نکات که می‌توان به آن اشاره کرد این است که تغییر شرایط مرزی از گیردار به ساده باعث افزایش تغییرات خیز می‌شود که به علت کاهش سفتی سازه می‌باشد.



شکل ۴-۵ همگرایی نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر برای $h = 0.001$

۳-۴- اثر شرایط مرزی بر خیز تیر

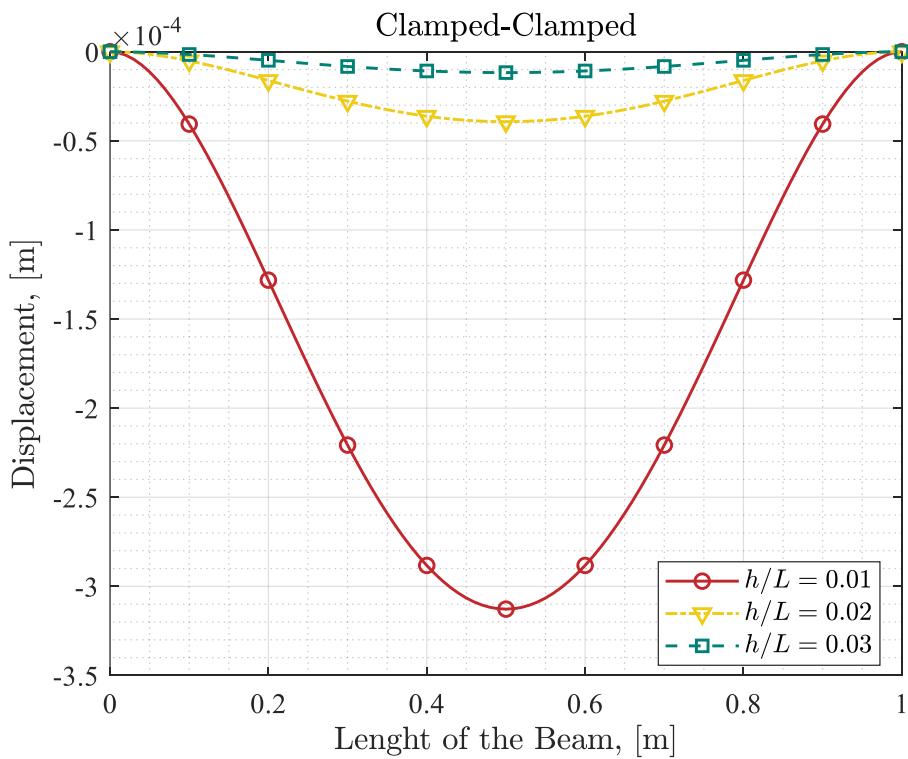
همانطور که در بخش قبلی اشاره شد، تغییر شرایط مرزی از نوع کاملاً گیردار به کاملاً ساده باعث افزایش تغییرات در راستای عرضی تیر خواهد شد. برای مشاهده بهتر این تغییرات، شکل ۴-۶ ارائه می‌شود که تغییرات تیر در آن مشخص می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، شب در قسمت‌های گیردار صفر می‌شود.



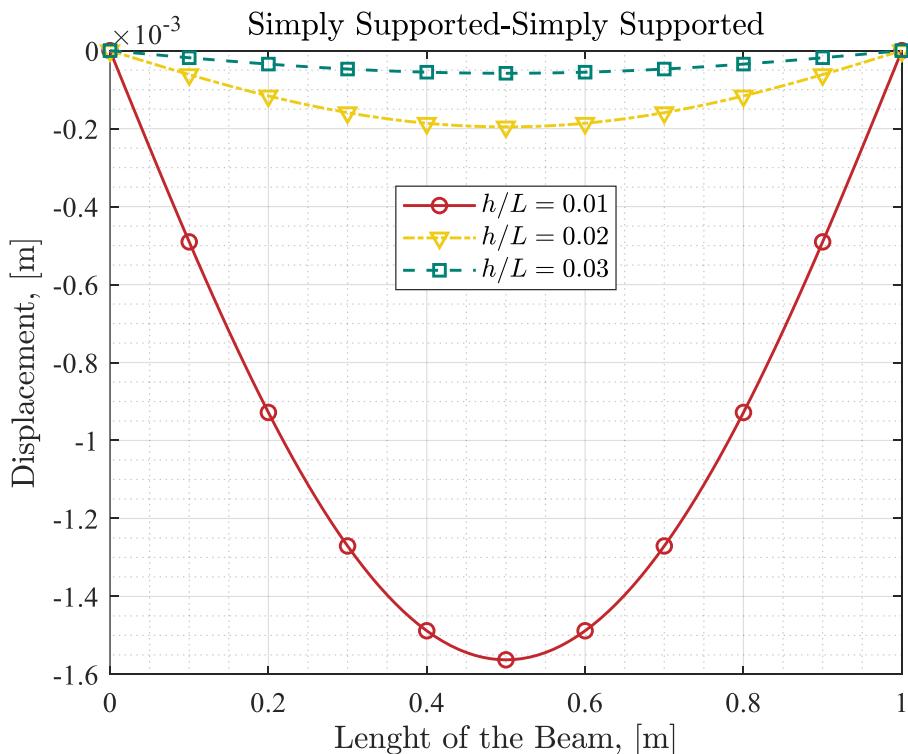
شکل ۴-۶ نتایج المان محدود خیز تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر برای $h = 0.001$.

۴-۴- اثر ضخامت به طول بر خیز تیر

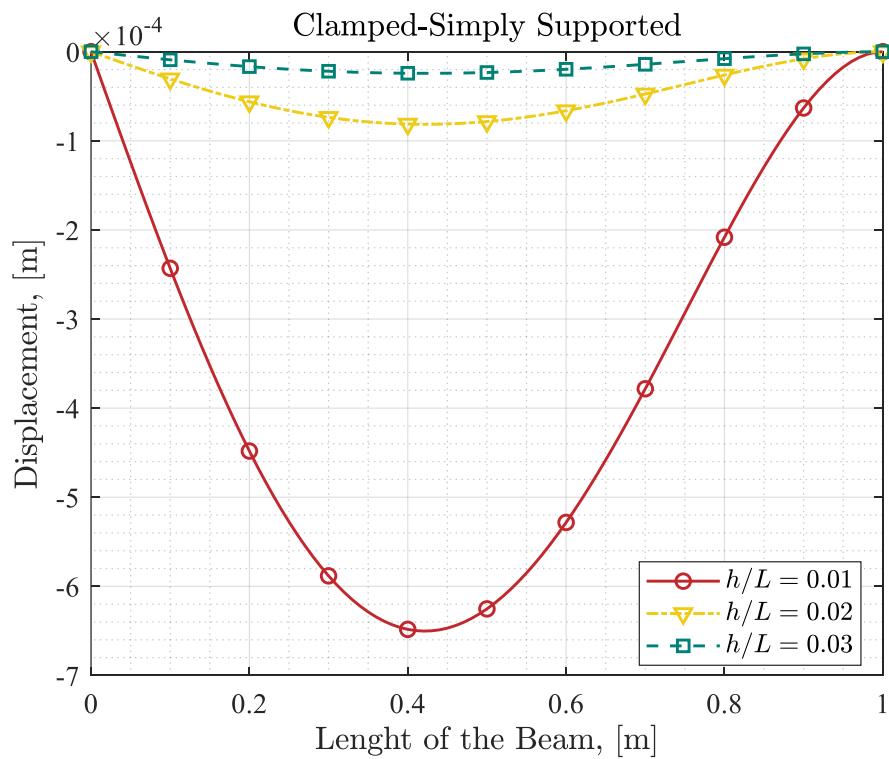
در این قسمت، اثر ضخامت به طول بر خیز تیر ارائه می‌شود. همانطور که انتظار می‌رفت، افزایش ضخامت منجر به کاهش تغییرات عرضی تیر می‌شود. همچنین روندی که در قسمت پیشین بود نیز مشاهده می‌شود که در حالت کاملاً گیردار کمترین میزان تغییرات را شاهد خواهیم بود، شکل ۴-۷ تا شکل ۴-۱۰.



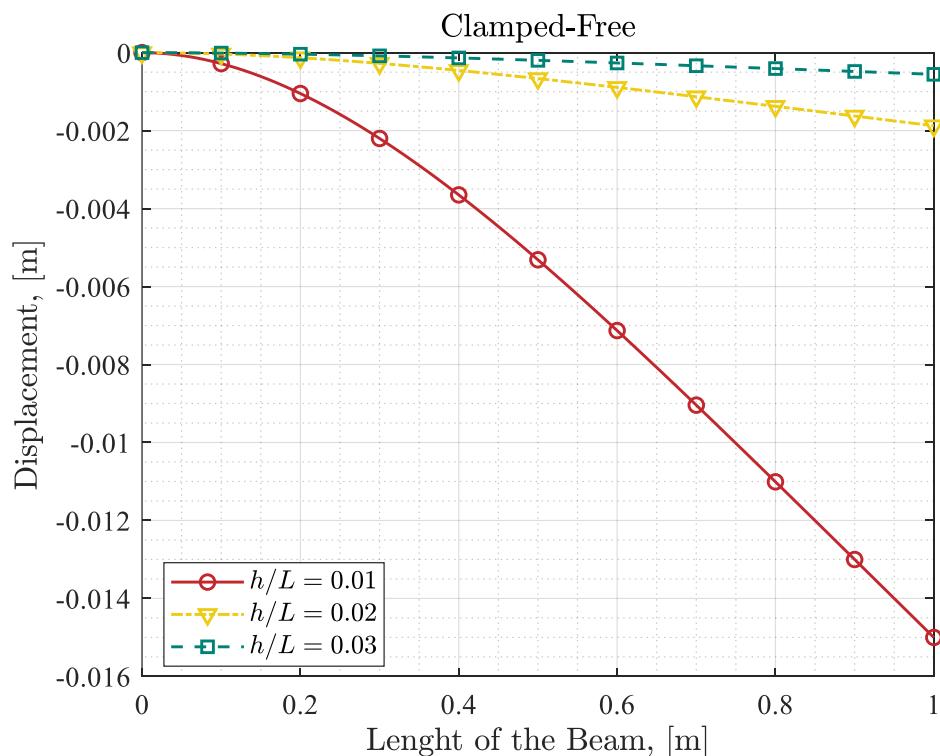
شکل ۴ - ۷ نتایج المان محدود خیز تیر دوسرگیردار با ضخامت به طول متفاوت به طول یک متر.



شکل ۴ - ۸ نتایج المان محدود خیز تیر دوسرساده با ضخامت به طول متفاوت به طول یک متر.



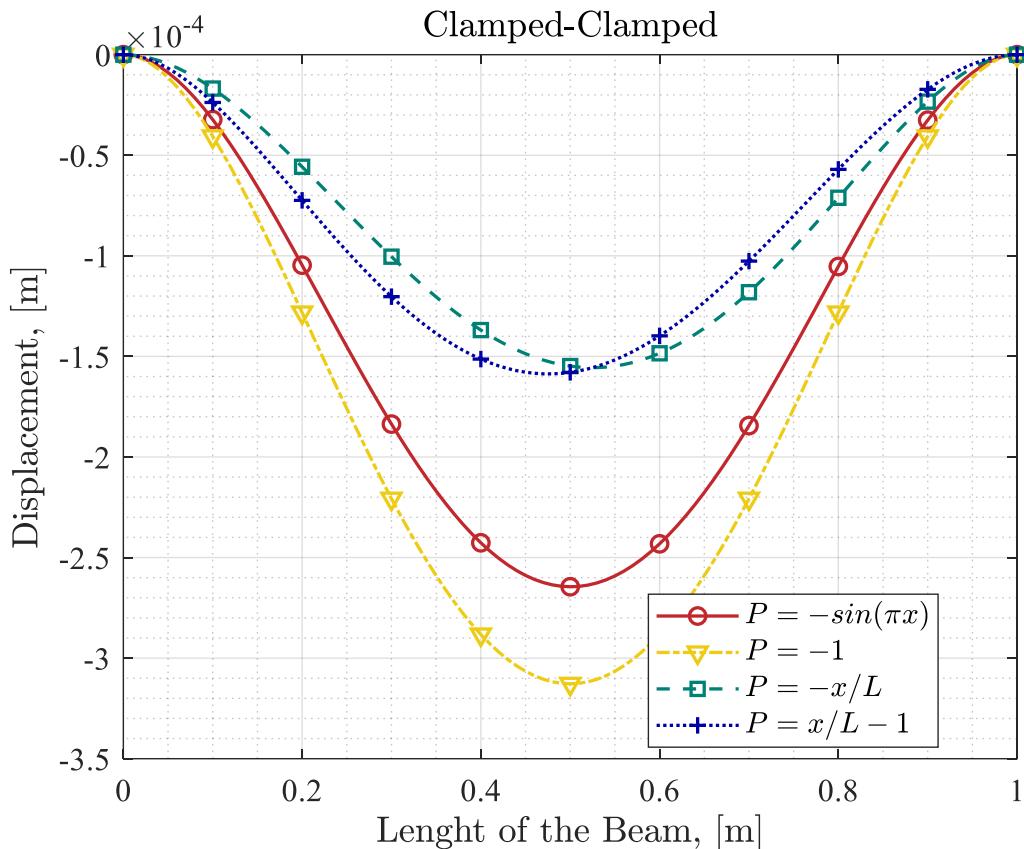
شکل ۴ - ۹ نتایج المان محدود خیز تیر یک سرساده و یک سر گیردار با ضخامت به طول متفاوت به طول یک متر.



شکل ۴ - ۱۰ نتایج المان محدود خیز تیر یک سر گیردار با ضخامت به طول متفاوت به طول یک متر.

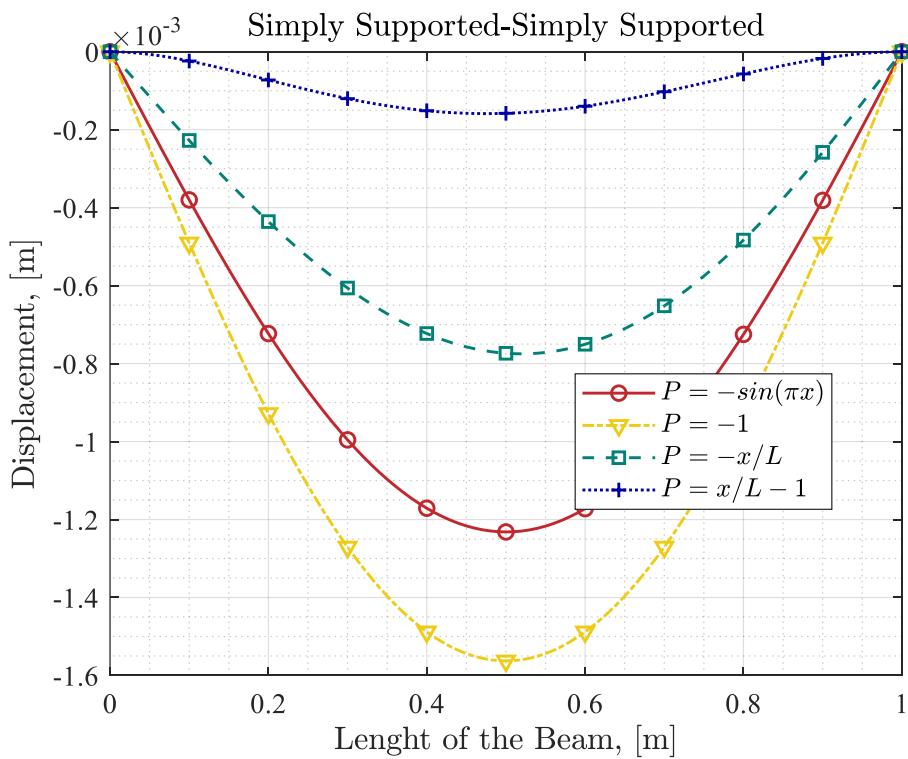
۴-۵-۴- اثر بارگذاری روی تیر

در این قسمت بار در نظر گرفته شده بر روی تیر را با توجه به تعداد المان‌های در نظر گرفته شده تغییر می‌دهیم که اینبار دیگر بار یکنواخت نیست و با توجه به محل بار در نقطه المان تغییر می‌کند. نتایج در شکل ۴ - ۱۱ تا شکل ۴ - ۱۳ رسم شده است.

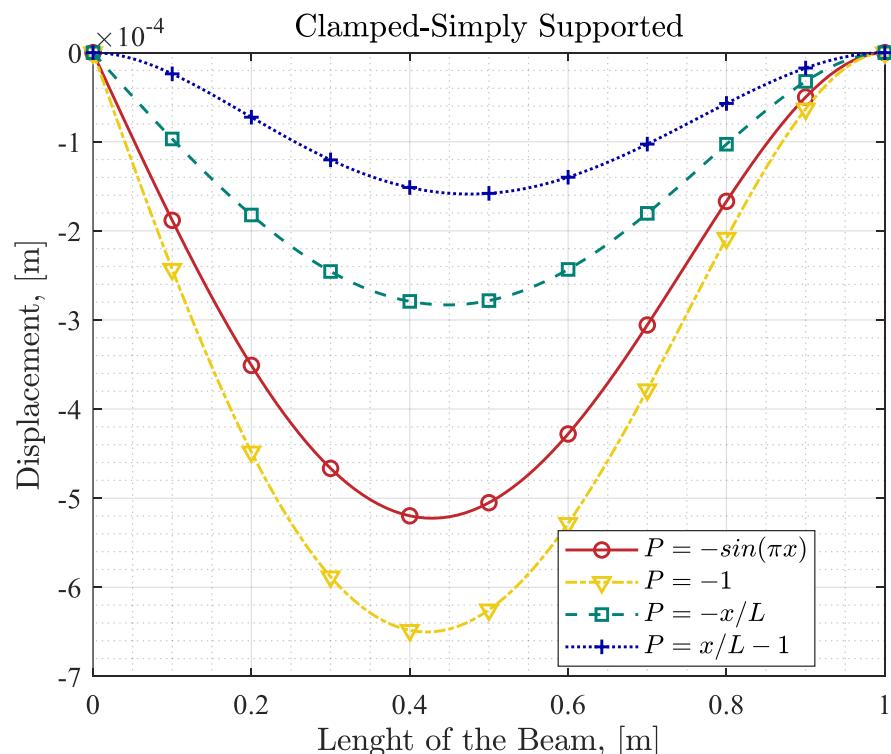


شکل ۴ - ۱۱ نتایج المان محدود خیز تیر دوسر گیردار با بارگذاری متفاوت به طول یک متر.

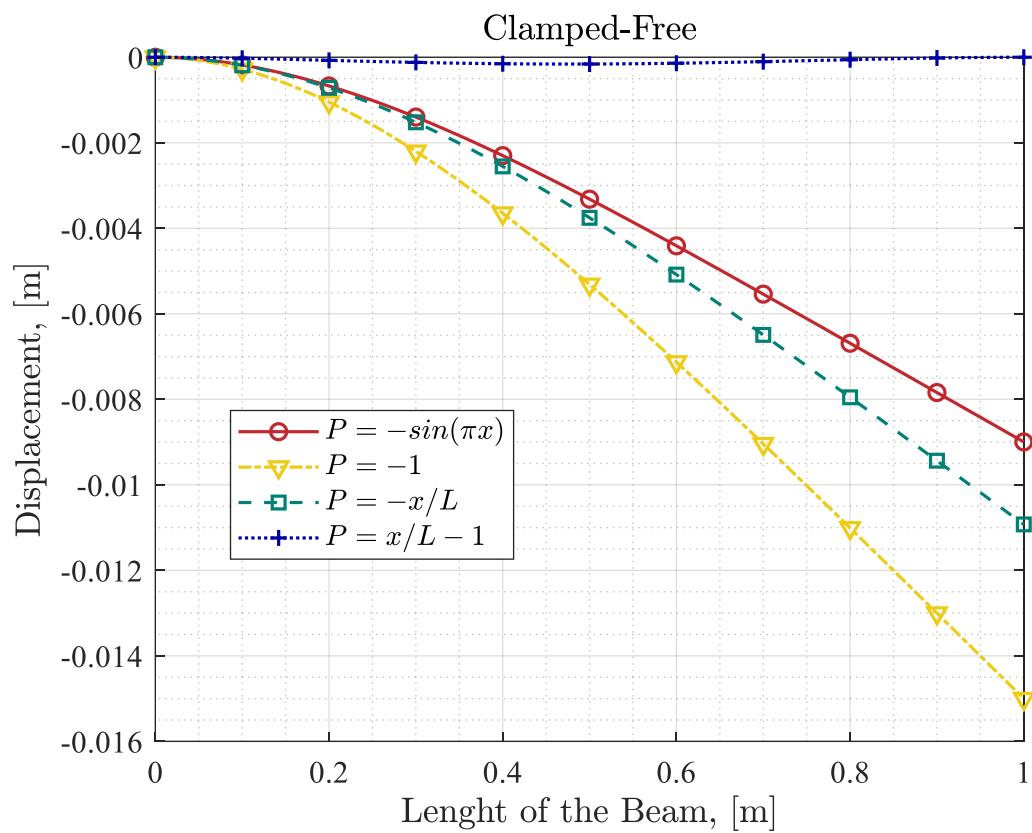
روندی که در قسمت پیشین بود نیز مشاهده می‌شود که در حالت کاملاً گیردار کمترین میزان تغییرات مشاهده می‌شود. بازیکنواخت به دلیل اینکه در تمامی طول تیر، بار با اندازه ۱ وارد شده است نسبت به بقیه بارگذاری‌ها که در بعضی نواحی مقدار کمتری دارند، باعث بیشترین تغییرات عرضی می‌شود.



شکل ۴ - ۱۲ نتایج المان محدود خیز تیر دوسر ساده با بارگذاری متفاوت به طول یک متر.



شکل ۴ - ۱۳ نتایج المان محدود خیز تیر یک سر گیردار یک سر ساده با بارگذاری متفاوت به طول یک متر.



شکل ۴ - ۱۴ نتایج المان محدود خیز تیر یک سر گیردار با بارگذاری متفاوت به طول یک متر.

فصل پنجم

نتایج ارتعاشات

مقدمه

در این بخش ابتدا صحت‌سنجی بخش ارتعاشات پژوهش با استفاده از مقاله معتبر در زمینه ارتعاشات تیر، ابزار حل GDQ برای ۱۵ فرکانس اول تیر (توضیحات بخش GDQ در قسمت پیوست، بخش اول آورده شده است)، و همچنین نرم‌افزار انسیس انجام می‌شود، سپس همگرایی پاسخ خیز با تعداد المان‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد و در انتهای اثر پارامترهای مختلف مانند شرط مرزی و نسبت ضخامت به طول بر روی خیز ارائه خواهد شد.

۱-۵- ابزار صحت‌سنجی

در ابتدای این فصل، نتایج با استفاده از مقاله [۱۱]، روش GDQ (توضیحات در بخش پیوست) و همچنین نرم‌افزار انسیس و آنالیز مودال صحت‌سنجی شده‌اند. در جدول ۵ - ۱ برای نتایج دو سر گیردار و در جدول ۵ - ۲ برای دو سر ساده، نتایج ۱۵ فرکانس اول برای دو حالت دو سر گیردار و دو سر ساده با مقایسه شده است. می‌توان ملاحظه نمود که تفاوت محسوسی بین نتایج وجود ندارد که این نشان از دقّت در نحوه حل المان محدود در این پروژه می‌باشد. همچنین در ادامه، نتایج برای سه حالت دو سر گیردار در جدول ۵ - ۳، دو سر ساده در جدول ۵ - ۴ و یک سر گیردار و یک سر آزاد در جدول ۵ - ۵، با حل GDQ مقایسه شده‌اند. در این حالت نیز تفاوت محسوسی بین نتایج وجود ندارد و خطای زیر ۱ درصد می‌باشد. در جداول ارائه شده، فرکانس طبیعی بی‌بعد شده مطابق فرمول زیر محاسبه شده است و ضریب پوواسون برابر ۰.۳ و ضریب تصحیح برشی نیز ۵/۶ می‌باشد.

$$\lambda_i^2 = \omega_i L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (1-5)$$

تئوری کلاسیک در جدول به تئوری اویلر برنولی اشاره دارد که در مقاله [۱۱] مقدار آن موجود بود.

جدول ۵ - ۱ مقایسه نتایج حاصل از المان محدود با (دو سر گیردار).

Mode	C-C	h/L																	
		0.002		0.005		0.01		0.02		0.05		0.1		0.2					
		Classical Theory [11]	Present	Lee and Schultz [11]															
1	4.73004	4.7305	4.72998	4.7301	4.72963	4.7289	4.7284	4.724	4.7235	4.6904	4.68991	4.58	4.57955	4.2423	4.24201				
2	7.8532	7.8553	7.85295	7.8539	7.85163	7.8492	7.8469	7.8305	7.82817	7.7057	7.70352	7.333	7.33122	6.419	6.41794				
3	10.9956	11.0012	10.995	10.9979	10.9917	10.9862	10.98	10.9402	10.9341	10.6456	10.6401	9.8602	9.85611	8.2876	8.28532				
4	14.1372	14.149	14.1359	14.1424	14.1294	14.1191	14.1062	14.0281	14.0154	13.4719	13.4611	12.1528	12.1454	9.9078	9.90372				
5	17.2788	17.3002	17.2766	17.2887	17.2651	17.248	17.2246	17.0904	17.0679	16.1774	16.159	14.2444	14.2324	11.3552	11.3487				
6	20.4204	20.4557	20.4168	20.4373	20.3985	20.3721	20.3338	20.1233	20.0868	18.7601	18.7318	16.1663	16.1487	12.6495	12.6402				
7	23.5619	23.6162	23.5567	23.5884	23.5292	23.4908	23.4325	23.1231	23.0682	21.2229	21.1825	17.9458	17.9215	13.457	13.4567				
8	26.7035	26.7824	26.696	26.7426	26.6567	26.6034	26.5192	26.0868	26.0086	23.5718	23.5168	19.6046	19.5723	13.8222	13.8101				
9	29.8451	29.9551	29.8348	29.9003	29.7808	29.7092	29.5926	29.012	28.9052	25.814	25.7421	21.16	21.1185	14.482	14.4806				
10	32.9867	33.1352	32.9729	33.0618	32.9009	32.8077	32.6514	31.8967	31.7558	27.9574	27.8662	22.6255	22.5735	14.9548	14.9383				
11	36.1283	36.3233	36.1103	36.2277	36.0168	35.8983	35.6946	34.7395	34.5587	30.0098	29.8969	24.0116	23.9479	15.7019	15.6996				
12	39.2699	39.5203	39.247	39.3983	39.1281	38.9805	38.7209	37.5394	37.3126	31.9787	31.8418	25.3241	25.2479	16.0264	16.004				
13	42.4115	42.7271	42.3829	42.5741	42.2345	42.0538	41.7293	40.2957	40.0169	33.8711	33.7078	26.2835	26.2831	16.9654	16.9621				
14	45.5531	45.9443	45.5178	45.7554	45.3355	45.1178	44.7189	43.0082	42.6712	35.6933	35.5011	26.5409	26.4595	17.0288	16.9999				
15	48.6947	49.1729	48.6519	48.9428	48.4308	48.1719	47.6888	45.6769	45.2754	37.4512	37.2275	26.9334	26.9237	17.9717	17.9357				

جدول ۵ - ۲ مقایسه نتایج حاصل از المان محدود با (دو سر ساده).

SS-SS

Mode	Classical Theory [11]	h/L											
		0.002		0.005		0.01		0.02		0.05		0.1	
		Lee and Present	Schultz [11]										
1	3.14159	3.1418	3.14158	3.1417	3.14153	3.1415	3.14133	3.1407	3.14053	3.1351	3.13498	3.1158	3.11568
2	6.28319	6.2847	6.2831	6.2837	6.28265	6.2822	6.28106	6.2758	6.27471	6.2324	6.23136	6.0916	6.09066
3	9.42478	9.4297	9.42449	9.4267	9.42298	9.4213	9.41761	9.4000	9.39632	9.2588	9.25537	8.8435	8.84052
4	12.5664	12.5781	12.5657	12.5709	12.5621	12.5581	12.5494	12.508	12.4994	12.1892	12.1813	11.3493	11.3431
5	15.708	15.7309	15.7066	15.7168	15.6997	15.6919	15.6749	15.595	15.5784	15.0072	14.9926	13.6239	13.6132
6	18.8496	18.8892	18.8473	18.8647	18.8352	18.8219	18.7926	18.6566	18.6282	17.7048	17.681	15.6956	15.679
7	21.9911	22.0541	21.9875	22.0153	21.9684	21.9474	21.9011	21.6887	21.6443	20.2802	20.2447	17.5941	17.5705
8	25.1327	25.2269	25.1273	25.1688	25.0988	25.0677	24.9988	24.6879	24.6227	22.7361	22.6862	19.3462	19.3142
9	28.2743	28.4085	28.2666	28.3256	28.2261	28.1822	28.0845	27.6513	27.5599	25.0779	25.0111	20.9741	20.9325
10	31.4159	31.6001	31.4053	31.4863	31.3498	31.2902	31.1568	30.5763	30.4533	27.3126	27.2263	22.4965	22.4441
11	34.5575	34.803	34.5434	34.6512	34.4697	34.3912	34.2145	33.4611	33.3006	29.4478	29.3394	23.9286	23.8639
12	37.6991	38.0182	37.6807	37.8207	37.5853	37.4845	37.2565	36.3043	36.1001	31.491	31.3581	25.2827	25.2044
13	40.8407	41.247	40.8174	40.9953	40.6962	40.5697	40.2815	39.1048	38.8507	33.4496	33.2896	26.0647	26.0647
14	43.9823	44.4906	43.9531	44.1754	43.8021	43.6462	43.2886	41.862	41.5517	35.3306	35.141	26.2811	26.2814
15	47.1239	47.7501	47.088	47.3614	46.9027	46.7137	46.2769	44.5757	44.2026	37.1404	36.9186	26.5692	26.4758

جدول ۵ - ۳ مقایسه نتایج حاصل از المان محدود با روش **GDQ** (دو سر گیردار).

C-C Mode	Classical Theory [11]	h/L																	
		0.002		0.005		0.01		0.02		0.05		0.1		0.2					
		Present	GDQ	Present	GDQ	Present	GDQ												
1	4.73004	4.7305	4.73	4.7301	4.7296	4.7289	4.7285	4.724	4.7237	4.6904	4.6913	4.58	4.5845	4.2423	4.2556				
2	7.8532	7.8553	7.853	7.8539	7.8517	7.8492	7.8471	7.8305	7.829	7.7057	7.7084	7.333	7.3463	6.419	6.4491				
3	10.9956	11.0012	10.995	10.9979	10.9918	10.9862	10.9806	10.9402	10.9361	10.6456	10.651	9.8602	9.8852	8.2876	8.3326				
4	14.1372	14.149	14.136	14.1424	14.1296	14.1191	14.1071	14.0281	14.0193	13.4719	13.4805	12.1528	12.1906	9.9078	9.9658				
5	17.2788	17.3002	17.2766	17.2887	17.2656	17.248	17.2263	17.0904	17.0744	16.1774	16.1893	14.2444	14.2946	11.3552	11.4244				
6	20.4204	20.4557	20.417	20.4373	20.3992	20.3721	20.3365	20.1233	20.0969	18.7601	18.775	16.1663	16.2278	12.6495	12.7292				
7	23.5619	23.6162	23.5568	23.5884	23.5302	23.4908	23.4365	23.1231	23.0828	21.2229	21.2402	17.9458	18.0171	13.457	13.577				
8	26.7035	26.7824	26.6962	26.7426	26.6582	26.6034	26.5248	26.0868	26.0287	23.5718	23.5901	19.6046	19.6842	13.8222	13.9099				
9	29.8451	29.9551	29.8351	29.9003	29.7827	29.7092	29.6002	29.012	28.9319	25.814	25.8317	21.16	21.2462	14.482	14.5887				
10	32.9867	33.1352	32.9733	33.0618	32.9035	32.8077	32.6615	31.8967	31.7901	27.9574	27.9727	22.6255	22.7166	14.9548	15.0486				
11	36.1283	36.3233	36.1109	36.2277	36.0202	35.8983	35.7074	34.7395	34.6016	30.0098	30.0207	24.0116	24.106	15.7019	15.7971				
12	39.2699	39.5203	39.2477	39.3983	39.1324	38.9805	38.737	37.5394	37.3651	31.9787	31.9829	25.3241	25.4208	16.0264	16.1275				
13	42.4115	42.7271	42.3837	42.5741	42.2398	42.0538	41.7492	40.2957	40.0799	33.8711	33.8662	26.2835	26.5351	16.9654	17.0482				
14	45.5531	45.9443	45.5189	45.7554	45.342	45.1178	44.743	43.0082	42.7455	35.6933	35.6769	26.5409	26.6494	17.0288	17.1367				
15	48.6947	49.1729	48.6531	48.9428	48.4386	48.1719	47.7176	45.6769	45.3619	37.4512	37.4207	26.9334	27.1618	17.9717	18.0845				

جدول ۵ - ۴ مقایسه نتایج حاصل از المان محدود با روش **GDQ** (دو سر ساده).

SS-SS

Mode	Classical Theory [11]	h/L													
		0.002		0.005		0.01		0.02		0.05		0.1		0.2	
		Present	GDQ												
1	3.14159	3.1418	3.1416	3.1417	3.1415	3.1415	3.1413	3.1407	3.1406	3.1351	3.1352	3.1158	3.1164	3.0455	3.0479
2	6.28319	6.2847	6.2831	6.2837	6.2827	6.2822	6.2811	6.2758	6.275	6.2324	6.2328	6.0916	6.0958	5.6723	5.6855
3	9.42478	9.4297	9.4245	9.4267	9.423	9.4213	9.4178	9.4000	9.3971	9.2588	9.2601	8.8435	8.855	7.8416	7.8703
4	12.5664	12.5781	12.5657	12.5709	12.5622	12.5581	12.5499	12.508	12.5013	12.1892	12.1917	11.3493	11.371	9.6611	9.7061
5	15.708	15.7309	15.7067	15.7168	15.6999	15.6919	15.6759	15.595	15.5821	15.0072	15.0112	13.6239	13.6572	11.2286	11.289
6	18.8496	18.8892	18.8473	18.8647	18.8356	18.8219	18.7943	18.6566	18.6345	17.7048	17.7101	15.6956	15.7406	12.612	12.6861
7	21.9911	22.0541	21.9876	22.0153	21.9691	21.9474	21.9037	21.6887	21.654	20.2802	20.2863	17.5941	17.6502	13.0323	13.1607
8	25.1327	25.2269	25.1275	25.1688	25.0998	25.0677	25.0027	24.6879	24.6368	22.7361	22.7421	19.3462	19.4123	13.4441	13.5652
9	28.2743	28.4085	28.2668	28.3256	28.2275	28.1822	28.0899	27.6513	27.5794	25.0779	25.0826	20.9741	21.0488	13.857	13.9429
10	31.4159	31.6001	31.4056	31.4863	31.3518	31.2902	31.1642	30.5763	30.4792	27.3126	27.3144	22.4965	22.578	14.4375	14.5442
11	34.5575	34.803	34.5438	34.6512	34.4722	34.3912	34.2243	33.4611	33.3339	29.4478	29.4448	23.9286	24.0151	14.995	15.0908
12	37.6991	38.0182	37.6813	37.8207	37.5885	37.4845	37.269	36.3043	36.1419	31.491	31.4812	25.2827	25.3722	15.6676	15.7602
13	40.8407	41.247	40.818	40.9953	40.7004	40.5697	40.2972	39.1048	38.9019	33.4496	33.4308	26.0647	26.3215	16.0481	16.1517
14	43.9823	44.4906	43.954	44.1754	43.8073	43.6462	43.308	41.862	41.6131	35.3306	35.3005	26.2811	26.5341	16.9593	17.039
15	47.1239	47.7501	47.0891	47.3614	46.9091	46.7137	46.3004	44.5757	44.2752	37.1404	37.0964	26.5692	26.6597	17.0323	17.142

جدول ۵ - مقایسه نتایج حاصل از المان محدود با روش **GDQ** (یک سر گیردار، یک سر آزاد).

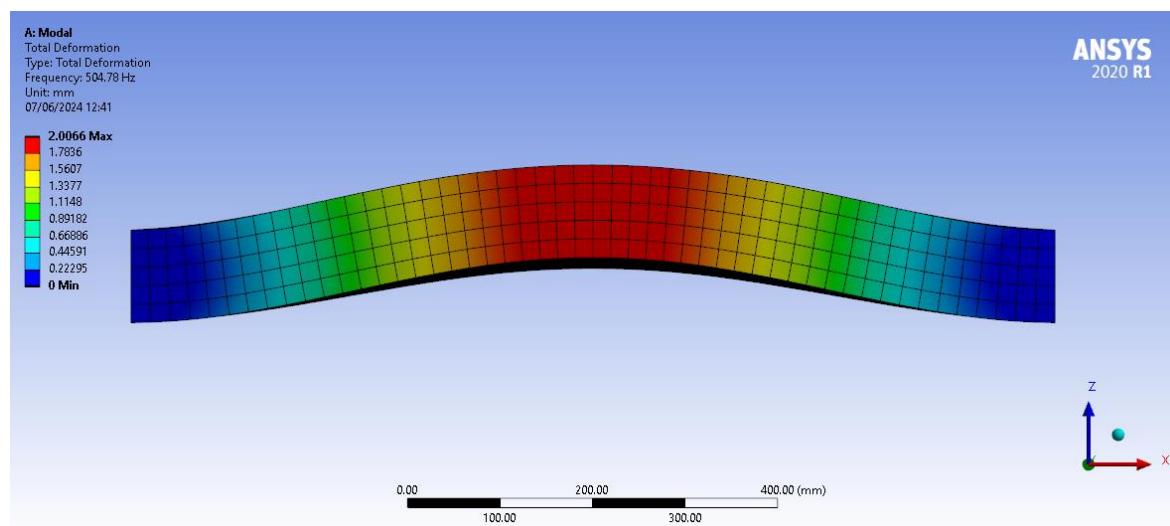
Mode	h/L																	
	0.002		0.005		0.01		0.02		0.05		0.1		0.2					
	Present	GDQ	Present	GDQ	Present	GDQ												
1	1.8751	1.8751	1.8751	1.8751	1.875	1.875	1.8748	1.8748	1.8732	1.8733	1.8677	1.8679	1.8466	1.8474				
2	4.6944	4.694	4.6942	4.6938	4.6932	4.6928	4.6893	4.689	4.6624	4.663	4.5728	4.5757	4.2856	4.2949				
3	7.8565	7.8546	7.8554	7.8535	7.8515	7.8497	7.836	7.8347	7.7323	7.734	7.417	7.4265	6.6123	6.6352				
4	11.0005	10.995	10.9977	10.9923	10.9876	10.9825	10.9478	10.9439	10.6911	10.6946	9.9913	10.0106	8.521	8.5587				
5	14.1479	14.1361	14.1421	14.1305	14.1215	14.1104	14.0406	14.0321	13.542	13.5476	12.3298	12.3605	10.1627	10.214				
6	17.2987	17.2768	17.2883	17.2668	17.2515	17.2312	17.1088	17.0932	16.2735	16.2815	14.458	14.5002	11.5787	11.6439				
7	20.4535	20.4172	20.4366	20.4009	20.377	20.3434	20.1485	20.1227	18.8826	18.8926	16.4063	16.4595	12.7907	12.8724				
8	23.6133	23.5572	23.5876	23.5325	23.4972	23.4455	23.156	23.1164	21.371	21.3822	18.2016	18.2648	13.3521	13.4668				
9	26.7786	26.6967	26.7415	26.6611	26.6116	26.5363	26.1282	26.0709	23.7437	23.755	19.866	19.938	13.9589	14.0592				
10	29.9504	29.8357	29.8989	29.7864	29.7195	29.6145	29.0625	28.9832	26.0075	26.0175	21.4164	21.496	14.3455	14.4429				
11	33.1294	32.974	33.0602	32.908	32.8202	32.6788	31.9568	31.851	28.1699	28.1768	22.865	22.9512	15.1146	15.2148				
12	36.3164	36.1118	36.2257	36.0256	35.9133	35.728	34.8097	34.6724	30.2386	30.2404	24.2166	24.3094	15.4863	15.5822				
13	39.5121	39.2487	39.396	39.1387	38.9981	38.7611	37.6199	37.4461	32.221	32.2156	25.4587	25.5625	16.2978	16.3924				
14	42.7174	42.3849	42.5714	42.2471	42.0742	41.777	40.3868	40.1712	34.1241	34.1092	26.2316	26.4599	16.5795	16.6793				
15	45.9331	45.5203	45.7523	45.3504	45.1411	44.7747	43.1101	42.8473	35.9542	35.9274	26.6102	26.7671	17.4406	17.5375				

همچنین در جدول ۵ - ۶ نتایج حل در واحد هرتز با تحلیل مودال انسیس در دو حالت دو سر گیردار و یک سر گیردار - یک سر آزاد مقایسه شده است که نشان در عملکرد صحیح برنامه‌نویسی و حل المان محدود دارد.

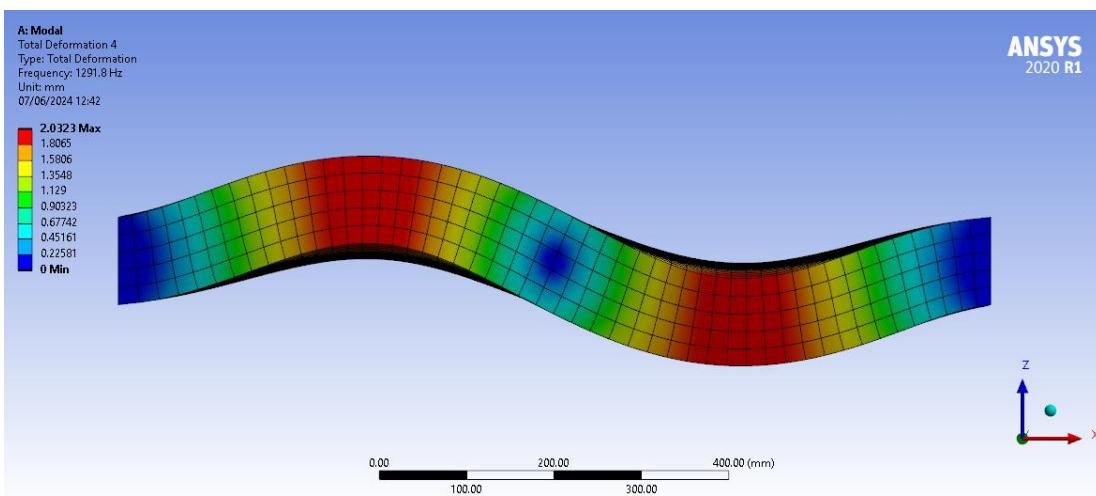
جدول ۵ - ۶ مقایسه نتایج حاصل از نرم‌افزار انسیس و حل المان محدود برای دو حالت دو سر گیردار و یک سرگیردار - یک سر آزاد و محاسبه خطای موجود.

Mode	یک سر گیردار - یک سر آزاد			دو سر گیردار		
	Present	ANSYS	Error	Present	ANSYS	Error
1	83.092503	83.623	0.64%	499.69034	504.78	1.02%
2	498.10999	490.07	1.61%	1281.1027	1291.8	0.84%
3	1310.5939	1322.9	0.94%	2316.6336	2333.3	0.72%
4	2378.5814	2381.5	0.12%	3519.7639	3541.4	0.61%

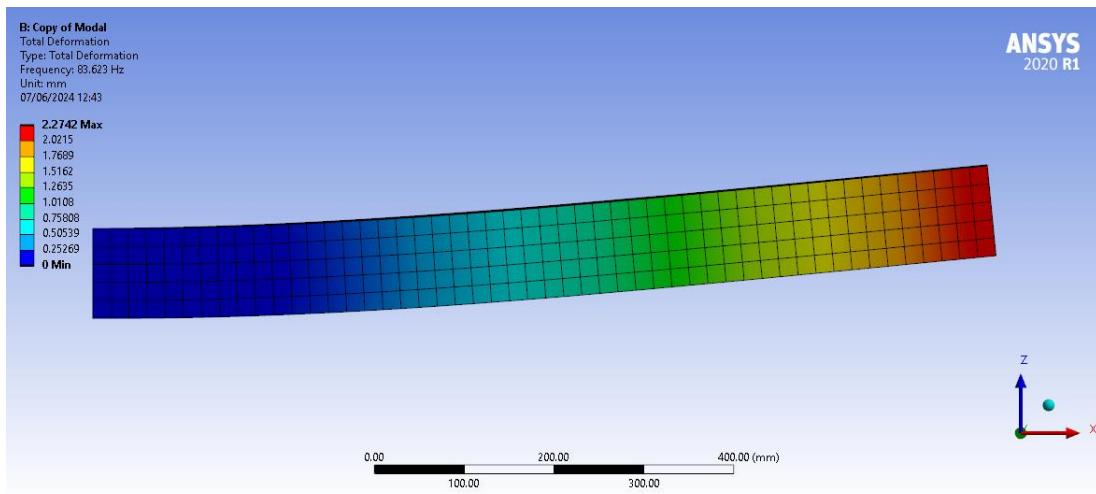
شکل مود اول و دوم به همراه توضیحات مودال در لجند در حالات ذکر شده به ترتیب در شکل ۵ - ۱ تا شکل ۵ - ۴ ارائه شده است.



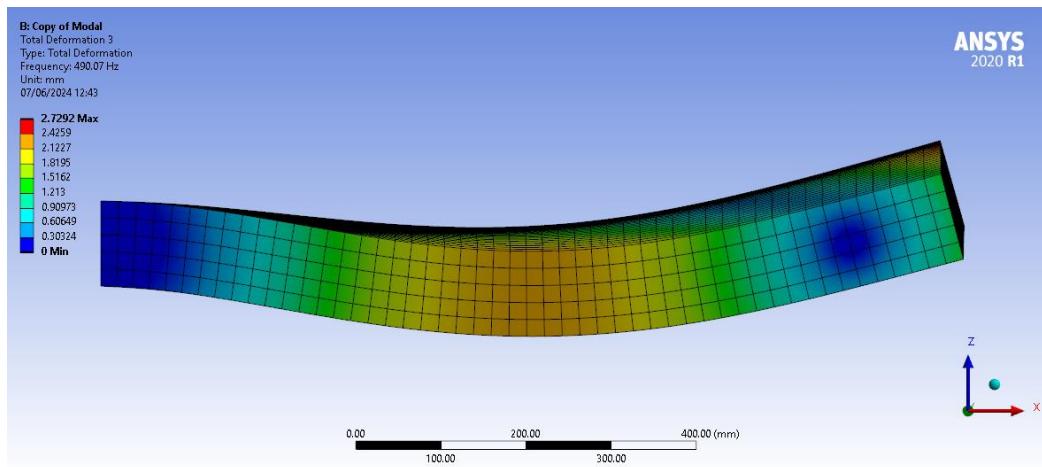
شکل ۵ - ۱ شکل مود اول در حالت دو سر گیردار در تحلیل مودال انسیس.



شکل ۵ - ۲ شکل مود دوم در حالت دو سر گیردار در تحلیل مودال انسیس.



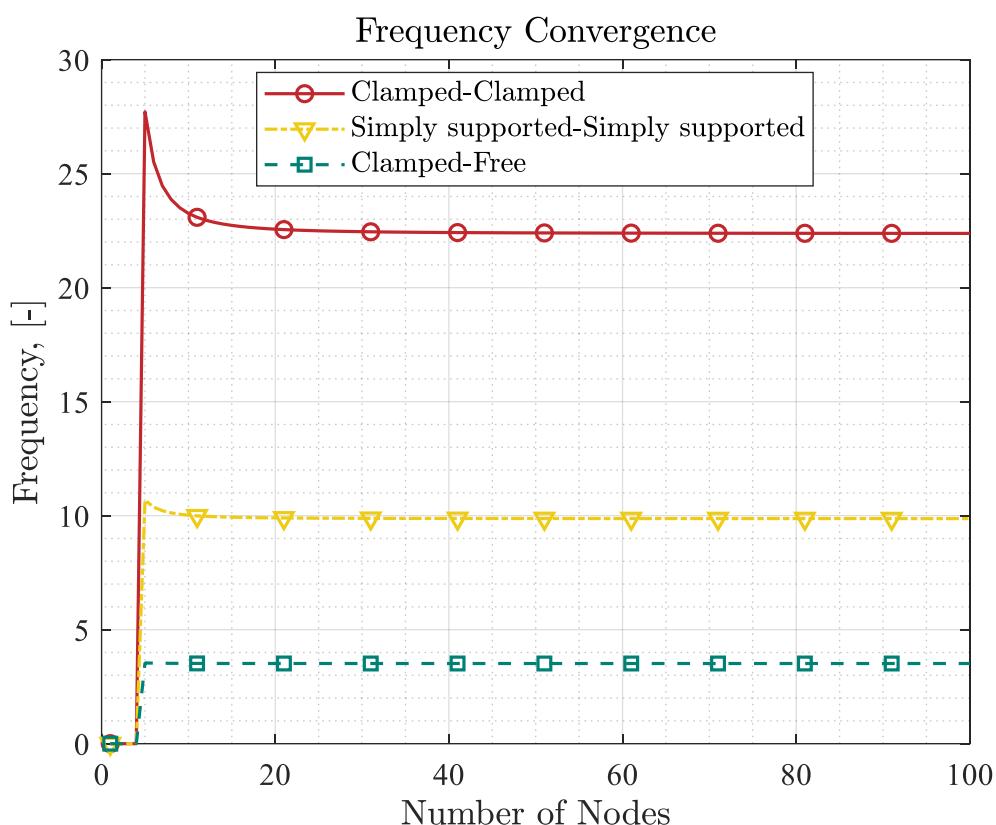
شکل ۵ - ۳ شکل مود اول در حالت یک سر گیردار - یک سر آزاد در تحلیل مودال انسیس.



شکل ۵ - ۴ شکل مود دوم در حالت یک سر گیردار - یک سر آزاد در تحلیل مودال انسیس.

۳-۵- همگرایی پاسخ دینامیکی

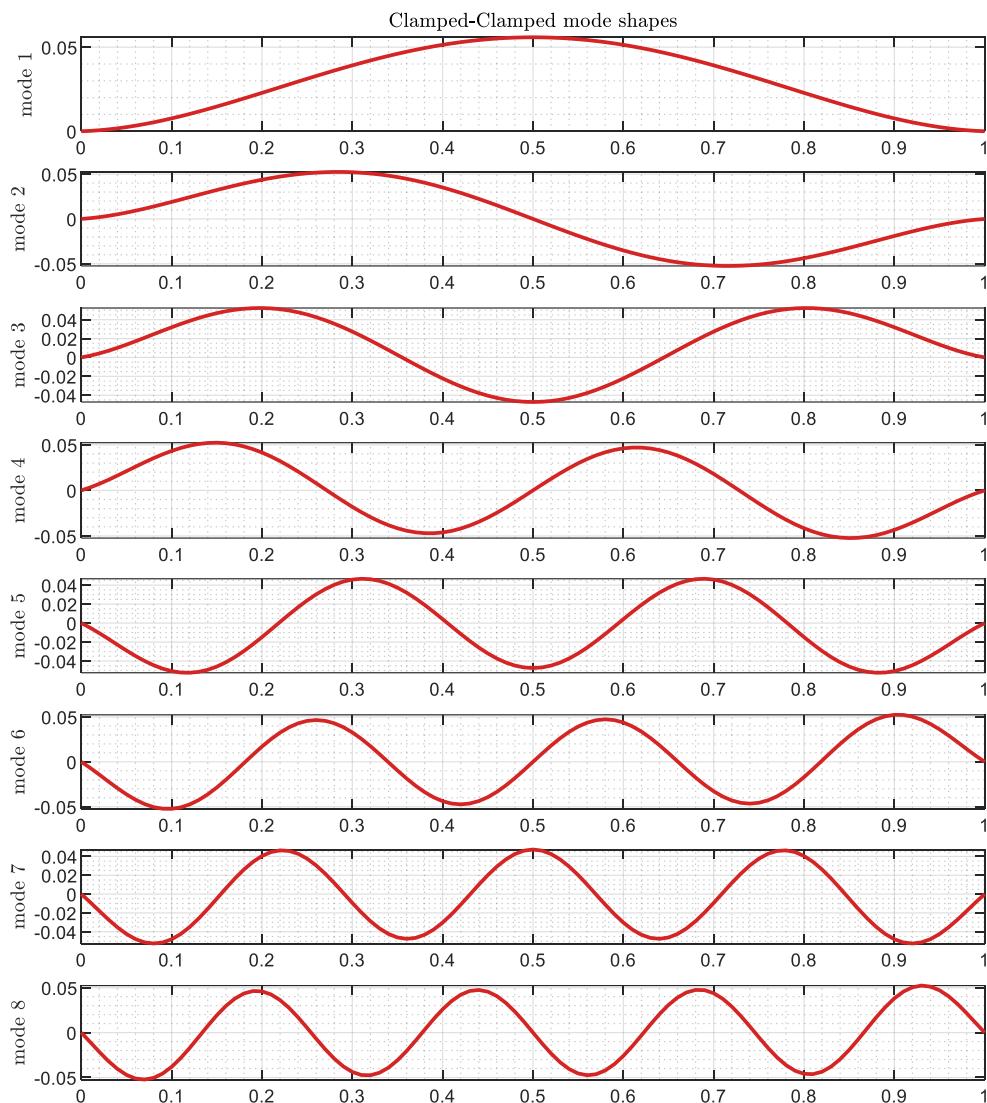
در این تحلیل نیز برای در دست داشتن بهترین تعداد المان برای پاسخ المان محدود در نتایج ارتعاشات، همگرایی فرکانس با افزایش تعداد المان‌ها رسم و در شکل ۵-۵ ارائه شده است. مشاهده شده است که تعداد المان ۱۰۰ برای محاسبات المان محدود مقدار منطقی از لحاظ دقیق محاسبات می‌باشد. از دیگر نکات که می‌توان به آن اشاره کرد این است که تغییر شرایط مرزی از گیردار به ساده باعث کاهش فرکانس طبیعی (فرکانس اول) می‌شود که به علت کاهش سفتی کل سازه می‌باشد.



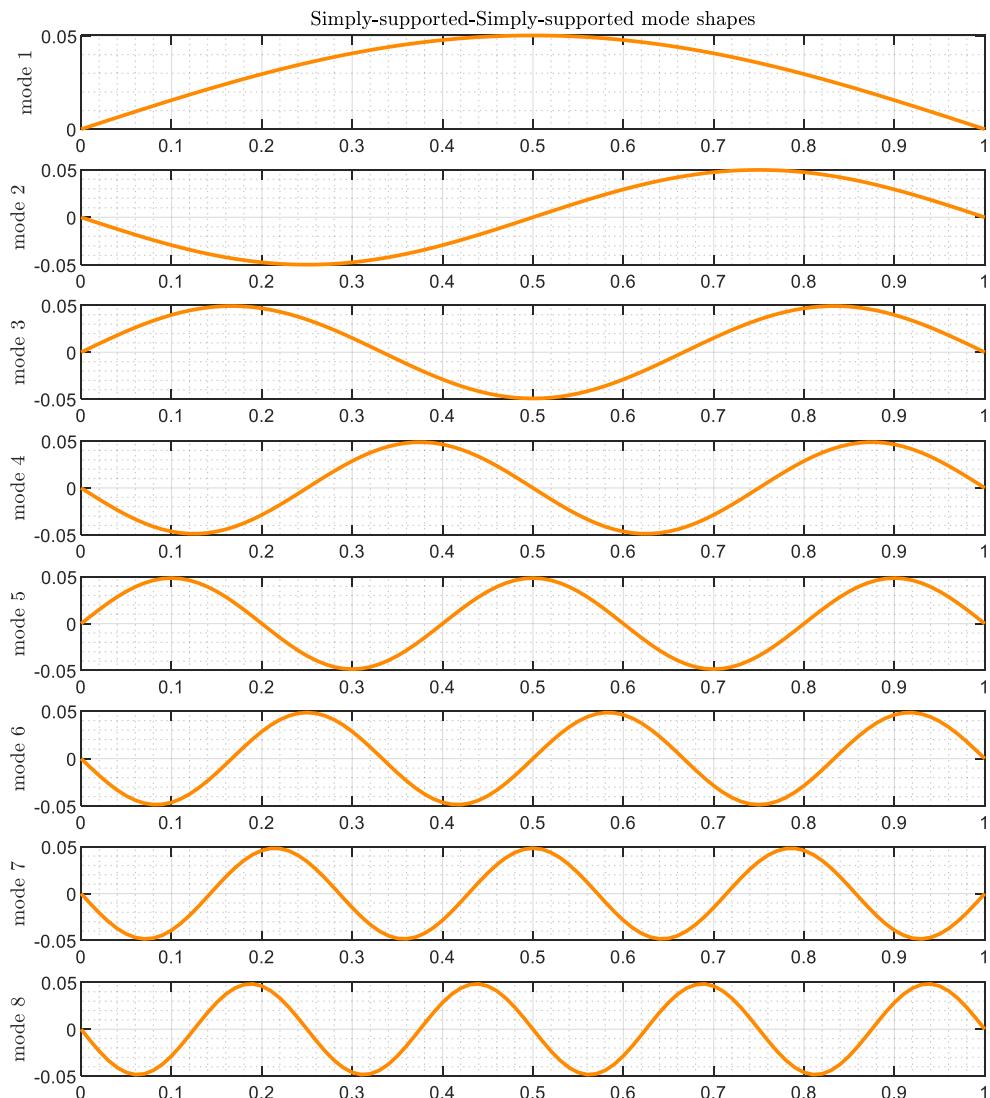
شکل ۵-۵ همگرایی نتایج المان محدود فرکانس تیر با شرایط مرزی متفاوت به طول یک متر.

۳-۵ - شکل‌های مود

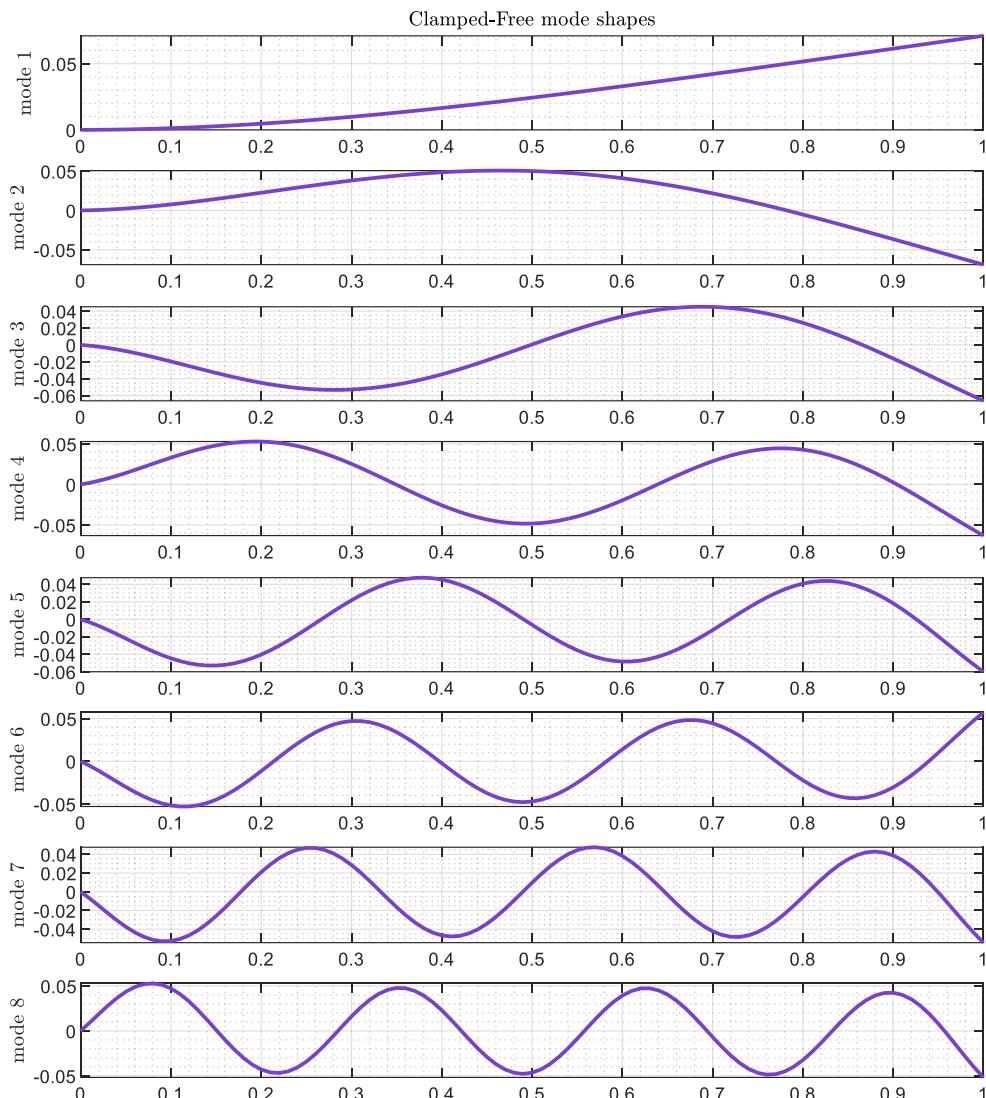
شکل مودهای حاصل برای انواع شرایط مرزی نیز استخراج شدند و در شکل ۵ - ۶ تا شکل ۵ - ۸ برای ۸ مود اول نمایش داده شده است. همانطور که مشخص است، افزایش فرکانس طبیعی (شکل مودهای بالاتر)، منجر به پیچیده‌تر شدن ساختار در هنگام ارتعاش با آن مود خواهد شد.



شکل ۵ - ۶ نتایج المان محدود برای شکل مود تیر با شرایط مرزی دو سر گیردار به طول یک متر.



شکل ۵ - ۷ نتایج المان محدود برای شکل مود تیر با شرایط مرزی دو سر ساده به طول یک متر.

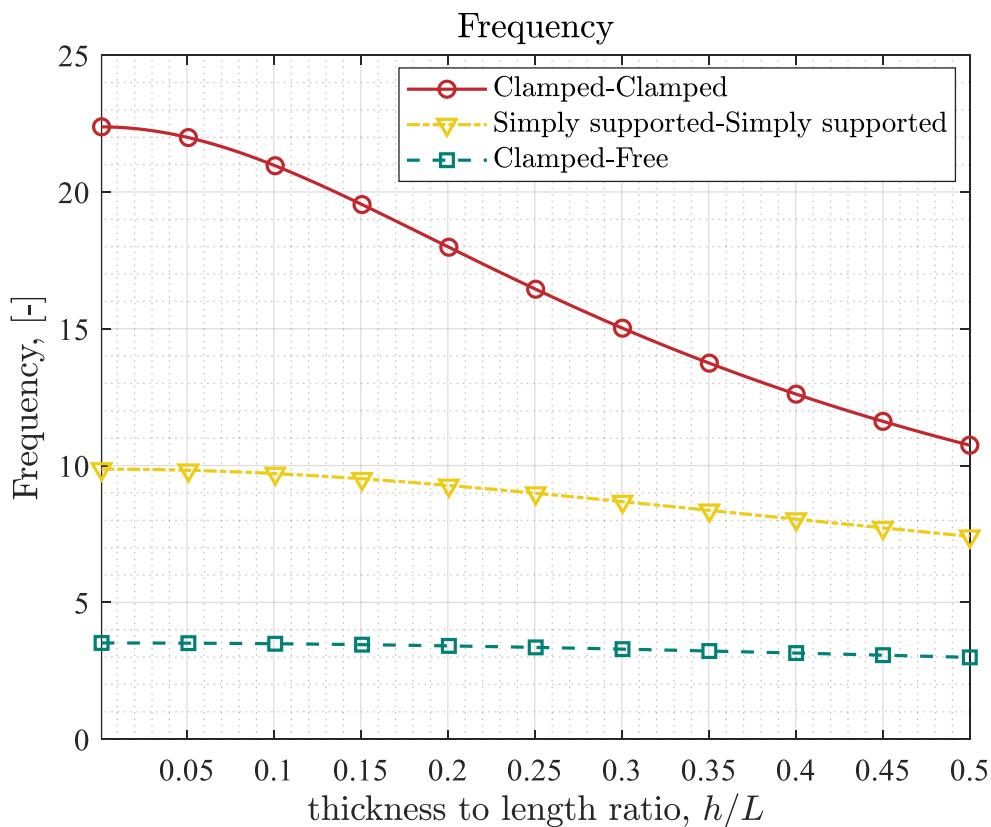


شکل ۵ - ۸ نتایج المان محدود برای شکل مود تیر با شرایط مرزی یک سر گیردار - یک سر ساده به طول یک متر.

۴-۵- اثر ضخامت به طول تیر بر فرکانس

همانند فصل گذشته در حالت استاتیک، در حالت بررسی ارتعاشات نیز اثر تغییرات ضخامت به طول تیر بر فرکانس طبیعی اول در شکل ۵ - ۹ رسم شده است. با افزایش ضخامت، فرکانس طبیعی کاهش یافته است و بیشترین مقدار نیز مربوط به حالت دو سر گیردار می‌باشد. این روند در جداول ابتدایی فصل، جدول ۵ - ۱ تا جدول ۵ - ۵ نیز همراستا با مقاله [۱] قابل ملاحظه می‌باشد. فرمول بی‌بعدسازی در این قسمت برابر است با،

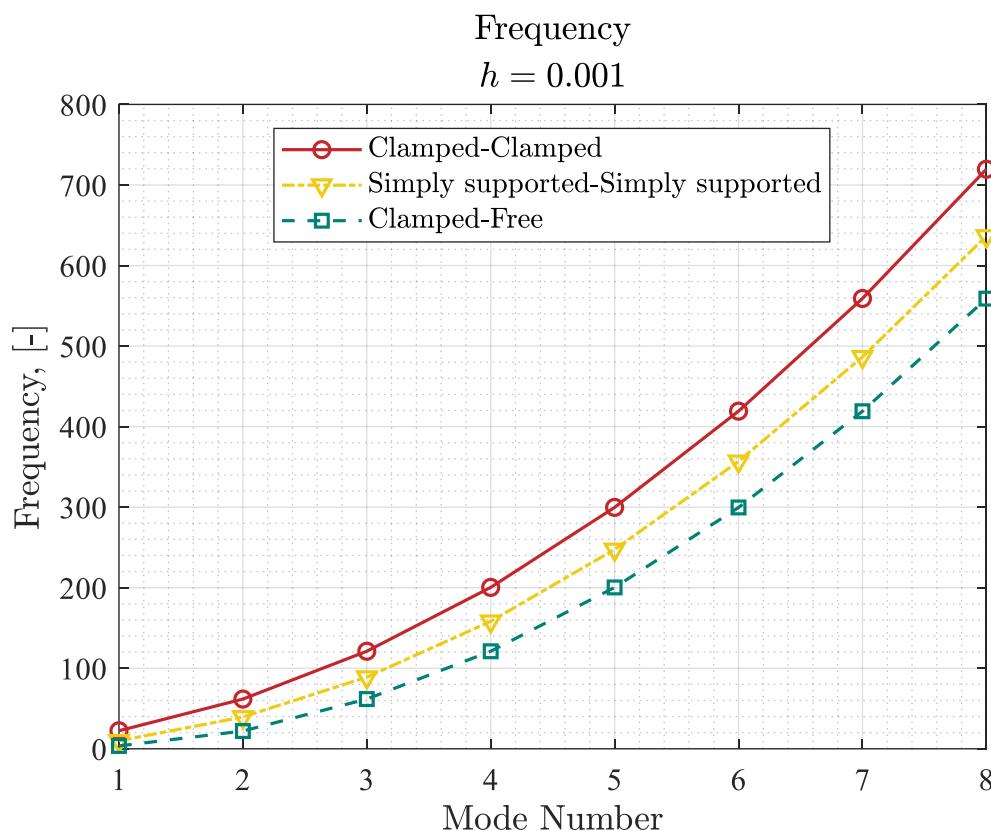
$$\lambda = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (2-5)$$



شکل ۵ - ۹ نتایج المان محدود فرکانس تیر تیموشنکو برای ضخامت به طول متفاوت برای انواع شرایط مرزی.

۵-۵- شماره مود و فرکانس طبیعی

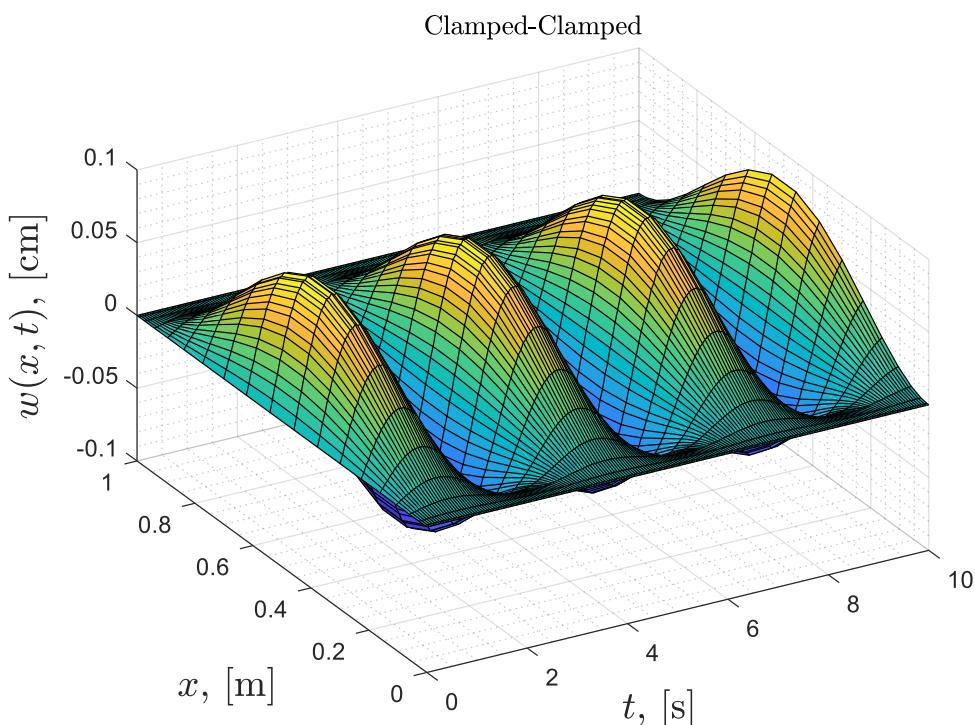
در شکل ۵ - ۱۰ مشخص است که شماره مودهای بالاتر فرکانس بالاتری را نشان می‌دهند. همچنین، مشخص است که شرط مرزی گیردار بالاترین فرکانس را در بین شرایط مرزی دیگر دارا می‌باشد.



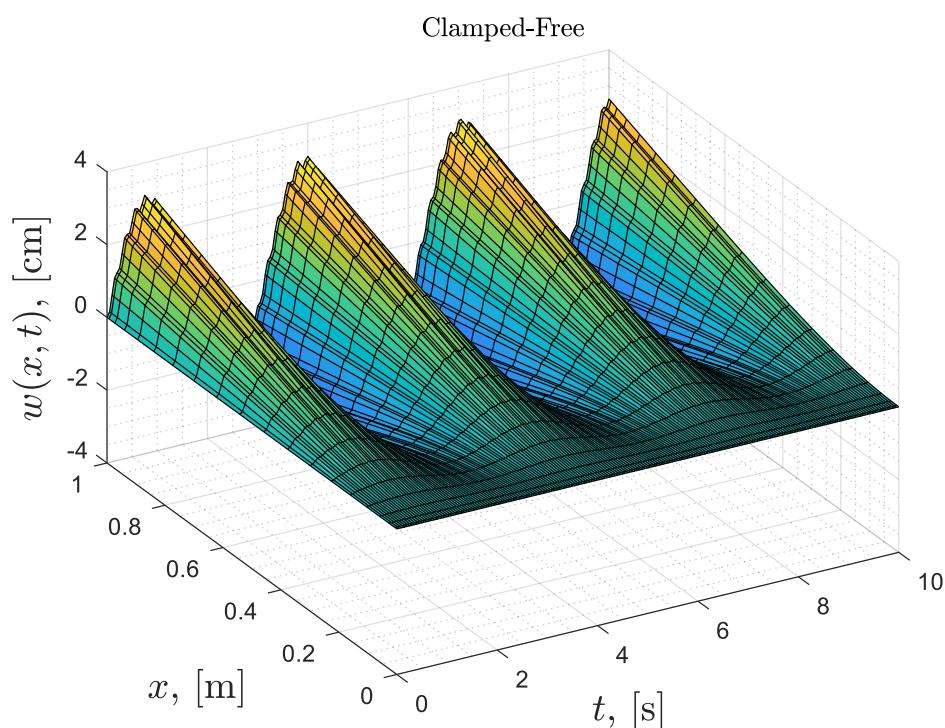
شکل ۵ - ۱۰ نتایج المان محدود فرکانس تیبر تیموشنکو برای شماره مودهای متفاوت برای انواع شرایط مرزی.

۶-۵- پاسخ گذرای سیستم

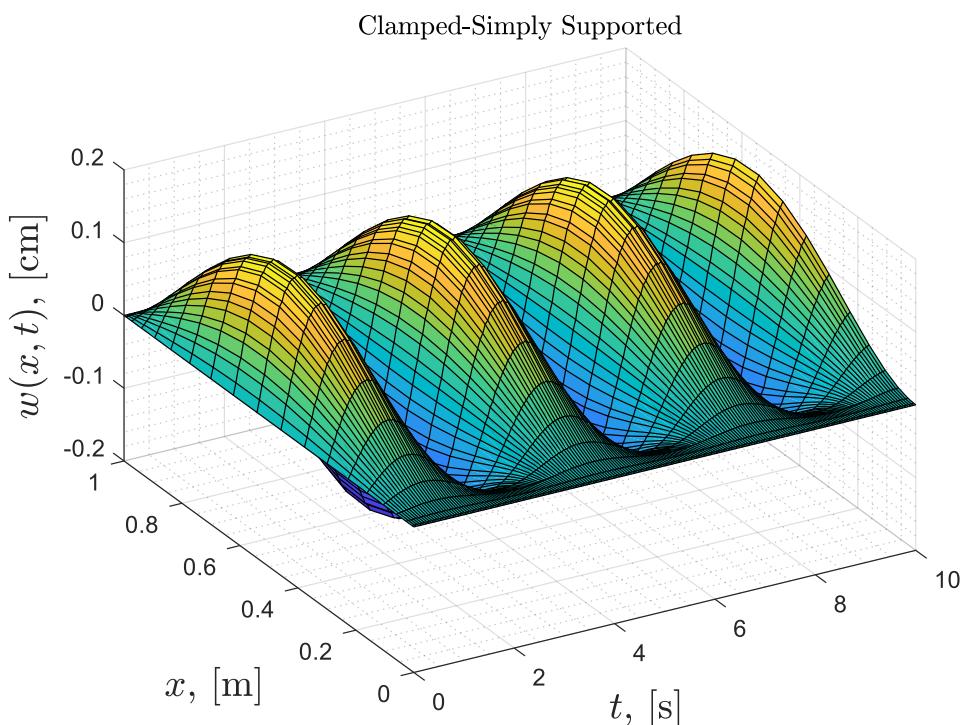
همانطور که اشاره شد، از روش حل نیومارک برای این بخش استفاده شده است. در ابتدا نتایج، شکل ۵ - ۱۱ تا ۵ - ۱۴ با در نظر گرفتن طول تیر و زمان، پاسخ در کل زمان را نشان می‌دهند و سپس در شکل ۵ - ۱۵ مقایسه بین شرایط مرزی مختلف آورده شده است. نوع بارگذاری بر روی تیر نیز از نوع مثلثاتی می‌باشد که در شکل ۵ - ۱۶ قابل مشاهده می‌باشد.



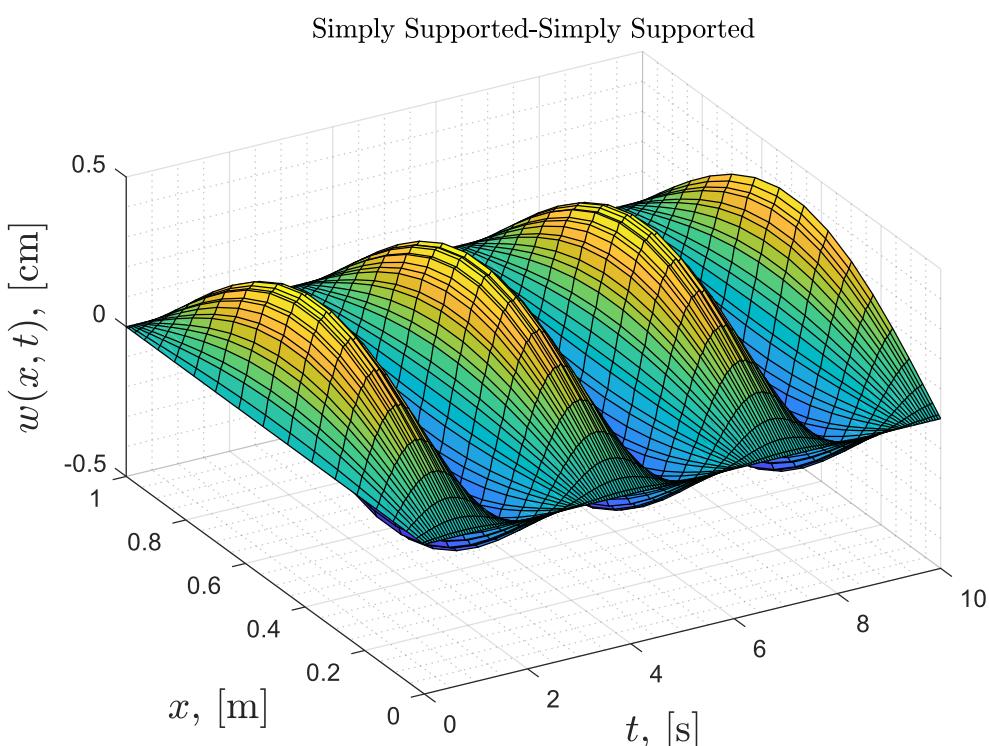
شکل ۵ - ۱۱ نتایج نیومارک پاسخ گذرا تیر تیموشنکو برای شرط مرزی دوسر گیردار.



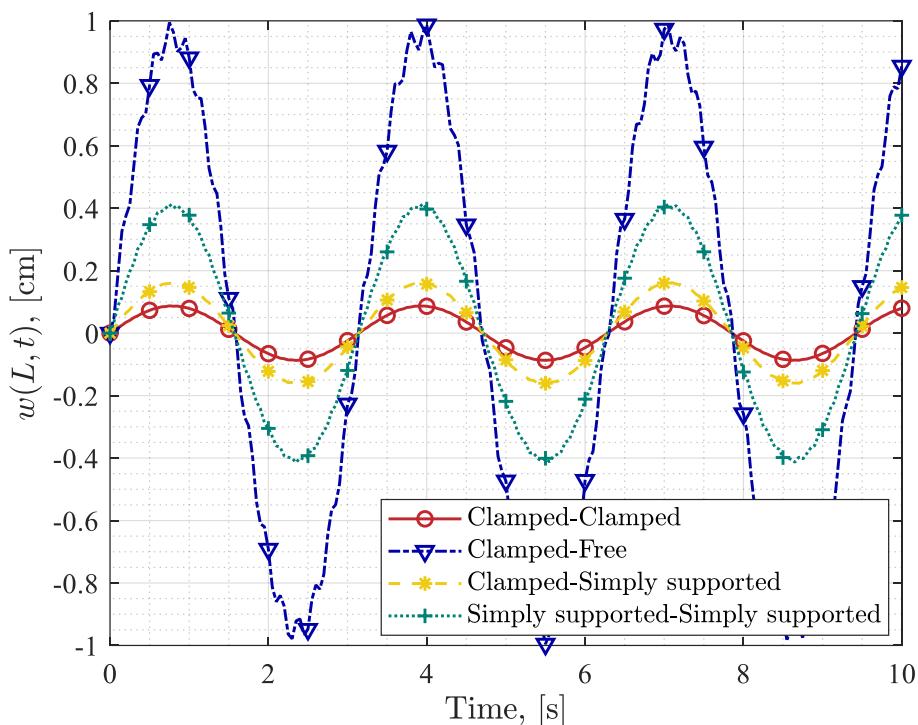
شکل ۵ - ۱۲ نتایج نیومارک پاسخ گذرا تیر تیموشنکو برای شرط مرزی یک سر گیردار - یک سر آزاد.



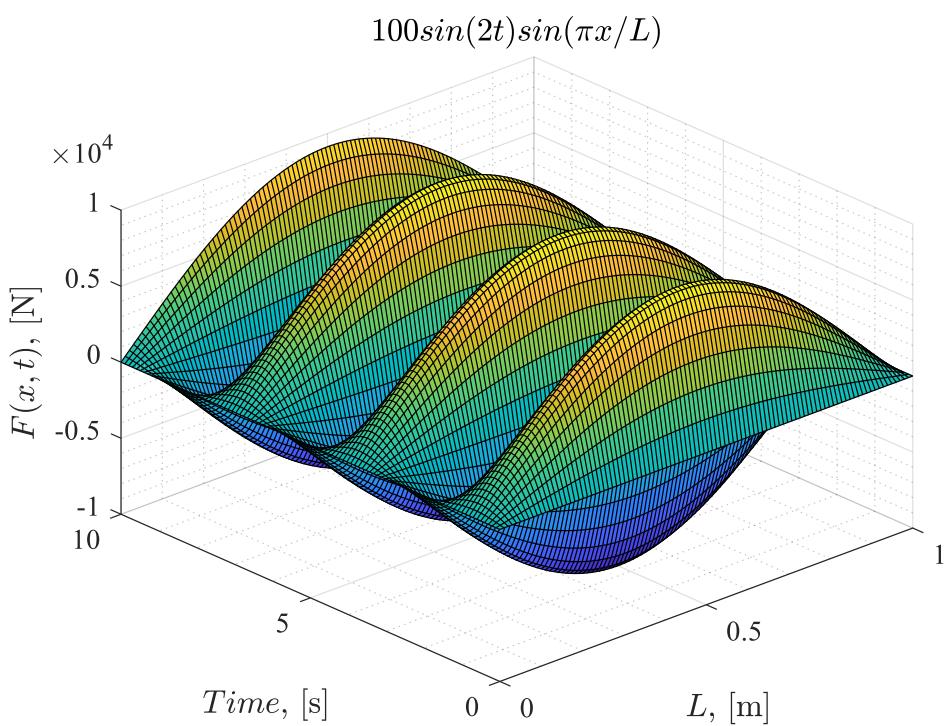
شکل ۵ - ۱۳ نتایج نیومارک پاسخ گذرا تیر تیموشنکو برای شرط مرزی یک سر گیردار- یک سر ساده.



شکل ۵ - ۱۴ نتایج نیومارک پاسخ گذرا تیر تیموشنکو برای شرط مرزی دوسر ساده.



شکل ۵ - ۱۵ مقایسه نتایج نیومارک پاسخ گذرا تیر تیموشنکو برای انواع شرایط مرزی.



شکل ۵ - ۱۶ نمودار مکان زمان تابع $F_t = 100\sin(2t)\sin(\frac{\pi x}{L})$

فصل ششم

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

جمع‌بندی

همانطور که ملاحظه شد، در پروژه دوم درس المان محدود، به بررسی خیز و ارتعاشات تیر تیموشنکو به روش المان محدود برای انواع شرایط مرزی پرداخته شد. در ابتدا، کلیات تیر تیموشنکو و معادلات حاکم بر مسئله و همچنین شرح توضیحاتی از روش حل و الگوریتم داده شده است. سپس، در فصل چهارم، نتایج خیز حاصل در غالب نمودار شرح داده شده است که در ابتدا با نتایج حل تحلیلی مقایسه شد. در قسمت بعدی پروژه، فصل پنجم، به بررسی ارتعاشات، فرکانس طبیعی و شکل مود پرداخته شده است. در این فصل برای بررسی درستی نتایج از مقاله پراستناد در این زمینه و همچنین حل‌های GDQ و مودال انسیس استفاده شده است، که دقیق بالا در این پروژه را نشان می‌دهد. از جمله نتایج می‌توان به این اشاره کرد که، در حالت دو سر گیردار، کمترین میزان خیز و بیشترین مقدار فرکانس مشاهده شده است. همچنین، افزایش نیست ضخامت به طول باعث کاهش خیز تیر تیموشنکو تحت بارگذاری شده است.

منابع و مراجع

منابع

- [۱]S.C. Lin, K.M. Hsiao, VIBRATION ANALYSIS OF A ROTATING TIMOSHENKO BEAM, Journal of Sound and Vibration 240(2) (2001) 303-322.
- [۲]C.M. Wang, V.B.C. Tan, Y.Y. Zhang, Timoshenko beam model for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes, Journal of Sound and Vibration 294(4) (2006) 1060-1072.
- [۳]M. Şimşek, Non-linear vibration analysis of a functionally graded Timoshenko beam under action of a moving harmonic load, Composite Structures 92(10) (2010) 2532-2546.
- [۴]R. Ansari, R. Gholami, S. Sahmani, Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory, Composite Structures 94(1) (2011) 221-228.
- [۵]M. Hemmatnezhad, R. Ansari, Finite element formulation for the free vibration analysis of embedded double-walled carbon nanotubes based on nonlocal Timoshenko beam theory, Journal of Theoretical and Applied Physics 7(1) (2013) 6.
- [۶]H. Babaei, M.R. Eslami, Study on nonlinear vibrations of temperature- and size-dependent FG porous arches on elastic foundation using nonlocal strain gradient theory, The European Physical Journal Plus 136(1) (2021) 24.
- [۷]M.R. Eslami, Finite elements methods in mechanics, Springer2014.
- [۸]A. Zamani, M.R. Eslami, Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation, International Journal of Solids and Structures 47(10) (2010) 1392-1404.
- [۹]A. Zamani, R. Gracie, M.R. Eslami, Higher order tip enrichment of extended finite element method in thermoelasticity, Computational Mechanics 46 (2010) 851-866.
- [۱۰]O.O. Oyekoya, D.U. Mba, A.M. El-Zafrany, Buckling and vibration analysis of functionally graded composite structures using the finite element method, Composite Structures 89(1) (2009) 134-142.
- [۱۱]J. Lee ,W. Schultz, Eigenvalue analysis of Timoshenko beams and axisymmetric Mindlin plates by the pseudospectral method, Journal of Sound and Vibration 269(3-5) (2004) 609-621.

پیوست‌ها

پ-۱- روش تفاضلات مربعی در حل تیر تیموشنسکو

همانطور که اشاره شد، به منظور حل مشکل تئوری تیر اویلر-برنولی در مدلسازی تیرها به خصوص در مورد تیرهای کوتاه و ضخیم، تیموشنسکو، با در نظر گرفتن تغییر شکل برشی و لختی دورانی یک تئوری جدید برای تیرها ارائه نمود. بر اساس تئوری تیر تیموشنسکو معادله حاکم بر ارتعاشات آزاد تیرهای همگین با سطح مقطع یکنواخت به شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} kGA_s \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right] &= \rho A_s \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \\ EI_s \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} kGA_s \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \phi(x, t) \right] &= \rho I_s \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{پ-۱})$$

که در این رابطه، $w(x, t)$ خیز، $\phi(x, t)$ دوران، E و ρ به ترتیب مدول الاستیک و چگالی و A_s و I_s به ترتیب مساحت و ممان خمشی سطح مقطع تیر را نشان می‌دهد. همچنین، k ضریب تصحیح برشی می‌باشد که به منظور تصحیح تخمین نادرست این تئوری در محاسبه‌ی تنش برشی به کار برده می‌شود، این ضریب برای سطح مقطع‌های مستطیلی از رابطه‌ی زیر بر حسب پواسون (ν) تخمین زده می‌شود،

$$k = \frac{5 + 6\nu}{6 + 5\nu} \quad (\text{پ-۲})$$

شرطیت مرزی نیز به شکل زیر خواهد بود،

$$\begin{cases} \text{clamped (c): } w = \phi = 0 \\ \text{simple (s): } w = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \text{free (f): } \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi = 0 \end{cases} \quad (\text{پ-۳})$$

با تعریف متغیر طولی بدون بعد به شکل زیر،

$$0 \leq \zeta = \frac{x}{L} \leq 1 \quad (\text{پ-۴})$$

که در آن L طول تیر می‌باشد و استفاده از روش جداسازی متغیرهای به شکل زیر

$$w(\zeta, t) = LW(\zeta)e^{i\omega t}, \quad \phi(\zeta, t) = \Phi(\zeta)e^{i\omega t} \quad (\text{پ-۵})$$

که در این رابطه ω فرکانس طبیعی نوسانات تیر بوده و $i = \sqrt{-1}$ ، می‌توان دستگاه معادلات دیفرانسیل (پ-۱) را به شکل زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\zeta^2} - \frac{d\Phi}{d\zeta} &= -\lambda^4 \frac{\alpha\gamma^2}{12} W \\ \frac{dW}{d\zeta} + \frac{\alpha\gamma^2}{12} \frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} - \Phi &= -\lambda^4 \frac{\alpha\gamma^4}{144} \Phi \end{aligned} \quad (\text{پ-۶})$$

که در این رابطه،

$$\lambda^4 = \frac{\rho A_s L^4 \omega^2}{E L_s} \quad \gamma = \frac{h}{L} \quad \alpha = \frac{E}{kG} = 2(1.2 + \nu) \quad (\text{پ-۷})$$

و در این رابطه h ضخامت تیر را نشان می‌دهد.

معادلات مرزی (پ-۳) را نیز می‌توان به شکل بدون بعد زیر بیان نمود،

$$\begin{cases} \text{clamped (c): } W = \Phi = 0 \\ \text{simple (s): } W = \frac{d\Phi}{d\zeta} = 0 \\ \text{free (f): } \frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{dW}{d\zeta} - \Phi = 0 \end{cases} \quad (\text{پ-۸})$$

با تعریف زیر خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{df}{dx} \right\} &= [A]\{f\}, \quad \left\{ \frac{d^2f}{dx^2} \right\} = [B]\{f\}, \quad \left\{ \frac{d^3f}{dx^3} \right\} = [C]\{f\}, \\ \left\{ \frac{d^4f}{dx^4} \right\} &= [D]\{f\}, \dots \end{aligned} \quad (\text{پ-۹})$$

با توجه به معادله (پ-۶) دستگاه (پ-۹) را می‌توان بازنویسی نمود،

$$\begin{aligned} [B]\{W\} - [A]\{\Phi\} &= -\lambda^4 \frac{\alpha\gamma^2}{12} \{W\} \\ [A]\{W\} + \frac{\alpha\gamma^2}{12} [B]\{\Phi\} - \{\Phi\} &= -\lambda^4 \frac{\alpha\gamma^4}{144} \{\Phi\} \end{aligned} \quad (\text{پ-۱۰})$$

حال بردار $\{u\}$ تعریف خواهد شد،

$$\{u\}_{2N \times 1} = \begin{Bmatrix} \{W\} \\ \{\Phi\} \end{Bmatrix} \quad (\text{پ-۱۱})$$

پس معادله به فرم استاندارد بازنویسی می‌شود،

$$[K]\{u\} = \lambda^4 [M]\{u\} \quad (12-\text{پ})$$

که در رابطه اشاره شده، ماتریس‌های سختی و جرمی برابرند با،

$$[K]_{2N \times 2N} = \begin{bmatrix} [B] & -[A] \\ [A] & \frac{\alpha\gamma^2}{12}[B] - I \end{bmatrix} \quad [M]_{2N \times 2N} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha\gamma^2}{12}I & [0]_{N \times N} \\ [0]_{N \times N} & -\frac{\alpha\gamma^4}{144}I \end{bmatrix} \quad (13-\text{پ})$$

شرط مرزی را نیز می‌توان به شکل زیر بیان نمود،

$$[T]\{u\} = \{0\} \quad (14-\text{پ})$$

که در این رابطه ماتریس $[T]$ برای شرایط مختلف حاصل از ترکیب حالت‌های گیردار (c)، ساده (s) و آزاد (f) به شکل زیر تعریف می‌شود،

$$\begin{aligned} cc: [T] &= \begin{bmatrix} I_1 & \{0\}_{1 \times N} \\ \{0\}_{1 \times N} & I_1 \\ I_N & \{0\}_{1 \times N} \\ \{0\}_{1 \times N} & I_N \end{bmatrix} & cs: [T] &= \begin{bmatrix} I_1 & \{0\}_{1 \times N} \\ \{0\}_{1 \times N} & I_1 \\ I_N & \{0\}_{1 \times N} \\ \{0\}_{1 \times N} & A_N \end{bmatrix} \\ ss: [T] &= \begin{bmatrix} I_1 & \{0\}_{1 \times N} \\ \{0\}_{1 \times N} & A_N \\ I_N & \{0\}_{1 \times N} \\ \{0\}_{1 \times N} & A_N \end{bmatrix} & cf: [T] &= \begin{bmatrix} I_1 & \{0\}_{1 \times N} \\ \{0\}_{1 \times N} & I_1 \\ \{0\}_{1 \times N} & A_N \\ A_N & -I_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15-\text{پ})$$

با توجه به وجود چهار شرط مرزی، نقاط مرزی و میانی در حل این مساله به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند،

$$\{u\}_b = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_N \\ \Phi_1 \\ \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_N \\ u_{N+1} \\ u_{2N} \end{pmatrix} \quad (16-\text{پ})$$

سایر نقاط نیز به عنوان نقاط میانی ($\{u\}_d$) در نظر گرفته می‌شوند.

با صرفنظر کردن از ارضای معادلات حاکم در نقاط مرزی می‌توان رابطهی (پ-12) را به شکل زیر بیان نمود،

$$[\bar{K}]\{u\} = \lambda^4 [\bar{M}]\{u\} \quad (17-\text{پ})$$

که در این رابطه $[\bar{K}]$ و $[\bar{M}]$ ماتریس غیرمربعی از مرتبه $2N \times (2N - 4)$ می‌باشند. با تفکیک ستون‌های متناظر با نقاط مرزی و میانی در ماتریس‌های موجود در روابط (پ-۱۴) و (پ-۱۷) می‌توان این روابط را به شکل زیر بیان نمود،

$$\begin{aligned} [\bar{K}]_b\{u\}_b + [\bar{K}]_d\{u\}_d &= \lambda^4([\bar{M}]_b\{u\}_b + [\bar{M}]_d\{u\}_d) \\ [T]_b\{u\}_b + [T]_d\{u\}_d &= 0 \end{aligned} \quad (\text{پ-۱۸})$$

با استفاده از رابطه‌ی دوم (پ-۱۸) می‌توان رابطه‌ی زیر را بین جابجایی در نقاط مرزی و میانی بیان نمود،

$$\{u\}_b = [p]\{u\}_d \quad (\text{پ-۱۹})$$

که در این رابطه،

$$[p] = -[T]_b^{-1}[T]_d \quad (\text{پ-۲۰})$$

با جایگذاری رابطه‌ی (پ-۱۹) در رابطه (پ-۱۸) خواهیم داشت،

$$[K^*]\{u\}_b = \lambda^4[M^*]\{u\}_d \quad (\text{پ-۲۱})$$

که در این رابطه،

$$[K^*] = [\bar{K}]_d + [\bar{K}]_b[p], \quad [M^*] = [\bar{M}]_d + [\bar{M}]_b[p] \quad (\text{پ-۲۲})$$

با حل مساله مقدار ویژه (پ-۲۱) فرکانس طبیعی به عنوان مقادیر ویژه بدست می‌آید و بردارهای ویژه نیز جابجایی در شکل مودهای متناظر را در نقاط میانی نشان می‌دهد. مقدار جابجایی متناظر در نقاط مرزی نیز با استفاده از رابطه‌ی (پ-۱۹) بدست خواهد آمد.

پ-۲- حل تحلیلی تیر تیموشنکو

در این قسمت حل تحلیلی تیر تیموشنکو تشریح خواهد شد، برای تیر تیموشنکو داریم،

$$\begin{aligned} EI \frac{d^3\phi(x)}{dx^3} &= q(x) \\ \frac{d^2w(x)}{dx^2} &= \frac{d\phi(x)}{dx} - \frac{q(x)}{kGA} \end{aligned} \quad (\text{پ-۲۳})$$

با توجه میانه تیر خواهیم داشت،

$$EI \frac{d^3\phi(x)}{dx^3} + kGA \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2} - \frac{d\phi(x)}{dx} \right) = 0 \quad (24-\text{پ})$$

دوبار مشتق از معادله دوم (پ-۲۳)،

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} - \frac{1}{kGA} \frac{d^2}{dx^2} q(x) \quad (25-\text{پ})$$

پ-۲-۱- تیر تیموشنکو دو سر ساده

$$\phi(x) = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 + \frac{qx^3}{6EI} \quad (26-\text{پ})$$

شرط مرزی برابر است با،

$$-EI \frac{d\phi(0)}{dx} = 0; \quad -EI \frac{d\phi(L)}{dx} = 0; \quad (27-\text{پ})$$

بنابراین خواهیم داشت،

$$\phi(x) = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qL}{4EI} x^2 + c_3 \quad (28-\text{پ})$$

با توجه به معادله (پ-۲۳)،

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{q}{2EI} (x^2 - Lx) - \frac{q(x)}{kGA} \quad (29-\text{پ})$$

پس،

$$w(x) = \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qx^3L}{12EI} - \frac{qx^2}{2kGA} + c_1 x + c_2 \quad (30-\text{پ})$$

با اعمال شرط مرزی،

$$w(0) = w(L) = 0 \quad (31-\text{پ})$$

خواهیم داشت،

$$w(x) = \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qx^3L}{12EI} - \frac{qx^2}{2kGA} + \frac{qL^3}{24EI} x + \frac{qLx}{2kGA} \quad (32-\text{پ})$$

$$c_3 = \frac{qL^3}{24EI} \text{ پس،}$$

معادله (پ-۲۸) برابر خواهد شد با،

$$\phi(x) = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qL}{4EI}x^2 + \frac{qL^3}{24EI} \quad (33-\text{پ})$$

برای خیز خواهیم داشت،

$$w(x) = \frac{qL^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] + \frac{qL^2}{2kGA} \left[\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (34-\text{پ})$$

پ-۲-۲- تیر تیموشنسکو یک سر گیردار

با اعمال شرط مرزی،

$$\phi(0) = -EI\phi'(L) = -EI\phi''(L) = w(0) = 0 \quad (35-\text{پ})$$

خواهیم داشت،

$$w(x) = \frac{qL^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] + \frac{qL^2}{2kGA} \left[2\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (36-\text{پ})$$

۶

$$\phi(x) = \frac{qL^3}{6EI} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad (37-\text{پ})$$

پ-۲-۳- تیر تیموشنسکو دو سر گیردار

با اعمال شرط مرزی،

$$\phi(0) = \phi(L) = w(0) = w(L) = 0 \quad (38-\text{پ})$$

خواهیم داشت،

$$w(x) = \frac{qL^4}{24EI} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right) \right]^2 + \frac{qL^2}{2kGA} \left[\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (39-\text{پ})$$

۷

$$\phi(x) = \frac{qL^3}{12EI} \left[2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad (40-\text{پ})$$

پ-۲-۴- تیر تیموشنکو یک سر گیردار، یک سر ساده

با اعمال شرط مرزی،

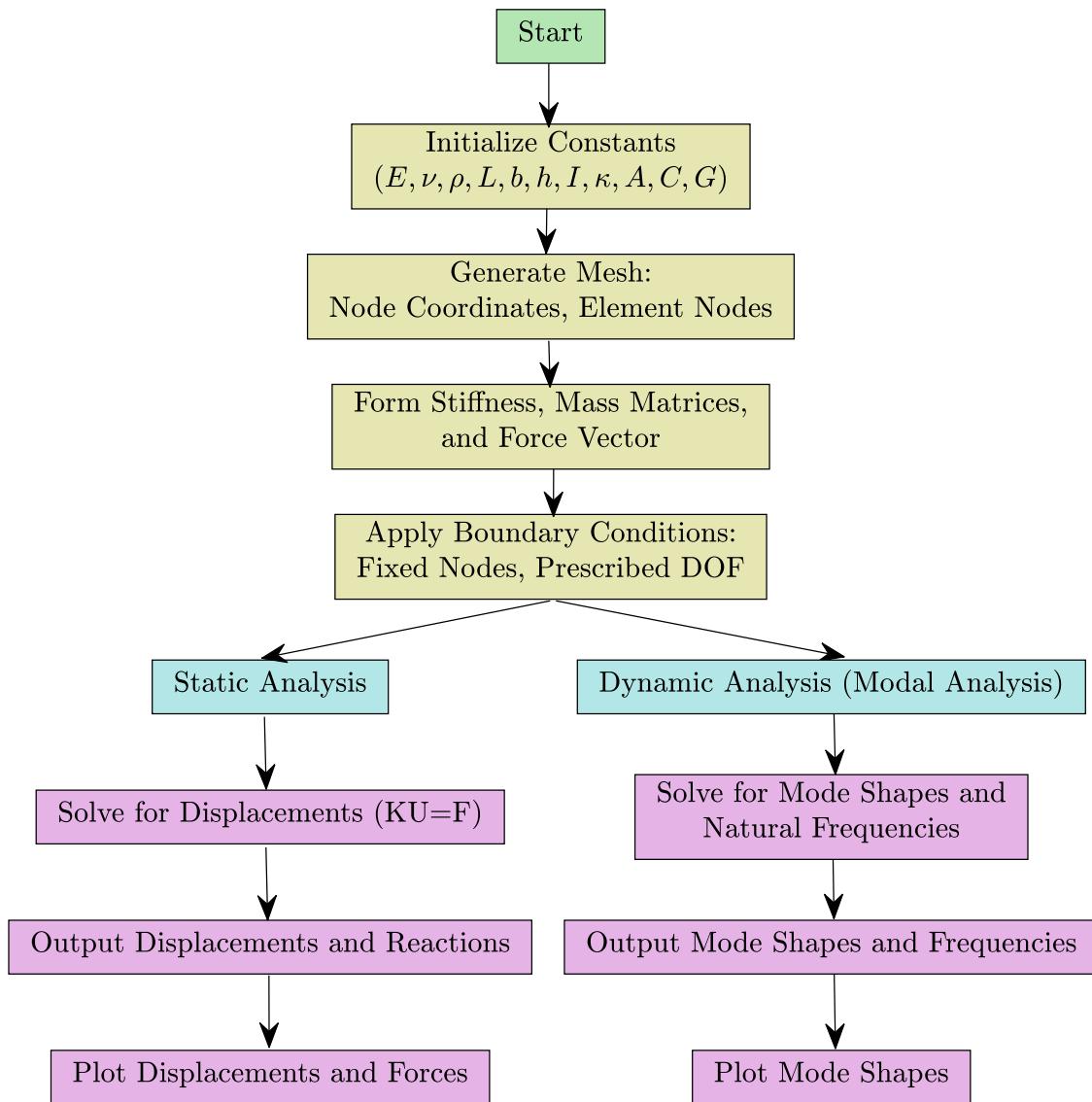
$$\phi(0) = -EI\phi'(L) = w(0) = w(L) = 0 \quad (41-\text{پ})$$

خواهیم داشت،

$$w(x) = \frac{qL^4}{48EI} \left[2\left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{12\alpha + 5}{3\alpha + 1} \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{3}{3\alpha + 1} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{6\alpha}{3\alpha + 1} \left(\frac{x}{L}\right) \right] + \frac{qL^2}{8kGA} \left[\frac{12\alpha + 5}{3\alpha + 1} \left(\frac{x}{L}\right) - 4 \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \quad (42-\text{پ})$$

۹

$$\phi(x) = \frac{qL^3}{48EI} \left[8\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3 \frac{12\alpha + 5}{3\alpha + 1} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{6}{3\alpha + 1} \left(\frac{x}{L}\right) \right] \quad (43-\text{پ})$$



شکل پ - ۱ فلوچارت اجرای کد المان محدود Python برای تیر تیموشنکو.

پ-۳- کدهای پروژه

در جدول پ - ۱ کد نوشته شده برای مسئله المان محدود آورده شده است که برای اجرای آن در پایتون لازم است ابتدا کتابخانه numpy و matplotlib با استفاده از دستور زیر نصب شود.

```
pip install numpy matplotlib
```

جدول پ - ۱ کد Python مسئله المان محدود برای خیز تیر تیموشنکو.

```

pip install numpy matplotlib
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.linalg import eigh

def form_stiffness_mass_timoshenko_beam(GDof, numberElements,
elementNodes, numberNodes, xx, C, P, rho, I, thickness):
    stiffness = np.zeros((GDof, GDof))
    mass = np.zeros((GDof, GDof))
    force = np.zeros(GDof)

    gauss_locations_bending = [0.577350269189626, -0.577350269189626]
    gauss_weights_bending = [1, 1]

    for e in range(numberElements):
        indices = elementNodes[e, :]
        elementDof = np.concatenate([indices, indices + numberNodes])
        length_element = xx[indices[1]] - xx[indices[0]]
        detJacobian = length_element / 2
        invJacobian = 1.0 / detJacobian

        for q in range(len(gauss_weights_bending)):
            pt = gauss_locations_bending[q]
            shape, naturalDerivatives = shape_function_L2(pt)
            Xderivatives = naturalDerivatives * invJacobian

            B = np.zeros((2, 4))
            B[0, 2:] = Xderivatives

            stiffness[np.ix_(elementDof, elementDof)] += B.T @ (C[0, 0] *
B) * gauss_weights_bending[q] * detJacobian
            force[indices] += shape * P * gauss_weights_bending[q] *
detJacobian

        # Mass matrix contributions
        N = np.zeros((4, 4))
        N[:2, :2] = np.outer(shape, shape)
        N[2:, 2:] = np.outer(shape, shape)
        mass[np.ix_(elementDof, elementDof)] += rho * A * N *
gauss_weights_bending[q] * detJacobian

    gauss_location_shear = 0.0
    gauss_weight_shear = 2.0

    for e in range(numberElements):
        indices = elementNodes[e, :]
        elementDof = np.concatenate([indices, indices + numberNodes])
        length_element = xx[indices[1]] - xx[indices[0]]
        detJacobian = length_element / 2

```

```

pt = gauss_location_shear
shape, naturalDerivatives = shape_function_L2(pt)
Xderivatives = naturalDerivatives * invJacobian

B = np.zeros((2, 4))
B[1, :2] = Xderivatives
B[1, 2:] = shape

stiffness[np.ix_(elementDof, elementDof)] += B.T @ (C[1, 1] * B)
* gauss_weight_shear * detJacobian

return stiffness, force, mass

def shape_function_L2(xi):
    shape = np.array([(1 - xi) / 2, (1 + xi) / 2])
    naturalDerivatives = np.array([-0.5, 0.5])
    return shape, naturalDerivatives

def solution(GDof, prescribedDof, stiffness, force):
    activeDof = np.setdiff1d(np.arange(GDof), prescribedDof)

    K_active = stiffness[np.ix_(activeDof, activeDof)]
    F_active = force[activeDof]

    U_active = np.linalg.solve(K_active, F_active)
    displacements = np.zeros(GDof)
    displacements[activeDof] = U_active

    return displacements

def solution_modal(prescribedDof, K, M, num_modes):
    activeDof = np.setdiff1d(np.arange(len(K)), prescribedDof)

    K_active = K[np.ix_(activeDof, activeDof)]
    M_active = M[np.ix_(activeDof, activeDof)]

    eigvals, eigvecs = eigh(K_active, M_active, subset_by_index=[0,
num_modes-1])

    eigvals = np.sqrt(np.real(eigvals))
    eigvecs_full = np.zeros((len(K), num_modes))
    eigvecs_full[activeDof, :] = eigvecs[:, :num_modes]

    return eigvals[:num_modes], eigvecs_full

def output_displacements_reactions(displacements, stiffness, GDof,
prescribedDof):
    print("Displacements:")
    for i in range(GDof):
        print(f"{i + 1}: {displacements[i]}")

F = stiffness @ displacements

```

```

reactions = F[prescribedDof]
print("Reactions:")
for i, r in zip(prescribedDof, reactions):
    print(f"{i + 1}: {r}")
def plot_displacements(nodeCoordinates, displacements):
    plt.figure()
    plt.plot(nodeCoordinates, displacements)
    plt.xlabel('Node')
    plt.ylabel('Displacement')
    plt.title('Displacement of nodes')
    plt.grid(True)
    plt.show()

def plot_forces(nodeCoordinates, forces):
    plt.figure()
    plt.plot(nodeCoordinates, forces)
    plt.xlabel('Node')
    plt.ylabel('Force')
    plt.title('Forces at nodes')
    plt.grid(True)
    plt.show()

def plot_mode_shapes(nodeCoordinates, mode_shapes, num_modes):
    plt.figure()
    for i in range(num_modes):
        plt.subplot(num_modes, 1, i + 1)
        plt.plot(nodeCoordinates, mode_shapes[:, i])
        plt.grid(True)
        plt.ylabel(f'Mode {i + 1}')
    plt.xlabel('Node')
    plt.suptitle('Mode Shapes')
    plt.show()

def get_boundary_conditions(boundary_type, numberNodes):
    if boundary_type == 'c-c':
        fixedNodeW = [0, numberNodes - 1]
        fixedNodeTX = fixedNodeW
    elif boundary_type == 'c-s':
        fixedNodeW = [0]
        fixedNodeTX = [0, numberNodes - 1]
    elif boundary_type == 's-s':
        fixedNodeW = [0, numberNodes - 1]
        fixedNodeTX = []
    elif boundary_type == 'c-f':
        fixedNodeW = [0]
        fixedNodeTX = [0]
    else:
        raise ValueError("Invalid boundary condition type")
    prescribedDof = fixedNodeW + [node + numberNodes for node in
fixedNodeTX]
    return prescribedDof

```

```

# Constants
E = 2.11e11
poisson = 0.30
rho = 7850
L = 1
b = 1
h = 0.1
I = b * h**3 / 12
kapa = 5 / 6
A = b * h
P = -1 # Uniform pressure
G = E / (2 * (1 + poisson))
# Constitutive matrix
C = np.array([[E * I, 0], [0, kapa * h * G]])
# Mesh
numberElements = 100
nodeCoordinates = np.linspace(0, L, numberElements + 1)
elementNodes = np.vstack([np.arange(numberElements), np.arange(1,
numberElements + 1)]).T

# Generation of coordinates and connectivities
numberNodes = len(nodeCoordinates)
GDof = 2 * numberNodes

# Compute stiffness matrix and force vector
stiffness, force, mass = form_stiffness_mass_timoshenko_beam(GDof,
numberElements, elementNodes, numberNodes, nodeCoordinates, C, P, rho, I,
h)

# Choose boundary conditions
boundary_type = 'c-c' # Change this to 'c-c', 'c-s', 's-s', or 'c-f' for
different boundary conditions
prescribedDof = get_boundary_conditions(boundary_type, numberNodes)

# Solution for static analysis
displacements = solution(GDof, prescribedDof, stiffness, force)

# Output displacements/reactions
output_displacements_reactions(displacements, stiffness, GDof,
prescribedDof)

# Max displacement
U = displacements[:numberNodes]
max_displacement = np.min(U)
print(f"Max displacement: {max_displacement}")
# Plot displacements
plot_displacements(nodeCoordinates, displacements[:numberNodes])
# Plot forces
F = stiffness @ displacements
plot_forces(nodeCoordinates, F[:numberNodes])
# Normal modes analysis
num_modes = 8

```

```
eigenvalues, mode_shapes = solution_modal(prescribedDof, stiffness, mass,
num_modes)
# Print natural frequencies
frequencies = eigenvalues / (2 * np.pi)
print("Natural frequencies (Hz):")
print(frequencies)
# Plot mode shapes
plot_mode_shapes(nodeCoordinates, mode_shapes[:numberNodes, :],
num_modes)
```

جدول پ - ۲ کد فانکشن Newmark مسئله المان محدود برای پاسخ گذرا تیر تیموشنسکو.

```
import numpy as np

def newmark(M, Cs, K, f, X0, Xd0, dt, Tf, alpha, beta):
    T = np.arange(0, Tf + dt, dt)
    a0 = 1 / (beta * (dt ** 2))
    a1 = alpha / (beta * dt)
    a2 = 1 / (beta * dt)
    a3 = 1 / (2 * beta) - 1
    a4 = alpha / beta - 1
    a5 = 0.5 * dt * (alpha / beta - 2)

    p = M.shape[0]
    lt = len(T)

    F = np.zeros((p, lt))
    X = np.zeros((p, lt))
    Xd = np.zeros((p, lt))
    Xdd = np.zeros((p, lt))

    F[:, 0] = f(0)
    X[:, 0] = X0
    Xd[:, 0] = Xd0
    Xdd[:, 0] = np.linalg.solve(M, F[:, 0] - Cs @ Xd[:, 0] - K @ X[:, 0])

    Ks = K + a0 * M + a1 * Cs

    for i in range(lt - 1):
        F[:, i + 1] = f(T[i + 1])
        Fs = F[:, i + 1] + M @ (a0 * X[:, i] + a2 * Xd[:, i] + a3 *
Xdd[:, i]) +
            Cs @ (a1 * X[:, i] + a4 * Xd[:, i] + a5 * Xdd[:, i])
        X[:, i + 1] = np.linalg.solve(Ks, Fs)
        Xd[:, i + 1] = a1 * (X[:, i + 1] - X[:, i]) - a4 * Xd[:, i] - a5 *
Xdd[:, i]
        Xdd[:, i + 1] = a0 * (X[:, i + 1] - X[:, i]) - a2 * Xd[:, i] - a3 *
Xdd[:, i]
    return T, X
```

جدول پ - ۳ کد حل ارتعاشات تیر تیموشنکو به روش GDQ (برای صحت‌سنجی) با استفاده از کد پایتون نوشته شده.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.linalg import eig

def DQM(a, b, N):
    i = np.arange(1, N + 1)
    x = a + 0.5 * (b - a) * (1 - np.cos((i - 1) * np.pi / (N - 1))) # Chebyshev-Gauss-Lobatto distribution
    R = np.tile(x, (N, 1))
    Q = R - R.T
    P = Q + np.eye(N)
    A = np.zeros((N, N))
    for i in range(N):
        for j in range(N):
            if i != j:
                A[i, j] = np.prod(P[i, :]) / np.prod(P[j, :]) / (x[i] - x[j])
            else:
                A[i, j] = np.sum(1.0 / P[i, :]) - 1.0
    return x, A

def vibration_Timoshenko(v, y, BC, N, nf, mode):
    alpha = 2 * (1.2 + v)
    zeta, A = DQM(0, 1, N)
    B = np.dot(A, A)
    I = np.eye(N)
    Z = np.zeros((N, N))

    k11 = B
    k12 = -A
    m11 = -alpha * (y ** 2) / 12 * I
    m12 = Z

    k21 = A
    k22 = alpha * (y ** 2) / 12 * B - I
    m21 = Z
    m22 = -alpha * (y ** 4) / 144 * I

    K = np.block([[k11, k12], [k21, k22]])
    M = np.block([[m11, m12], [m21, m22]])

    if BC[0] == 'c':
        T1 = np.hstack([I[0, :], Z[0, :]])

```

```

T2 = np.hstack([Z[0, :], I[0, :]])
elif BC[0] == 's':
    T1 = np.hstack([I[0, :], Z[0, :]])
    T2 = np.hstack([Z[0, :], A[0, :]])
else: # free
    T1 = np.hstack([Z[0, :], A[0, :]])
    T2 = np.hstack([A[0, :], -I[0, :]])

if BC[1] == 'c':
    T3 = np.hstack([I[-1, :], Z[-1, :]])
    T4 = np.hstack([Z[-1, :], I[-1, :]])
elif BC[1] == 's':
    T3 = np.hstack([I[-1, :], Z[-1, :]])
    T4 = np.hstack([Z[-1, :], A[-1, :]])
else: # free
    T3 = np.hstack([Z[-1, :], A[-1, :]])
    T4 = np.hstack([A[-1, :], -I[-1, :]])

T = np.vstack([T1, T2, T3, T4])

b = np.array([0, N - 1, N, 2 * N - 1])
d = np.setdiff1d(np.arange(2 * N), b)

K = np.delete(K, b, axis=0)
Kb = K[:, b]
Kd = K[:, d]

M = np.delete(M, b, axis=0)
Mb = M[:, b]
Md = M[:, d]

Tb = T[:, b]
Td = T[:, d]

p = -np.linalg.inv(Tb).dot(Td)

Ks = Kd + Kb.dot(p)
Ms = Md + Mb.dot(p)

_, Lm4 = eig(Ks, Ms)
Lm4 = np.diag(Lm4)

Lm = np.power(Lm4, 0.25)

e = np.imag(Lm) != 0

```

```

Lm = Lm[~e]

e = Lm < 0
Lm = Lm[~e]

Lm = np.sort(Lm)
Lm = Lm[:nf]

return Lm

def main():
    v = 0.3
    y = 0.2
    BC = ['cc', 'cs', 'ss', 'cf']
    lbc = len(BC)
    N = 50
    nf = 15
    mode = 0
    Lm = np.zeros((nf, lbc))

    for i in range(lbc):
        Lm[:, i] = vibration_Timoshenko(v, y, BC[i], N, nf, mode)

    print(' cc')
    print(Lm[:, 0])
    print('ss ')
    print(Lm[:, 2])
    print('CF ')
    print(Lm[:, 3])
if __name__ == "__main__":
    main()

```

جدول ب - ۴ کد حل ارتعاشات تیر تیموشنکو به روش FEM با استفاده از کد پایتون نوشته شده.

```

import numpy as np
import scipy.linalg
import matplotlib.pyplot as plt

def main():
    ccc1 = ["#c1272d", "#0000a7", "#eecc16", "#008176", "b3b3b3"]

    E = 10e7
    nu = 0.30
    rho = 1

    L = 1

```

```

b = 1
h = 0.001
I = b * h**3 / 12
kapa = 5 / 6
A = b * h

G = E / 2 / (1 + nu)
C = np.array([[E * I, 0], [0, kapa * h * G]])

N_elements_range = range(5, 102)
N_modes = 5

D = np.zeros((len(N_elements_range), N_modes, 3))

for j, N_nodes in enumerate(N_elements_range):
    x_col = np.linspace(0, L, N_nodes)
    N_elements = N_nodes - 1
    elementNodes = np.vstack((np.arange(1, N_nodes), np.arange(2,
N_nodes + 1))).T

    P = -1
    GDof = 2 * N_nodes

    K_Assembly, F_equiv, M_Assembly =
formStiffnessMassTimoshenkoBeam(GDof, elementNodes, x_col, C, P, rho, I,
h)

    prescribedDof = [
        np.array([0, N_nodes - 1, N_nodes, 2 * N_nodes - 1]),
        np.array([0, N_nodes - 1]),
        np.array([0, N_nodes])
    ]

    for ii in range(len(prescribedDof)):
        D_vec = np.zeros(GDof)
        D_vec[prescribedDof[ii]] = 0
        F_vec = np.zeros(GDof)

        D_vec, F_vec = solution(prescribedDof[ii], K_Assembly, D_vec,
F_vec, F_equiv)
        print("Max displacement")
        print(np.min(D_vec[:N_nodes]))

        D_modeShapes, w_n = solutionModal(prescribedDof[ii],
D_vec[prescribedDof[ii]], K_Assembly, M_Assembly, N_modes)
        D1 = w_n * L * L * np.sqrt(rho * A / (E * I))
        D[j, :, ii] = np.sort(D1)

plt.figure()
plt.plot(N_elements_range, D[:, 0, 0], '-o', markevery=10,
color=ccc1[0], linewidth=1.2, label='Clamped-Clamped')

```

```

plt.plot(N_elements_range, D[:, 0, 1], '-.v', markevery=10,
color=ccc1[2], linewidth=1.2, label='Simply supported-Simply supported')
plt.plot(N_elements_range, D[:, 0, 2], '--s', markevery=10,
color=ccc1[3], linewidth=1.2, label='Clamped-Free')
plt.legend(loc='best')
plt.grid(which='minor')
plt.grid(which='major')
plt.box(on=True)
plt.xlabel('Number of Nodes')
plt.ylabel('Frequency, [-]')
plt.title('Frequency Convergence')
plt.xlim([0, 100])
plt.show()

def formStiffnessMassTimoshenkoBeam(GDof, elementNodes, x_col, C, P, rho,
I, h):
    N_elements = elementNodes.shape[0]
    N_Nodes = len(x_col)

    K_Assembly = np.zeros((GDof, GDof))
    M_Assembly = np.zeros((GDof, GDof))
    F_equiv_local = np.zeros(GDof)

    gaussLocations = np.array([0.577350269189626, -0.577350269189626])
    gaussWeights = np.ones(2)

    for iElement in range(N_elements):
        i_nodes = elementNodes[iElement] - 1
        elementDof = np.hstack([i_nodes, i_nodes + N_Nodes])
        indiceMass = i_nodes + N_Nodes
        ndof = len(i_nodes)
        Le = x_col[i_nodes[1]] - x_col[i_nodes[0]]
        detJacobian = Le / 2
        invJacobian = 1 / detJacobian
        for q in range(len(gaussWeights)):
            pt = gaussLocations[q]
            shape, naturalDerivatives = shapeFunctionL2(pt)
            Xderivatives = naturalDerivatives * invJacobian

            B = np.zeros((2, 2 * ndof))
            B[0, ndof:2 * ndof] = Xderivatives

            K_Assembly[np.ix_(elementDof, elementDof)] += B.T @ B *
gaussWeights[q] * detJacobian * C[0, 0]
            F_equiv_local[i_nodes] += shape * P * detJacobian *
gaussWeights[q]

            M_Assembly[np.ix_(indiceMass, indiceMass)] += shape[:, np.newaxis] @ shape[np.newaxis, :] * gaussWeights[q] * I * rho *
detJacobian
            M_Assembly[np.ix_(i_nodes, i_nodes)] += shape[:, np.newaxis] @ shape[np.newaxis, :] * gaussWeights[q] * h * rho * detJacobian

```

```

gaussLocations = np.array([0.0])
gaussWeights = np.array([2.0])
for iElement in range(N_elements):
    i_nodes = elementNodes[iElement] - 1
    elementDof = np.hstack([i_nodes, i_nodes + N_Nodes])
    ndof = len(i_nodes)
    Le = x_col[i_nodes[1]] - x_col[i_nodes[0]]
    detJacobian = Le / 2
    invJacobian = 1 / detJacobian
    for q in range(len(gaussWeights)):
        pt = gaussLocations[q]
        shape, naturalDerivatives = shapeFunctionL2(pt)
        Xderivatives = naturalDerivatives * invJacobian

        B = np.zeros((2, 2 * ndof))
        B[1, :ndof] = Xderivatives
        B[1, ndof:2 * ndof] = shape

        K_Assembly[np.ix_(elementDof, elementDof)] += B.T @ B *
        gaussWeights[q] * detJacobian * C[1, 1]

    return K_Assembly, F_equiv_local, M_Assembly

def shapeFunctionL2(xi):
    shape = np.array([(1 - xi) / 2, (1 + xi) / 2])
    naturalDerivatives = np.array([-1, 1]) / 2
    return shape, naturalDerivatives

def solution(prescribedDof, K_assembly, D_vec, F_vec, F_eq_vec=None):
    if F_eq_vec is None:
        F_eq_vec = np.zeros_like(F_vec)

    GDof = len(D_vec)
    freeDof = np.setdiff1d(np.arange(GDof), prescribedDof)

    D_vec[freeDof] = np.linalg.solve(K_assembly[np.ix_(freeDof,
    freeDof)], F_vec[freeDof] + F_eq_vec[freeDof])

    nonZeroDof = np.union1d(freeDof, np.array([d for d in prescribedDof
    if D_vec[d] != 0], dtype=int))

    F_vec[prescribedDof] = K_assembly[np.ix_(prescribedDof, nonZeroDof)] *
    @ D_vec[nonZeroDof] - F_eq_vec[prescribedDof]
    return D_vec, F_vec

def solutionModal(prescribedDofs, D_prescribed, K_assembly, M_assembly,
N_modes):
    GDof = K_assembly.shape[0]
    freeDof = np.setdiff1d(np.arange(GDof), prescribedDofs)

    D_modeShape_cols = np.zeros((GDof, N_modes))

```

```

D_modeShape_cols[prescribedDofs, :] = D_prescribed[:, np.newaxis]

eigvals, eigvecs = scipy.linalg.eigh(K_assembly[np.ix_(freeDof,
freeDof)], M_assembly[np.ix_(freeDof, freeDof)])
w_n_vec = np.sqrt(eigvals[:N_modes])
D_modeShape_cols[freeDof, :] = eigvecs[:, :N_modes]

return D_modeShape_cols, w_n_vec

if __name__ == "__main__":
    main()

```

