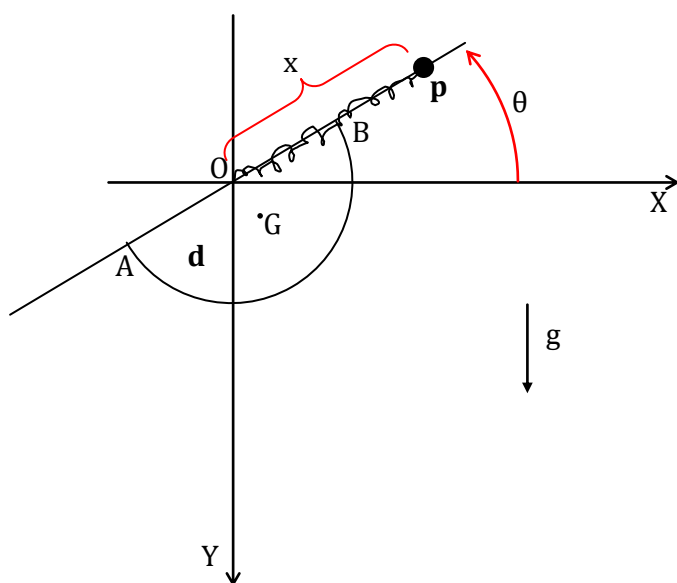


RELAZIONE

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

È stato sviluppato il programma per lo studio della dinamica del sistema a due corpi qui descritto:



In un piano verticale è posto un semidisco **d** omogeneo pesante di massa m_d . Tale semidisco è ottenuto da un disco di centro O e raggio r tagliato lungo un diametro AB , è indicato con G il baricentro del semidisco. Il punto O è fisso ed il semidisco può ruotare senza attrito attorno ad O . Solidalmente ad AB è posta una guida liscia di massa trascurabile. Lungo tale guida si muove senza attrito un punto pesante **p** di massa m_p , soggetto oltre alla forza peso e alla reazione vincolare alla forza elastica $F = -k(Op)$ con $k > 0$.

$$\text{Si ha } \overline{OG} = \frac{4r}{3\pi} \text{ e } I_O = \frac{m_d r^2}{2}$$

Indicando con K l'energia cinetica e con U l'energia potenziale si ha:

$$K_p = \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_p x^2 \dot{\theta}^2 \quad K_d = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 \quad U_p = \frac{1}{2} k x^2 + m_p g x \sin(\theta) \quad U_d = -\overline{OG} m_d g \sin(\theta)$$

Da cui la Lagrangiana del sistema:

$$L = \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_p x^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_d r^2}{4} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - m_p g x \sin(\theta) + \frac{4r}{3\pi} m_d g \sin(\theta)$$

Da cui si ottengono le equazioni del moto:

$$\ddot{x} = x \dot{\theta}^2 - \frac{k}{m_p} x - g \sin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} = - \frac{4m_p x \dot{x} \dot{\theta} + 2m_p g x \cos(\theta) + m_d g \frac{8r}{3\pi} \sin(\theta)}{2m_p x^2 + m_d r^2}$$

Che andranno a costituire il sistema di equazioni differenziali che saranno integrate numericamente attraverso il programma.

Le coordinate dei punti di equilibrio stabile dipendono dalla grandezza $\lambda = \frac{4m_d r k}{3\pi m_p^2 g}$ in particolare se questa è maggiore di 1 il punto di equilibrio stabile si troverà in $x=0, \theta=0$; altrimenti le coordinate del punto di equilibrio si troveranno in $x = -\frac{m_p g}{k} \sqrt{1 - \lambda^2}, \theta = \cos^{-1}(\lambda)$.

Si osservi che la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo e dunque che l'energia totale del sistema è una costante del moto.

DESCRIZIONE DEL PROGRAMMA

Il programma integra il sistema di equazioni differenziali sopra descritto.

Crea un file dove per ogni istante di tempo sono riportate le coordinate lagrangiane x, θ , le coordinate cartesiane X, Y , le velocità v_x, v_θ , l'energia potenziale, cinetica e totale e l'errore sull'energia totale.

Inoltre cerca le posizioni di equilibrio stabili del sistema restituendo sul canale standard di output le coordinate x e θ (potrebbe essere maggiore di 2π) della posizione di equilibrio trovata.

ISTRUZIONI PER IL PROGRAMMA

Il programma chiede di scegliere le costanti del sistema attraverso il canale standard di input. È possibile scegliere due configurazioni preimpostate con $\lambda > 1$ o $\lambda \leq 1$, sceglierle a piacere o sceglierle in modo casuale fra 0 e 100.

In seguito è richiesto di specificare le condizioni iniziali desiderate, tale scelta dipende dalla precedente e sarà possibile nuovamente sceglierle a piacere, sceglierle in modo casuale fra 0 e 1000 con θ che varia invece fra 0 e 2π , o scegliere due particolari configurazioni con oscillazioni in fase o in controfase.

Viene chiesto infine di specificare il dt e il tempo totale di integrazione. Il programma stampa su file sempre lo stesso numero di punti (~ 10000) affinché il file di output sia di circa 1,5MB, in questo modo viene preservata la memoria e contenuto notevolmente il tempo di elaborazione (la scrittura su file è uno dei processi più lenti). Più il tempo di integrazione è lungo più è grande l'intervallo di tempo fra due punti consecutivi sul file.

I file di output sono nominati "anCOST%CI%.txt" dove al posto di % ci sono le lettere corrispondenti alla particolare scelta di costanti e condizioni iniziali.

CONSIDERAZIONI INIZIALI

L'algoritmo di integrazione utilizzato è Runge-Kutta di secondo ordine¹. Ci si aspetta dunque che l'errore commesso sulla quantità conservata E ad un determinato tempo t definito come $\frac{E(t)-E_0}{E_0}$ in funzione di dt sia di grado 2. E dunque una retta con coefficiente angolare 2 su carta doppio logaritmica.

Per Runge-Kutta di secondo ordine eseguito con variabili a 64 bit (double) di precisione $\sim 2^{-52}$ il passo d'integrazione dt che garantisce maggiore precisione è dato da $\left(\frac{2^{-52}}{k}\right)^{\frac{1}{k+1}} = \sim 0.000005$ dove k è l'ordine dell'algoritmo; tale valore viene ottenuto trovando il minimo, e dunque studiando la derivata, dell'errore totale di integrazione dato dal particolare algoritmo scelto e dalla precisione della macchina in funzione di dt .

¹Ho utilizzato Runge-Kutta di secondo ordine perché l'ho sbagliato nel secondo esonero, non ho tenuto sulla variabile d'appoggio la vecchia posizione e dunque ho calcolato l'accelerazione sulla nuova. Nel codice che utilizzo qui non c'è bisogno della variabile d'appoggio perché memorizzo direttamente la vecchia posizione più il mezzo passo e non solo il mezzo passo.

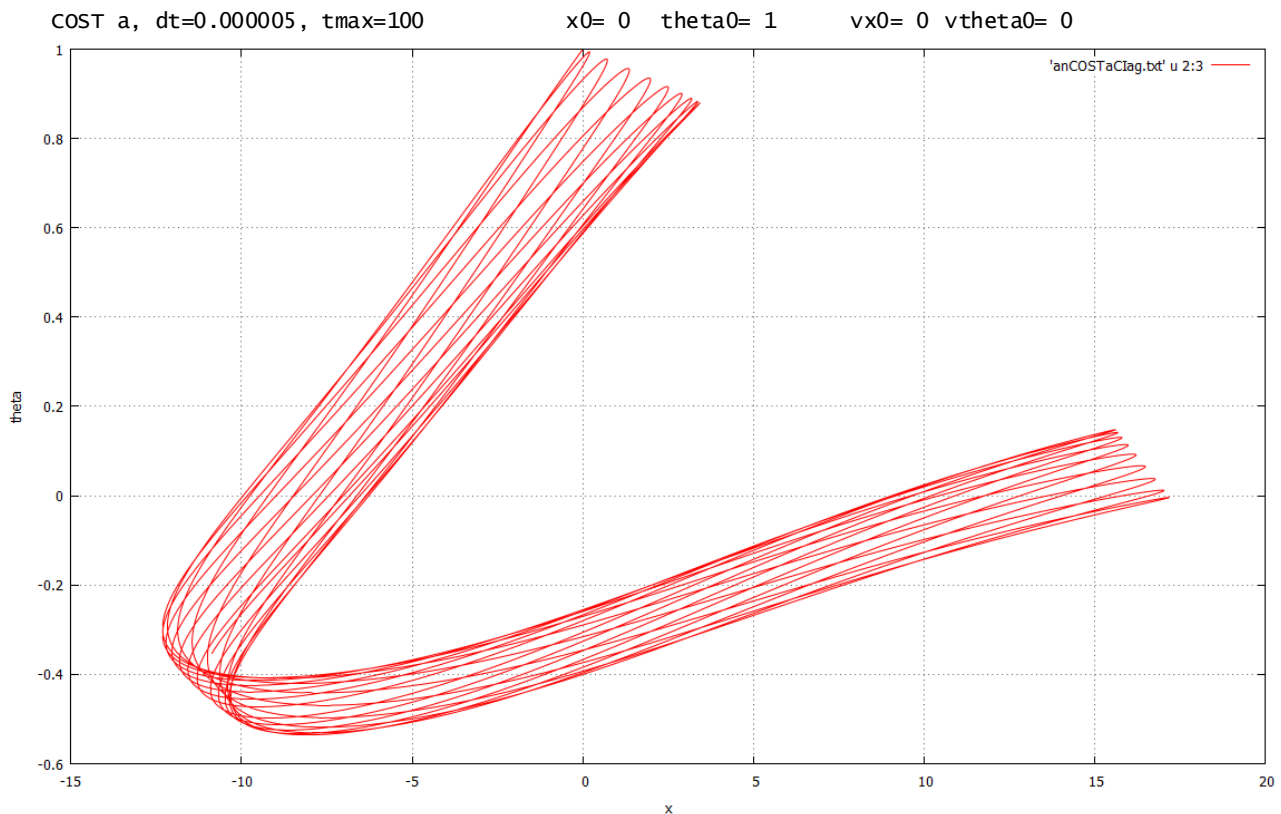
ALGORITMO PER LA RICERCA DEI PUNTI DI EQUILIBRIO STABILI

Uno dei problemi più interessanti per questo tipo di sistemi è la ricerca dei punti di equilibrio. Per sistemi a due corpi come quello qui analizzato è ancora conveniente trovare le coordinate dei punti di equilibrio attraverso metodi analitici, tuttavia per sistemi più complessi tale strada è del tutto impraticabile e l'unica via percorribile è l'approssimazione numerica mediante l'utilizzo di un calcolatore.

L'algoritmo sviluppato si fonda sui seguenti due principi:

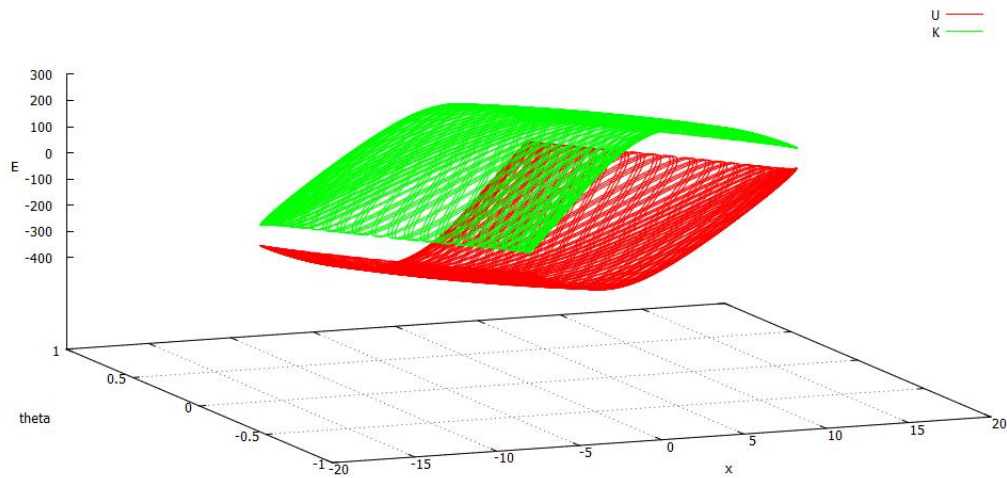
1. Condizione sufficiente affinché un punto sia di equilibrio stabile è che questo sia di minimo isolato dell'energia potenziale. (teorema di Dirichlet)
2. Quali che siano le condizioni iniziali, durante il moto il sistema attraversa punti con energia potenziale minore rispetto a quella iniziale.

Non è affatto detto che tali punti siano di equilibrio, il sistema potrebbe oscillare senza mai toccare le coordinate del punto di equilibrio stabile, come si vede nel grafico sottostante. (per questa scelta di costanti si ha il punto di eq. stabile in $x=0, \theta=0$)



Nel sistema considerato poiché l'energia totale si conserva, la ricerca di un minimo per l'energia potenziale equivale alla ricerca di un massimo per l'energia cinetica. È più vantaggioso cercare un massimo per l'energia cinetica perché questa non dipende da funzioni trigonometriche che si vogliono utilizzare il meno possibile, poiché essendo approssimate hanno una precisione limitata. (Ci si potrebbe chiedere se ha senso utilizzare tale accortezza, la risposta è sì: si possono ottenere approssimazioni con una precisione di oltre 10^{-308} che è anche la precisione del formato double)

Andamento dell'energia potenziale e cinetica per una particolare configurazione



Il programma integra le equazioni del moto una prima volta secondo i parametri settati dall'utente, salva su file i punti dell'integrazione con i relativi parametri salienti e cerca il punto di massimo dell'energia cinetica salvandone le coordinate.

Tali coordinate vengono utilizzate come condizioni iniziali per una successiva integrazione azzerando però le velocità lungo x e θ , il dt viene posto a 0.000005 e l'integrazione termina trovato il primo massimo dell'energia cinetica o se si è arrivati al tempo limite impostato a 5 (per avere un tempo macchina accettabile), in tal caso vengono salvate le coordinate dell'ultimo punto, se non si è trovato un massimo in precedenza l'ultimo punto è sicuramente quello con energia cinetica maggiore. Le nuove coordinate ottenute sono a loro volta utilizzate come condizioni iniziali per un'altra integrazione dello stesso tipo. Si effettuano in totale 20 integrazioni più quella iniziale.

La ricerca del massimo viene effettuata in tempo reale durante l'integrazione salvando il valore dell'energia cinetica dei due passi precedenti e confrontando il precedente con quello attuale e l'ultimo in memoria, se risulta maggiore di entrambi allora è un massimo.

LIMITI DELL'ALGORITMO UTILIZZATO

Si nota immediatamente un importante limite di tale algoritmo: l'approssimazione numerica dipende necessariamente dalle condizioni iniziali. In questo caso a variare è la precisione nell'approssimazione delle coordinate del punto di equilibrio stabile. Ancora peggiore sarebbe la situazione in un sistema dove esistano più punti di equilibrio stabile e si voglia cercare quello con energia potenziale minore, in tal caso un algoritmo di questo tipo rischia di rimanere intrappolato in minimi locali, diversi ogni volta a seconda delle condizioni iniziali.

Nel box di seguito sono riportati due diversi risultati con condizioni iniziali differenti ma con costanti uguali e dunque stesso punto di equilibrio $x=0$, $\theta=0$ (il secondo theta diviso per 2π fa circa 15).

x0= 0 theta0= 1 vx0= 0 vtheta0= 0

Punto di equilibrio stabile in (theta in rad):

[illegible]

```
x0= 842      theta0= 4      vx0= 571      vtheta0= 912
```

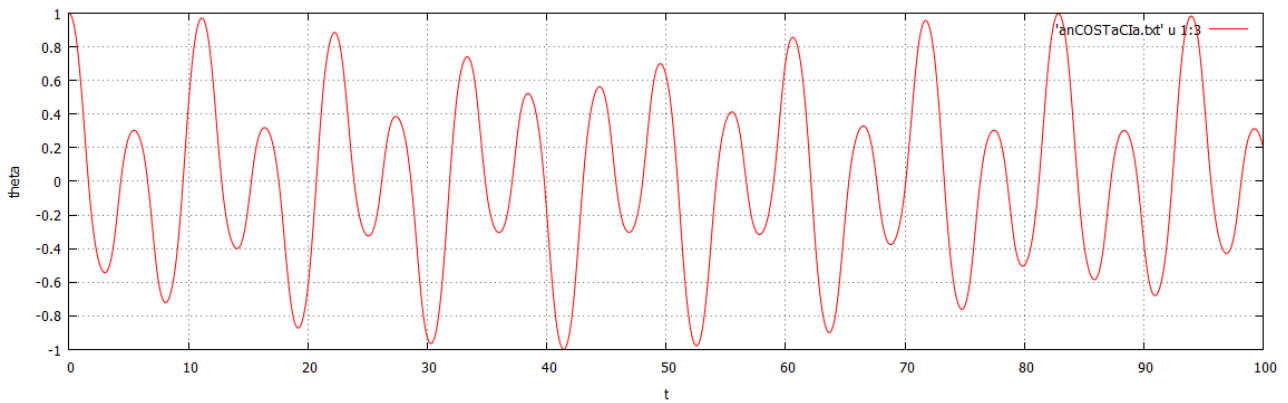
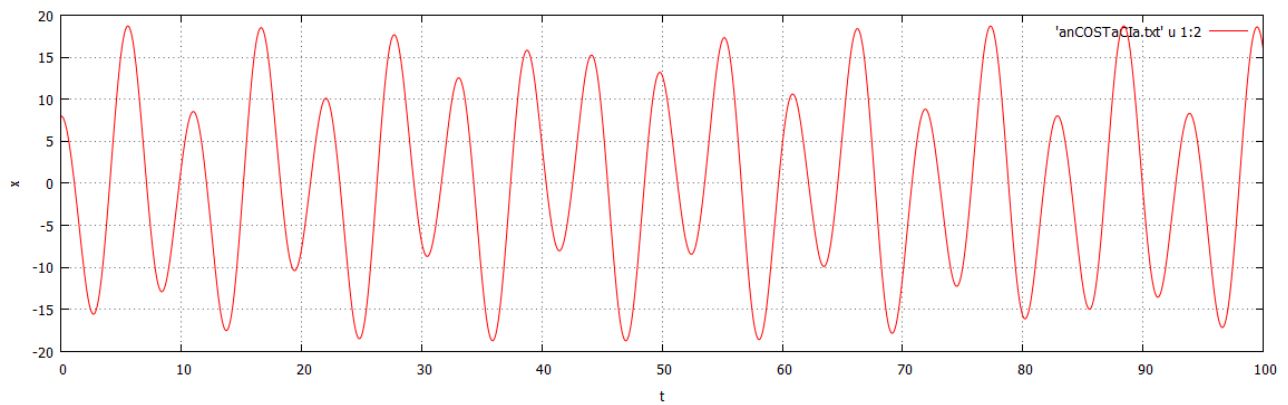
Punto di equilibrio stabile in (theta in rad):

[illegible]

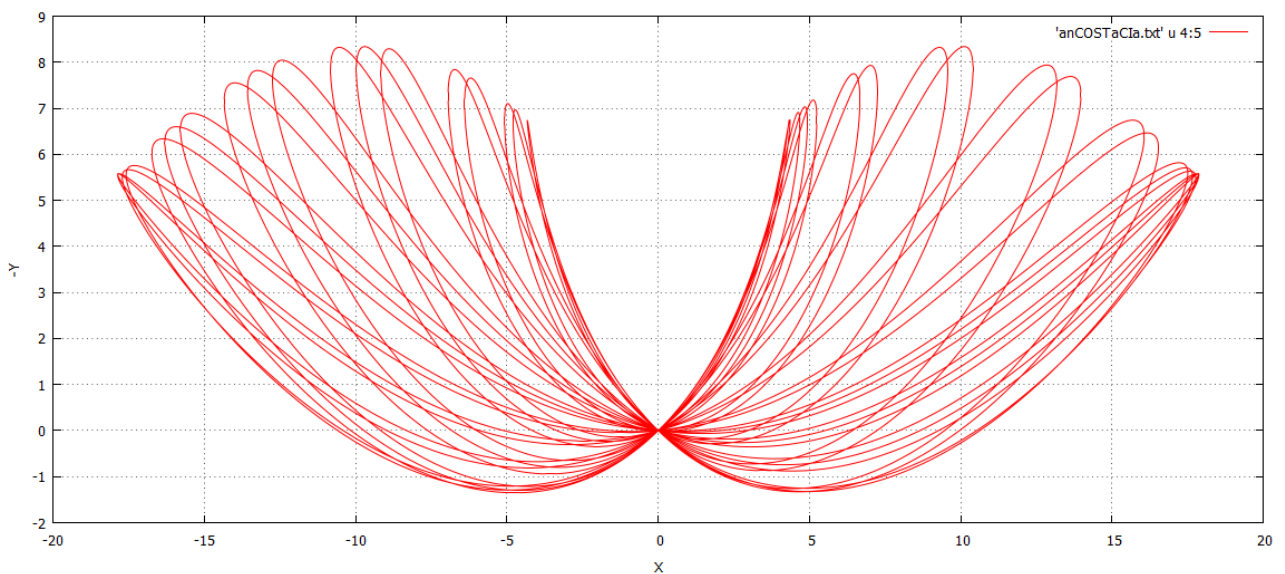
CONFIGURAZIONE A ($\lambda > 1$)

COST a, dt=0.000005, tmax=100

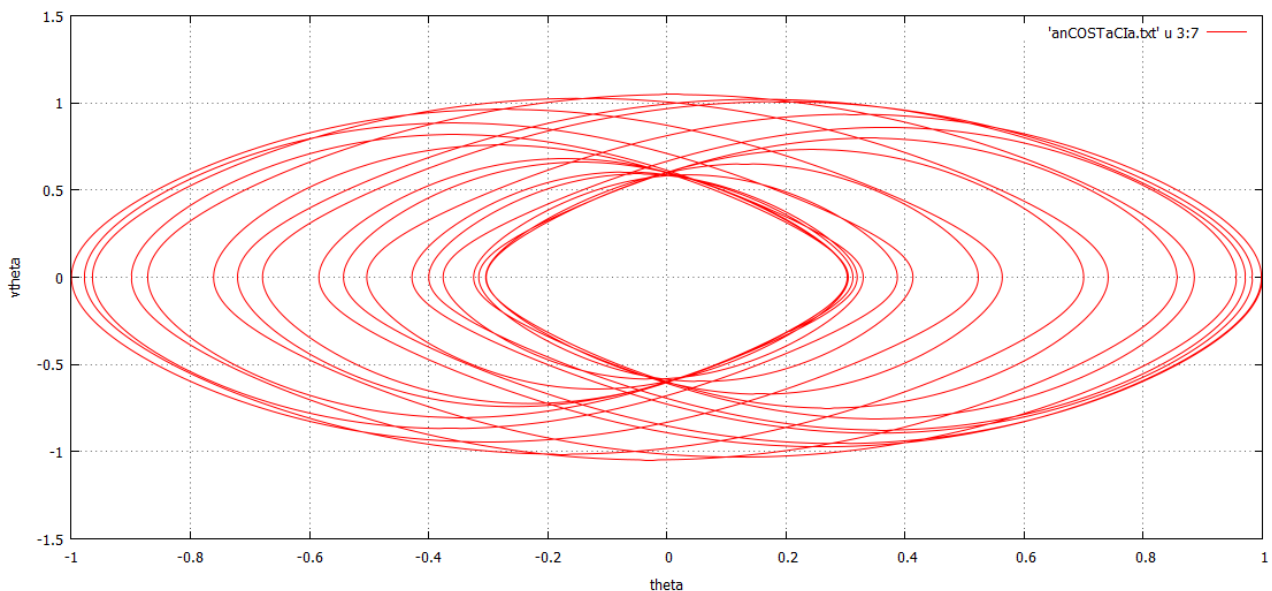
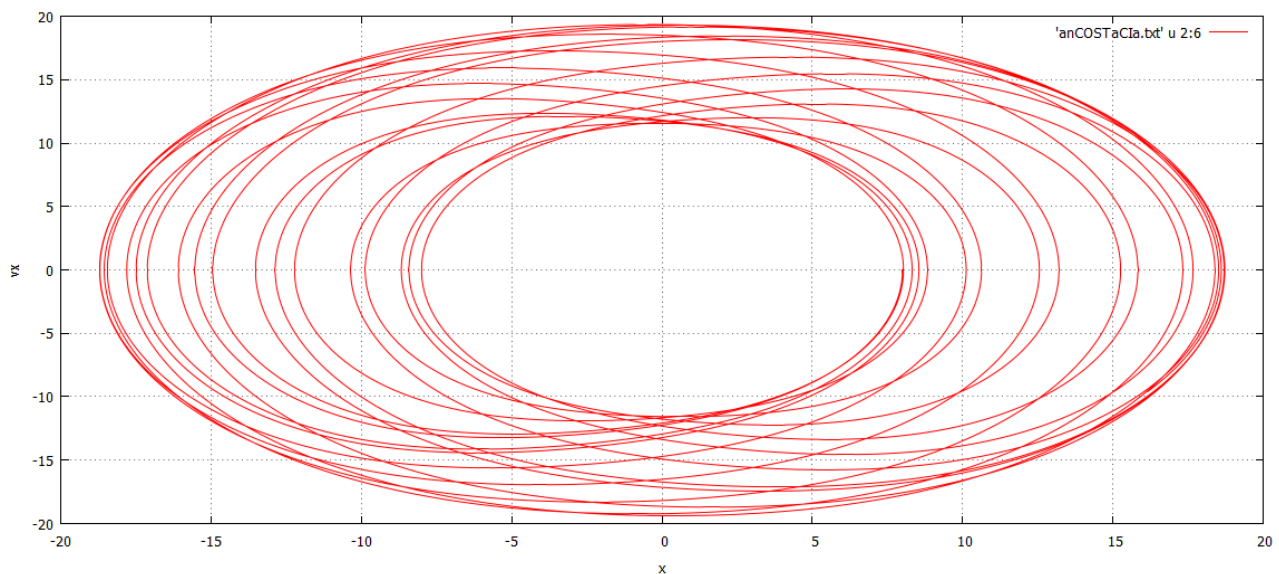
x0=8, theta0=1, vx0=0, vtheta0=0



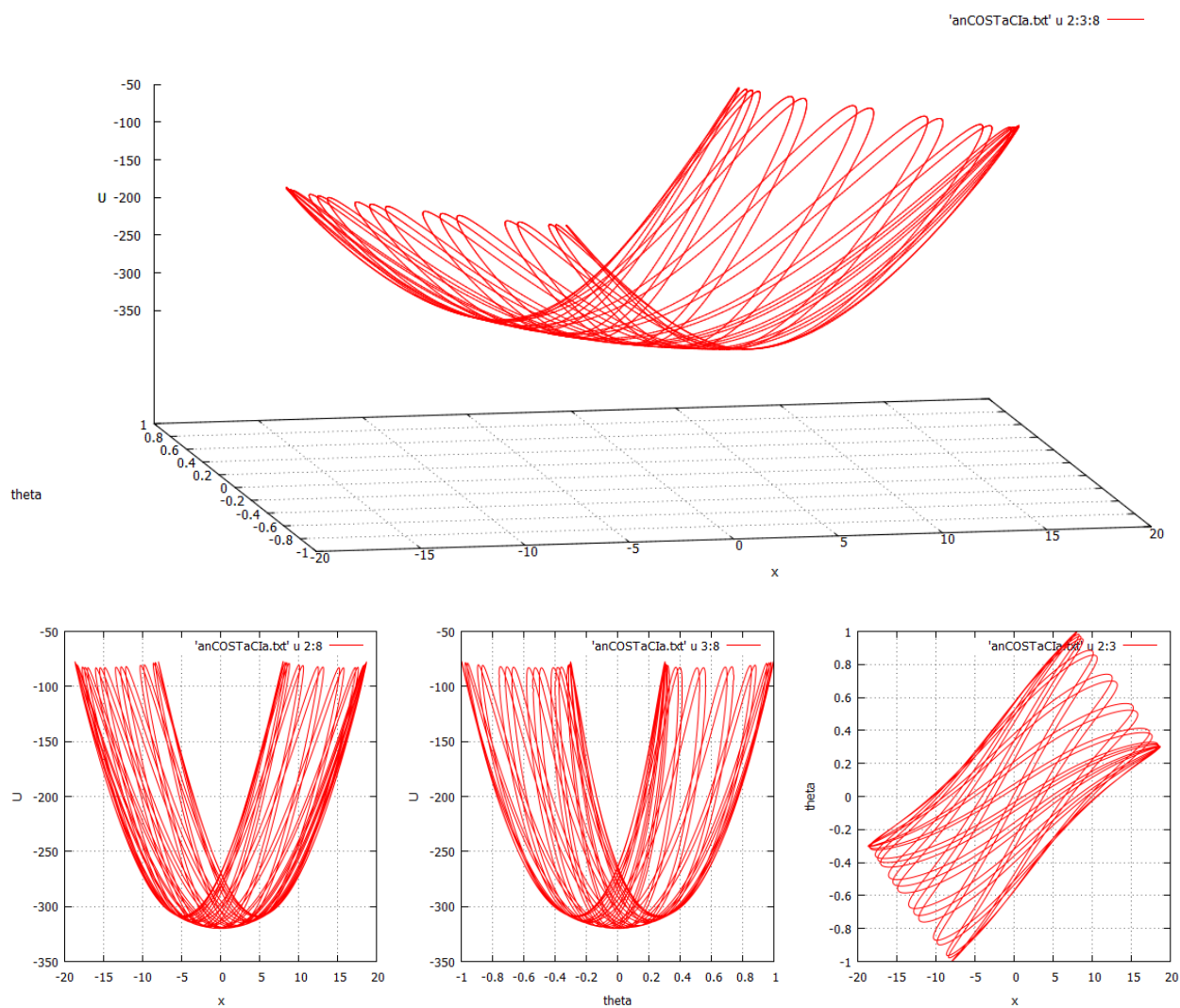
E' riportato l'andamento di x e θ al variare del tempo, il sistema è a due corpi e ben bilanciato, nessun parametro delle costanti domina sugli altri, si notano immediatamente le oscillazioni irregolari caratteristiche di un sistema a due corpi con due gradi di libertà.



Il grafico qui sopra rappresenta la traiettoria del punto p in coordinate cartesiane, per descrivere il moto si è orientato l'asse delle ordinate come g , dunque per semplicità e chiarezza qui sono riportate le coordinate X e $-Y$. La traiettoria evolve a destra e sinistra del punto fisso O nel quale in questo caso si trova anche il punto di equilibrio stabile. In ogni punto per ottenere la corrispondente x basta calcolare la distanza dall'origine, mentre θ corrisponde all'angolo fra la retta passante per il punto e l'origine e l'asse delle ascisse. Nell'origine si ricava l'angolo θ studiando la derivata della funzione in quel punto, è quindi necessario avere una qualche informazione sui punti successivi o precedenti, a differenza di tutti i punti diversi dall'origine.



È qui riportato l'andamento di x , v_x e di θ , v_θ . Si nota la caratteristica forma ad ellisse, al massimo in modulo della velocità corrisponde una posizione nulla e viceversa. Gli ellissi non sono vuoti, vengono attraversati anche punti interni. Ciò è dovuto al fatto che il sistema è a due gradi di libertà e dunque lo spazio delle fasi è a quattro dimensioni: a punti più esterni del primo grafico corrispondono punti più interni del secondo e viceversa, questo perché l'energia totale del sistema si conserva.



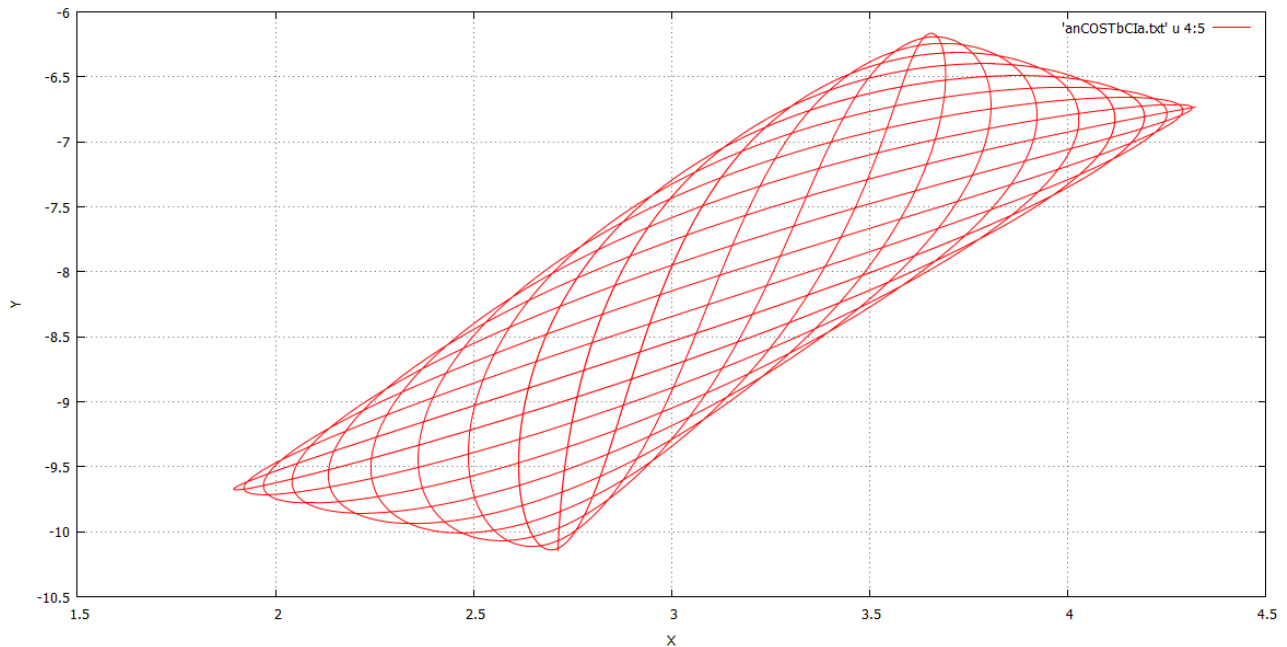
È riportato l'andamento dell'energia potenziale in funzione di x e θ con le relative proiezioni sui piani x, U ; θ, U e x, θ . Il grafico ottenuto è a forma di valle, si comprende immediatamente dove si trova il punto di equilibrio, si noti infatti che il profilo visto di taglio della valle non è piano, come si capisce bene dalle prime due proiezioni: il minimo assoluto dell'energia potenziale corrisponde al punto di coordinate $x=0, \theta=0$ che è il punto di equilibrio stabile per questa scelta di costanti.

CONFIGURAZIONE B ($\lambda < 1$)

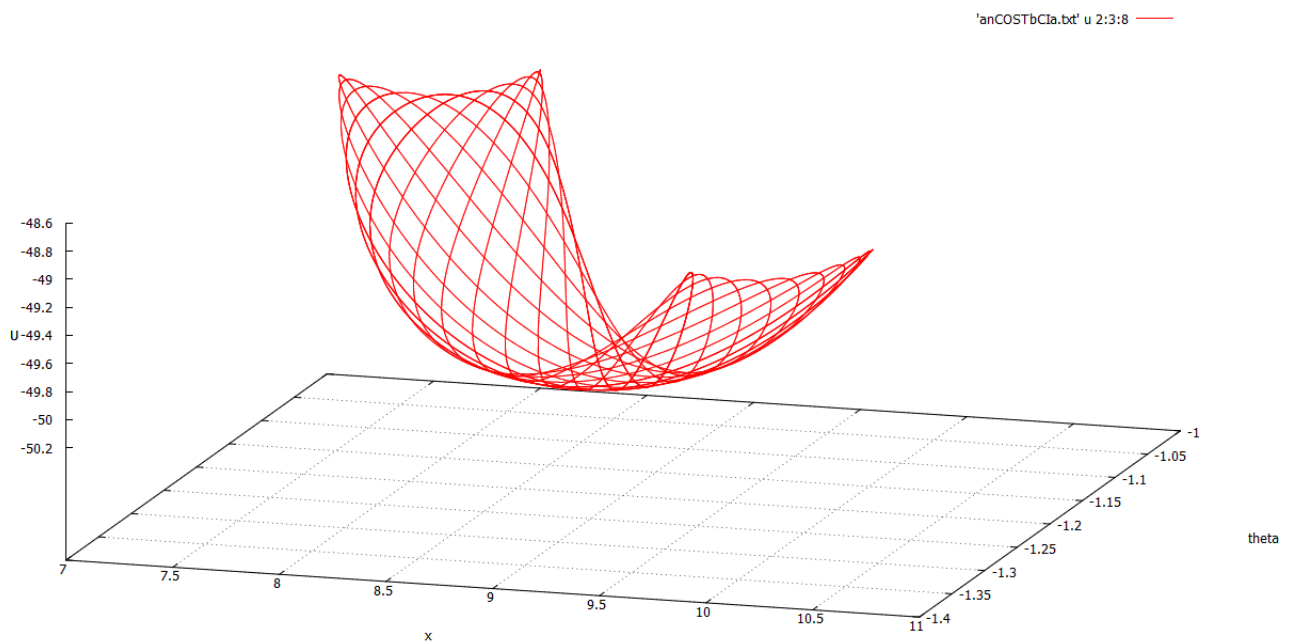
COST b, dt=0.000005, tmax=100

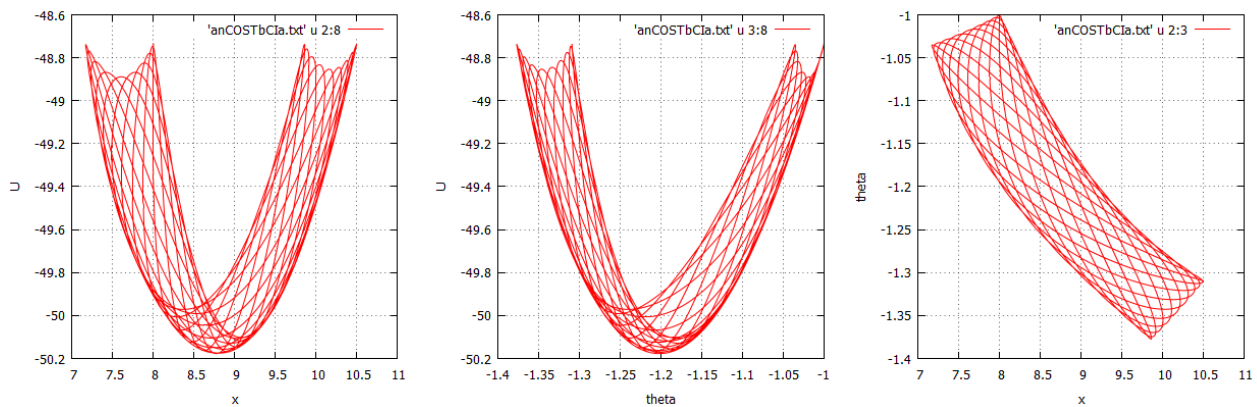
x0=8, theta0=-1, vx0=0, vtheta0=0

In questa configurazione si ha $\lambda < 1$ e dunque diverso punto di equilibrio stabile. Sono riportati solamente i grafici che portano a considerazioni diverse rispetto al punto precedente.



È riportato il grafico della traiettoria del punto p in coordinate cartesiane sugli assi X e -Y, è molto diverso da quello discusso nel punto precedente. Tutto il moto si svolge nel primo quadrante, il punto centrale del grafico che corrisponde al punto di equilibrio stabile del sistema non è più un punto fisso e dunque cambia completamente l'aspetto delle oscillazioni.



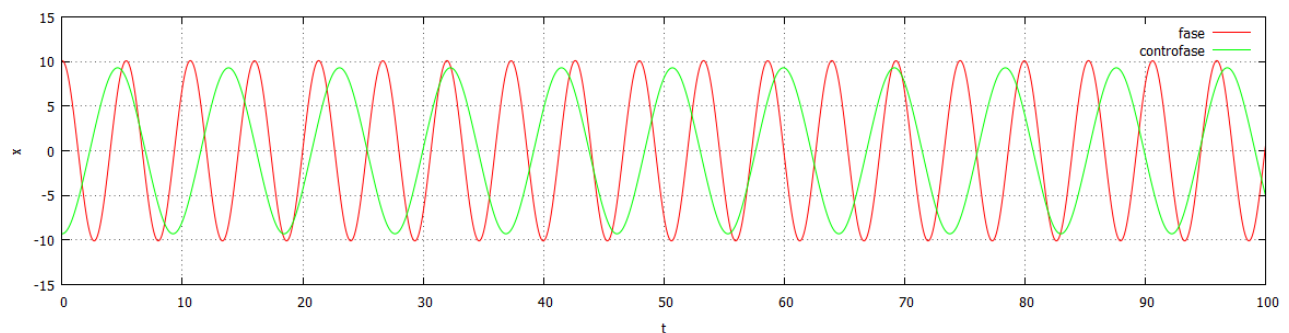


Per quanto riguarda l'andamento dell'energia potenziale in funzione di x e θ , la situazione è simile a quella discussa nel punto precedente. Da questo grafico si comprende immediatamente dove si trova il punto di equilibrio, si noti infatti che il profilo visto di taglio della valle non è piano, come si capisce bene dalle prime due proiezioni: il minimo assoluto dell'energia potenziale corrisponde al punto di coordinate $x \sim 8.79$, $\theta \sim -1.20$ che è il punto di equilibrio stabile per questa scelta di costanti.

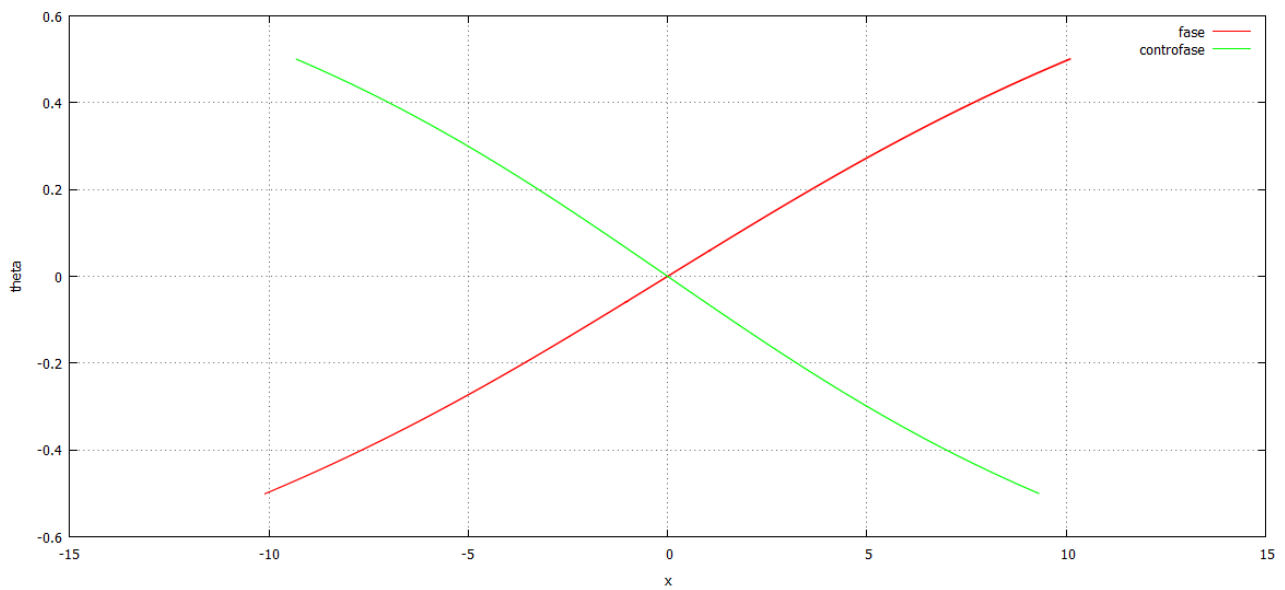
CONFIGURAZIONI C-D ($\lambda > 1$): OSCILLAZIONI IN FASE E CONTROFASE

1. COST a, $dt=0.000005$, $t_{max}=100$ $x_0=10.1$, $\theta_0=0.5$, $v_{x0}=0$, $v_{\theta_0}=0$
2. COST a, $dt=0.000005$, $t_{max}=100$ $x_0=-9.3$, $\theta_0=0.5$, $v_{x0}=0$, $v_{\theta_0}=0$

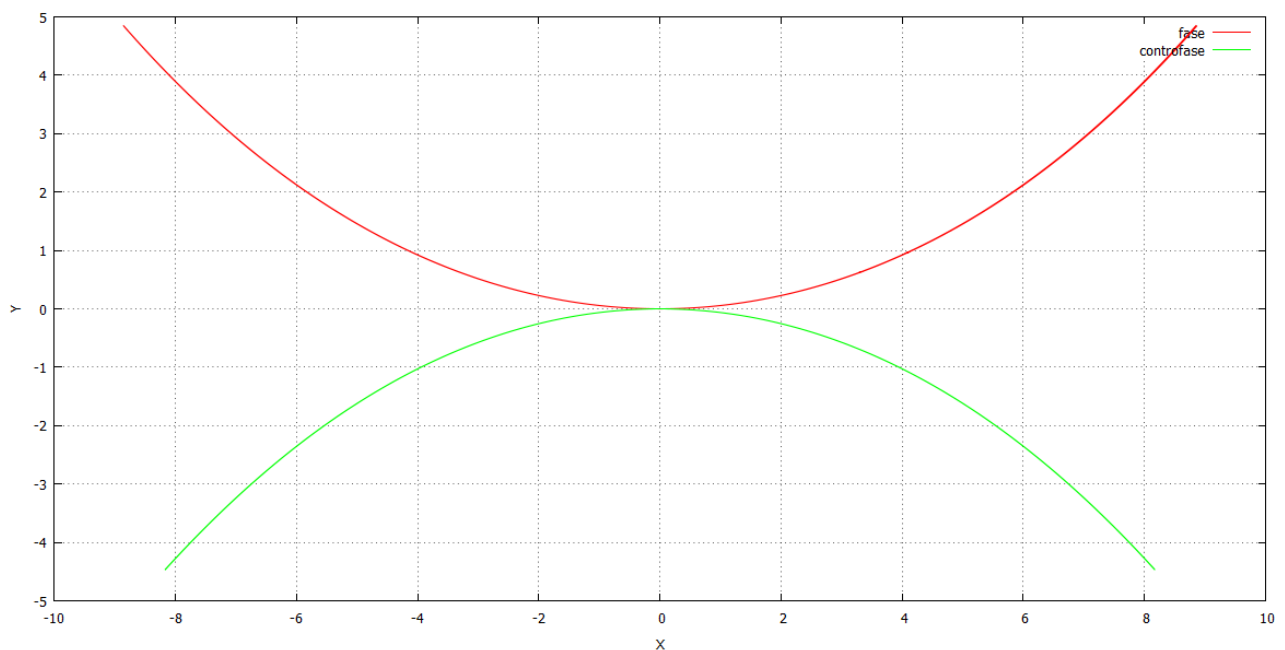
Per queste particolari scelte di condizioni iniziali si ottengono le oscillazioni della molla e quelle del pendolo fisico in fase o controfase e dunque con medesima frequenza.



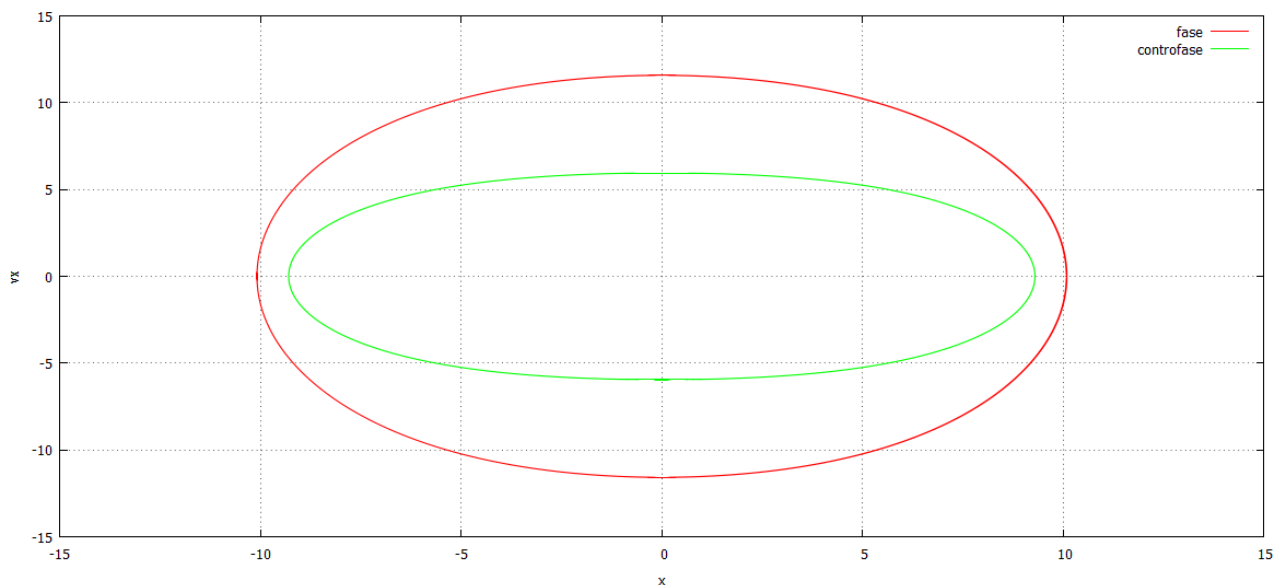
È riportato l'andamento di x al passare del tempo, andamento del tutto analogo a quello di θ che per motivi di sintesi viene ommesso. Le oscillazioni sono regolari in entrambi i casi e di fatto il sistema perde un grado di libertà, conoscendo x si è perfettamente in grado di determinare θ . Ciò si evince dall'andamento che è quello caratteristico di un oscillatore singolo. Si nota che la frequenza della configurazione in fase è maggiore di quella in controfase: nei punti di massimo di x si ha massimo anche in θ e la forza peso del punto e del semidisco si addiziona, nell'altro caso si sottrae aumentando il periodo e dunque diminuendo la frequenza.



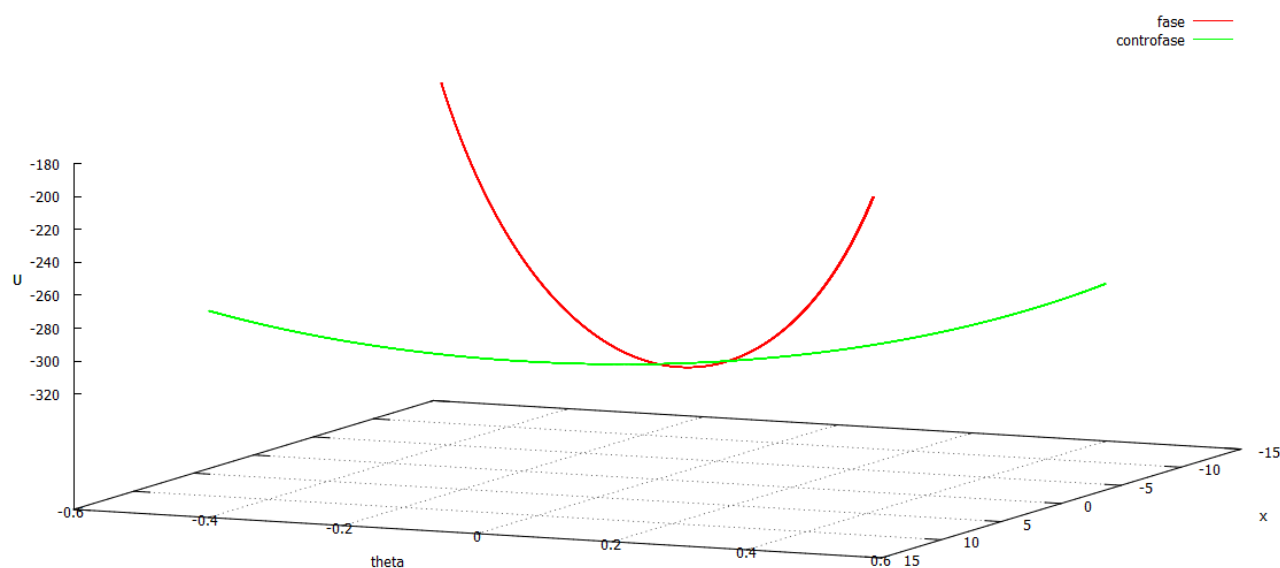
È qui riportato l'andamento di θ in funzione di x , si capisce immediatamente che il sistema ha perso un grado di libertà infatti esiste una $\theta = f(x)$ che è qui rappresentata nel caso di oscillazioni in fase e controfase, si nota inoltre che questa $f(x)$ è anche iniettiva e dunque invertibile come aspettato.



In questo grafico è riportata la traiettoria del punto p in coordinate cartesiane sugli assi X , $-Y$. Anche qui si vede chiaramente che il sistema ha perso un grado di libertà, come unica coordinata necessaria per descrivere lo stato del sistema basta prendere un'ascissa curvilinea sulla curva qui rappresentata. L'unico punto comune alle due traiettorie è proprio quello di equilibrio stabile nell'origine.



Il sistema ha perso un grado di libertà e dunque se scelta l'opportuna coordinata anche lo spazio delle fasi passa da 4 a 2 dimensioni. Nel grafico qui riportato sugli assi ci sono x e v_x , l'andamento è del tutto analogo a quello di θ e v_θ che per ragioni di sintesi viene omesso. Si notano degli ellissi perfetti, non ci sono più punti interni: in questo caso corrisponderebbero a punti con energia totale minore mentre l'energia totale del sistema si conserva nel tempo.



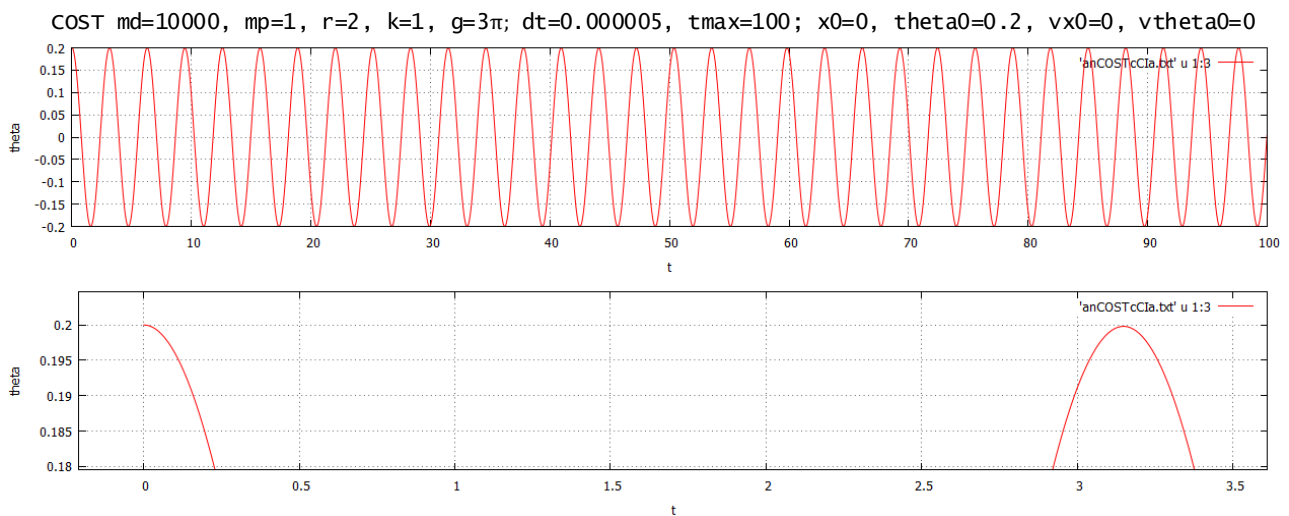
Infine è riportato l'andamento di U in funzione di x e θ . Anche qui si comprende che il moto in questione è descrivibile scegliendo opportunamente una sola coordinata combinazione di x e θ . Si distingue il punto di equilibrio stabile situato in $x=0$, $\theta=0$.

CONFIGURAZIONI E-F FREQUENZE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

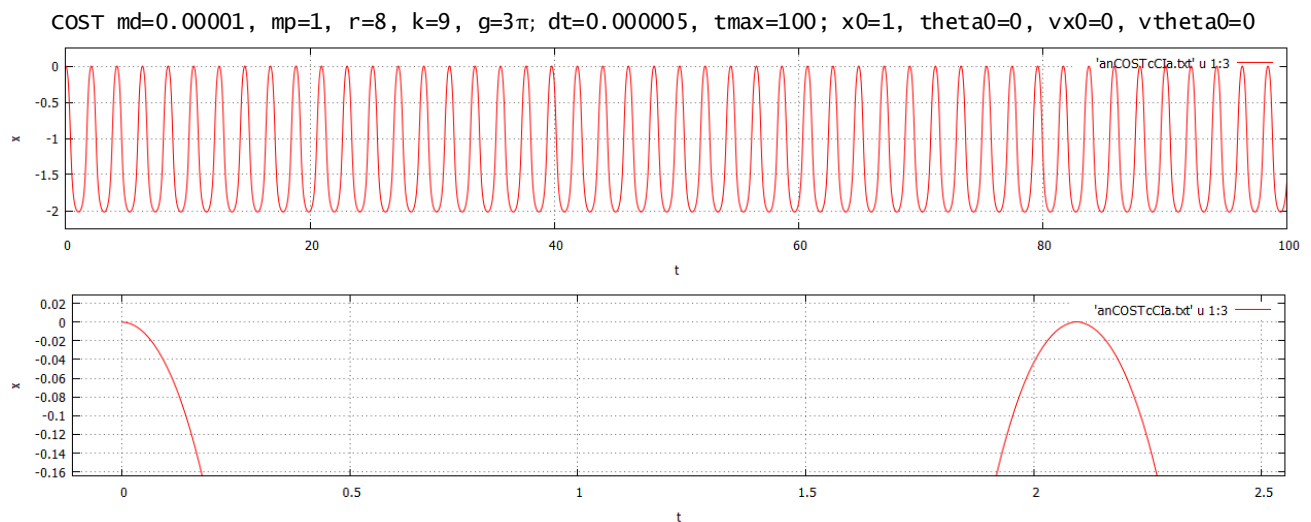
Attraverso il programma elaborato è possibile anche trovare le frequenze delle piccole oscillazioni o frequenze proprie del sistema esaminato. Analiticamente si trova che:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{m_p}}; \sqrt{\frac{8g}{3\pi r}}$$

Corrispondenti rispettivamente all'oscillatore a molla e quello del pendolo fisico. Per approssimare numericamente le frequenze delle piccole oscillazioni si sbilanciano le costanti in modo che gli effetti dell'oscillatore che non è analizzato diventino trascurabili, a tal fine è perfetto il parametro m_d che non compare in nessuna delle due frequenze.



Per il set di costanti scelto il periodo di oscillazione di θ è $T \sim 3.142$ corrispondente ad una frequenza $\omega = \frac{2\pi}{T} \cong 2 = \sqrt{\frac{8g}{3\pi r}}$ come aspettato. Si noti che l'oscillazione di θ è approssimativamente regolare, gli effetti del moto del punto materiale sono trascurabili.

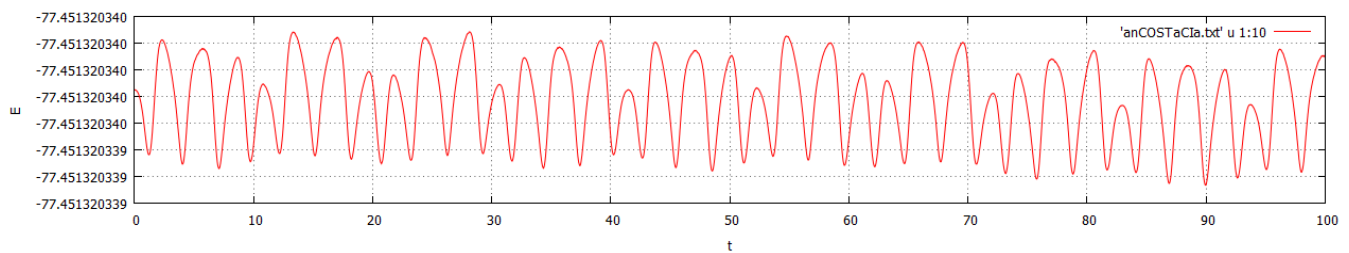


Per questo secondo set di costanti scelto il periodo di oscillazione di x è $T \sim 2.094$ corrispondente ad una frequenza $\omega = \frac{2\pi}{T} \cong 3 = \sqrt{\frac{k}{m_p}}$ come aspettato.

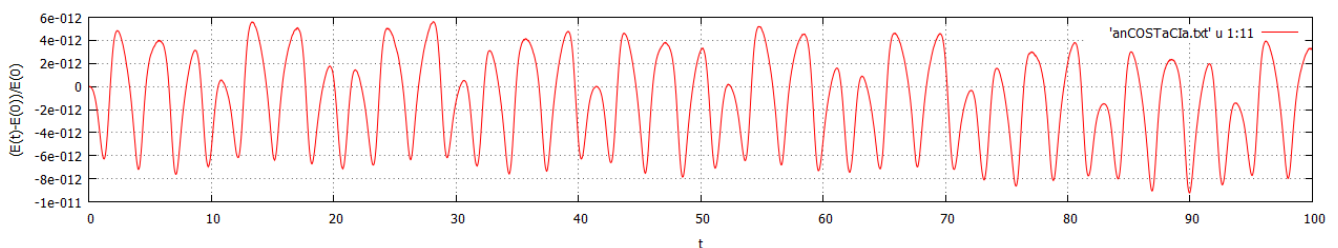
CONFIGURAZIONI E VERIFICA DELL'ALGORITMO D'INTEGRAZIONE

COST a, dt=0.000005, tmax=100

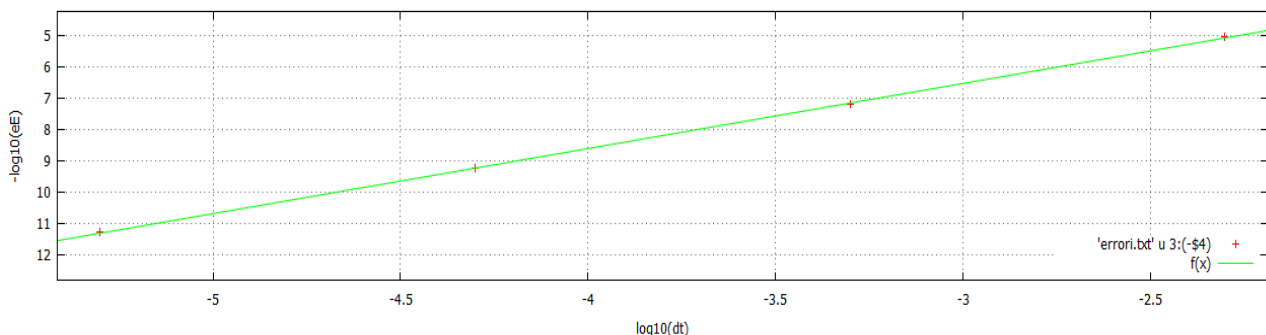
x0=8, theta0=1, vx0=0, vtheta0=0



È qui rappresentato l'andamento dell'energia totale, che si mantiene costante a meno di piccolissime oscillazioni di ampiezza media dell'ordine di 10^{-10} .



Anche l'errore su E definito come $\frac{E(t)-E_0}{E_0}$ presenta piccolissime oscillazioni di ampiezza media dell'ordine di 10^{-12} .



Nell'ultimo grafico di questo punto è studiato l'andamento dell'errore su E per diversi dt. Tale grafico serve per verificare l'ordine d'integrazione dell'algoritmo scelto, in particolare permette di individuare eventuali simmetrie che permetterebbero di guadagnare qualche ordine. Per Runge Kutta 2 l'andamento atteso è una parabola poiché di secondo ordine. Per rendere lo studio più semplice si sono graficati i logaritmi in base 10 delle grandezze così da poter avere un'andamento lineare, in particolare è necessario verificare che il coefficiente angolare della retta sia 2. Visto che Runge-Kutta di secondo ordine è stabile entro il tempo massimo d'integrazione scelto e quindi che l'errore sull'energia presenta solo oscillazioni intorno all'origine a condizione di muoversi in un opportuno intervallo di dt; l'errore su E scelto per ogni dt è la media delle ampiezze delle oscillazioni su tutto il tempo d'integrazione. La retta ottenuta ha coefficiente angolare $m=2.08\pm 0.02$ ed intercetta $q=0.29\pm 0.08$. Il risultato ottenuto è soddisfacente, il coefficiente angolare è compatibile con quello atteso.

Nel box è riportato il file errori.txt elaborato eseguendo il programma per diversi dt a parità di costanti e condizioni iniziali (specificate all'inizio del punto).

```
#Ampiezza media delle oscillazioni di  $(E(t)-E(0))/E(0)$  in funzione del tempo
#1:  $(E(t)-E(0))/E(0)$  medio 2:dt 3:log10($2) 4:log10($1)

5.0E-12      0.000005      -5.301029996      -11.30103
5.6E-10      0.00005       -4.301029996      -9.251811973
6.2E-08      0.0005        -3.301029996      -7.207608311
9.0E-06      0.005         -2.301029996      -5.045757491
```