

# RELAZIONE

## ISTRUZIONI PER IL PROGRAMMA

Il programma chiede di specificare il punto dell'esonero che si vuole svolgere attraverso il canale standard di input. In questo modo vengono settate le corrette condizioni iniziali. Per particolari punti si dovrà specificare anche  $M_B$ . È possibile anche scegliere condizioni iniziali a piacere.

Viene chiesto inoltre di specificare il  $dt$  e il tempo totale di integrazione. Il programma stampa su file sempre lo stesso numero di punti ( $\sim 10000$ ) affinché il file di output non superi 1MB, in questo modo viene preservata la memoria e contenuto notevolmente il tempo di elaborazione (la scrittura su file è uno dei processi più lenti). Più il tempo di integrazione è lungo più è grande l'intervallo di tempo fra due punti consecutivi sul file.

I file di output sono nominati "ANpto%.txt" dove al posto di % c'è il particolare punto dell'esonero o lo 0 se si sono settate condizioni iniziali a piacere.

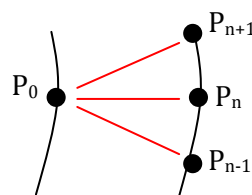
## CONSIDERAZIONI INIZIALI

L'algoritmo di integrazione utilizzato è Rounge-Kutta di secondo ordine. Ci si aspetta dunque che l'errore commesso sulla quantità conservata  $J$  ad un determinato tempo  $t$  definito come  $\frac{J(t)-J_0}{J_0}$  in funzione di  $dt$  sia di grado 2. E dunque una retta con coefficiente angolare 2 su carta doppio logaritmica.

Per Rounge-Kutta di secondo ordine eseguito con variabili a 64 bit (double) di precisione  $\sim 2^{-52}$  il passo d'integrazione  $dt$  che garantisce maggiore precisione è dato da  $\left(\frac{2^{-52}}{k}\right)^{\frac{1}{k+1}} = \sim 0.000005$  dove  $k$  è l'ordine dell'algoritmo; tale valore viene ottenuto trovando il minimo, e dunque studiando la derivata, dell'errore totale di integrazione dato dal particolare algoritmo scelto e dalla precisione della macchina in funzione di  $dt$ .

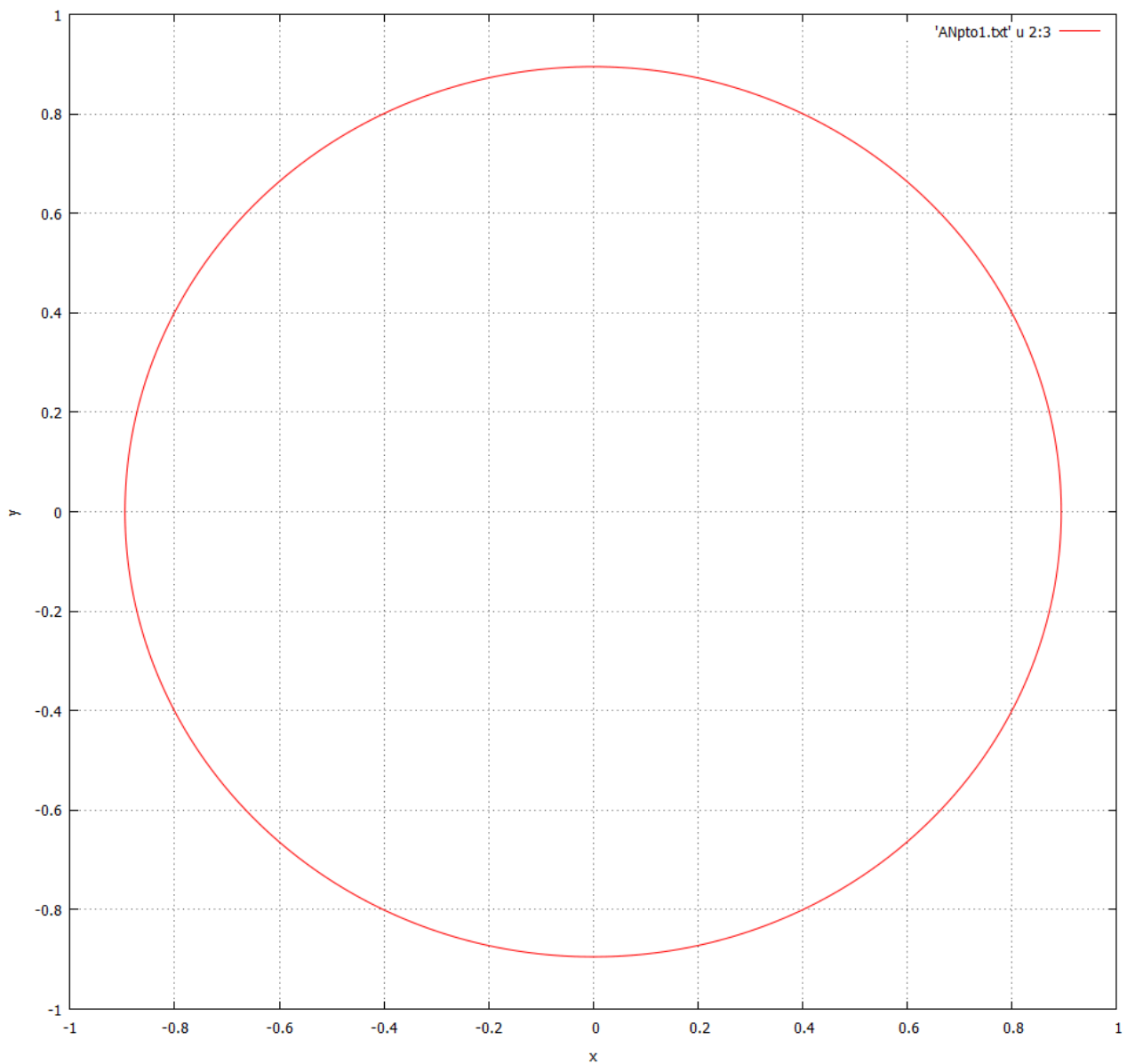
Per il calcolo del periodo o del primo tempo di ritorno vicino alle condizioni iniziali l'algoritmo sviluppato cerca i punti di minimo della funzione  $d_{p0}(p)$  distanza dal punto iniziale  $p_0(x,y)$  per ogni punto  $p(x,y)$ . Viene posta poi una condizione di vicinanza ragionevole per trascurare i punti di minimo non vicini alle condizioni iniziali. Questo algoritmo è poco esoso come tempo di elaborazione e utilizzo della memoria poiché per ogni passo viene calcolata solo la distanza dal punto iniziale e sono riassegnate a due variabili d'appoggio i valori delle due distanze precedenti. Non viene salvato alcun punto in memoria.

Il tempo di primo ritorno vicino alle condizioni iniziali è quello corrispondente al punto  $P_n$  perché la distanza da  $P_0$  è inferiore sia di quella del punto successivo  $P_{n+1}$  che di quello precedente  $P_{n-1}$



## PUNTO 1

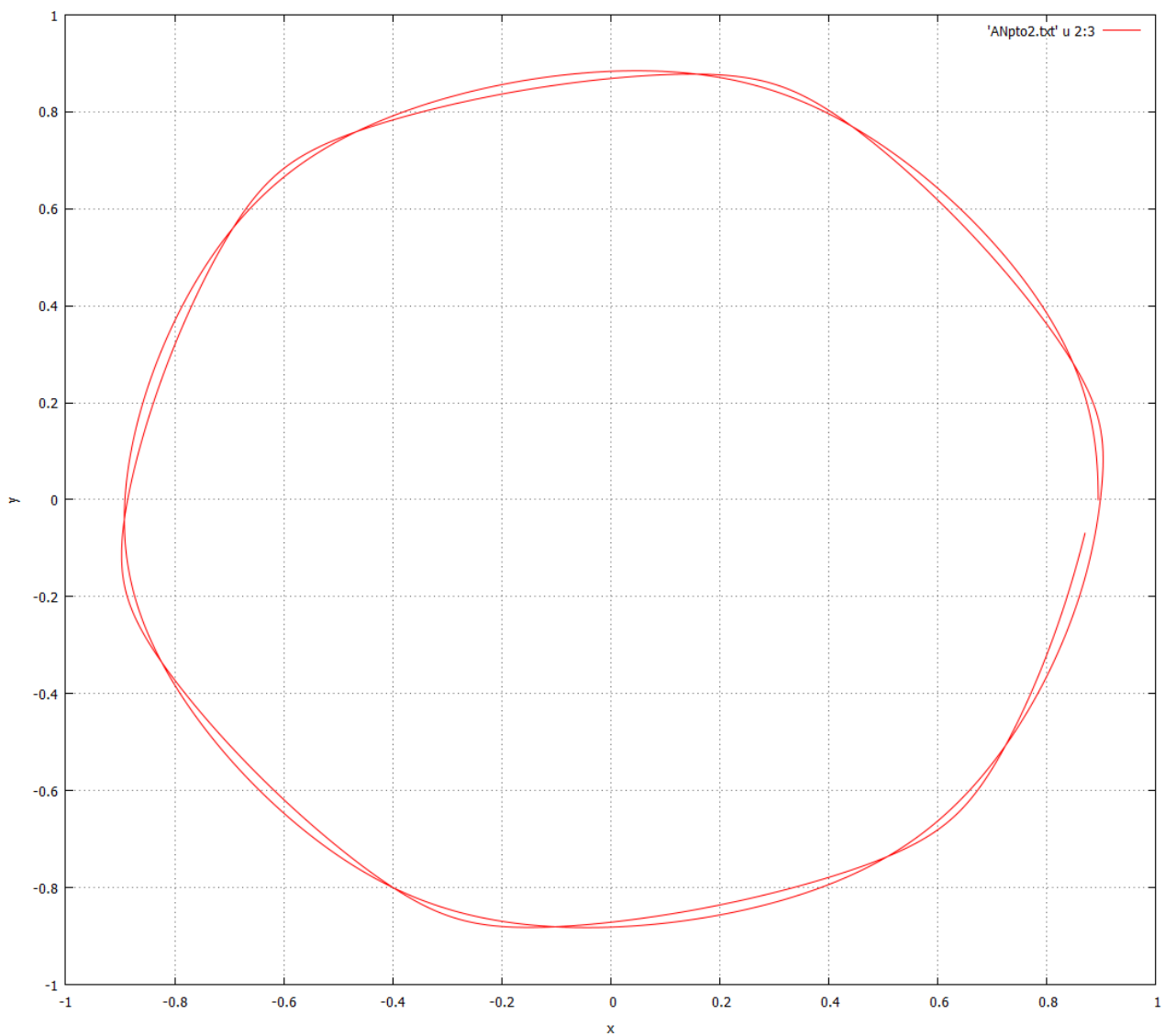
MA=1.0000 MB=0.0000 dt=0.000005 tmax=10



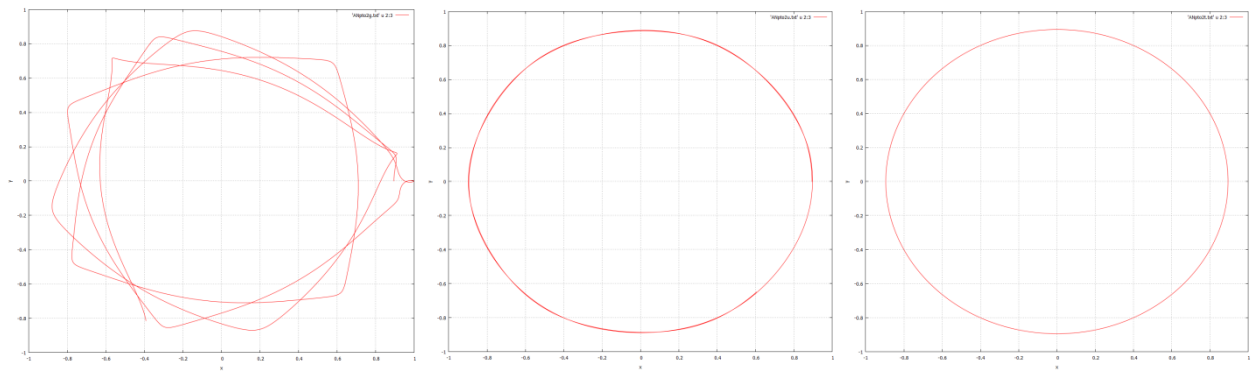
L'asteroide compie una traiettoria ellittica intorno all'origine dove si trova il centro di massa del sistema che coincide con la posizione del Sole poiché il pianeta è assente. L'ellissi ha eccentricità molto vicina a 0 e dunque è approssimabile a una circonferenza. Ciò oltre che dai dati sulla posizione si può dedurre dal fatto che durante il moto viene conservata sia l'energia potenziale che quella cinetica: queste due grandezze oscillano con ampiezza rispettivamente di  $1.5\text{E-}3$  e  $3\text{E-}4$ , lo 0.003% e lo 0.06% del valor medio. Il moto è periodico di periodo  $5.522225 \pm 0.000005$  unità temporali astronomiche.

## PUNTO 2

MA=0.9999 MB=0.0001 dt=0.000005 tmax=10

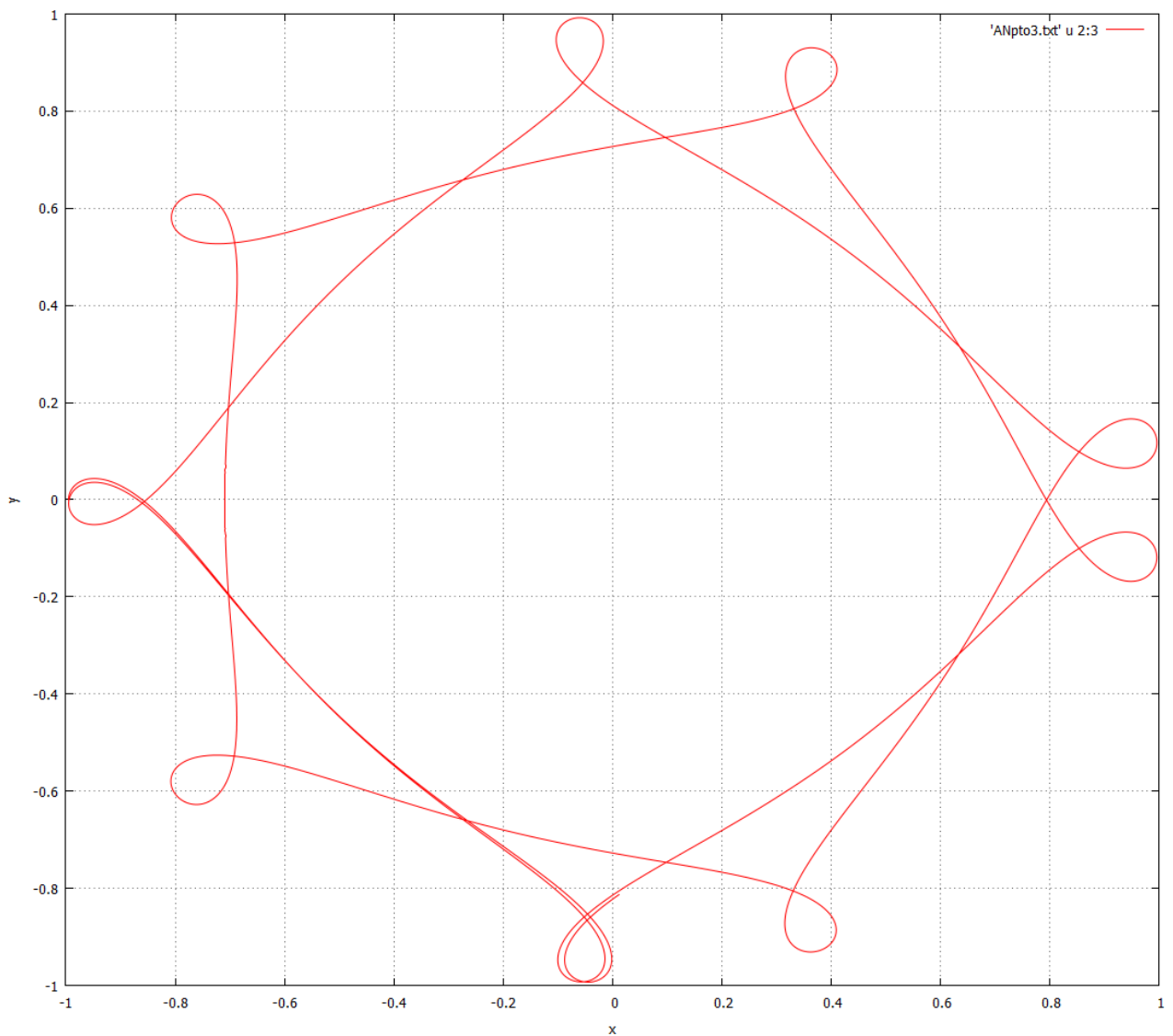


Se viene introdotto un pianeta di massa 0.0001 nel sistema e sono mantenute le condizioni iniziali del punto precedente si può notare come questo perturbi periodicamente l'orbita dell'asteroide. L'orbita è sempre periodica di periodo  $5.108130 \pm 0.000005$  unità temporali astronomiche. In particolare durante un periodo l'orbita viene perturbata circa 6 volte. L'entità della perturbazione e il periodo dipendono dalla massa  $M_B$  del pianeta. Di seguito sono riportate le traiettorie per tre diversi  $M_B$  con massa in proporzione rispetto a quella del Sole paragonabile rispettivamente a Giove, Urano e la Terra.

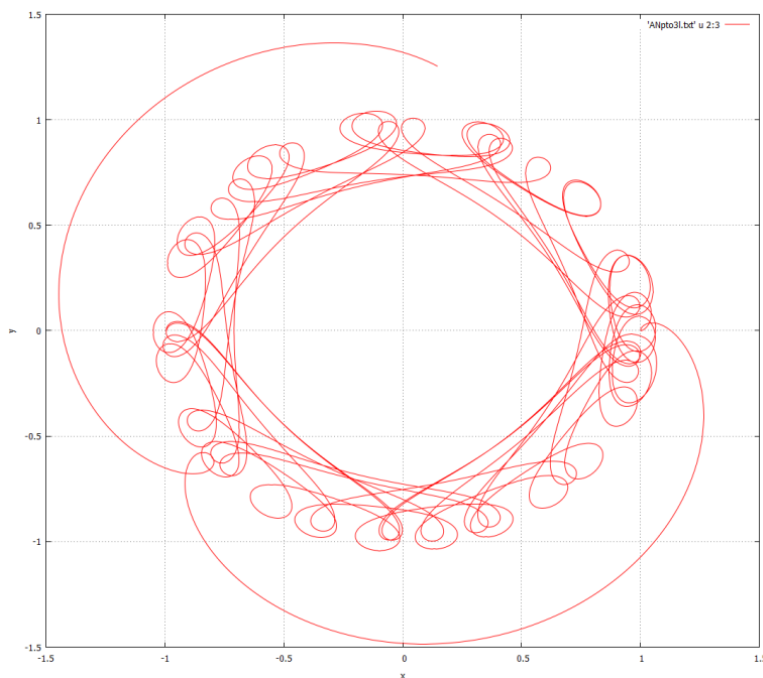


### PUNTO 3

MA=0.9999 MB=0.0001 dt=0.000005 tmax=8



La traiettoria dell'asteroide ottenuta presenta particolari “riccioli” e sembra essere periodica con periodo  $7.027385 \pm 0.000005$ . Se tuttavia aumentiamo il tempo totale di integrazione il risultato che si ottiene è il seguente (tmax=50)



L'orbita non è dunque periodica. Per  $t \sim 47.549$  l'asteroide passa vicinissimo al pianeta cambiando completamente orbita. Questi particolari "riccioli" dove l'asteroide momentaneamente torna indietro (moto retrogrado) per poi proseguire sono una conseguenza del sistema non inerziale in cui ci si trova.

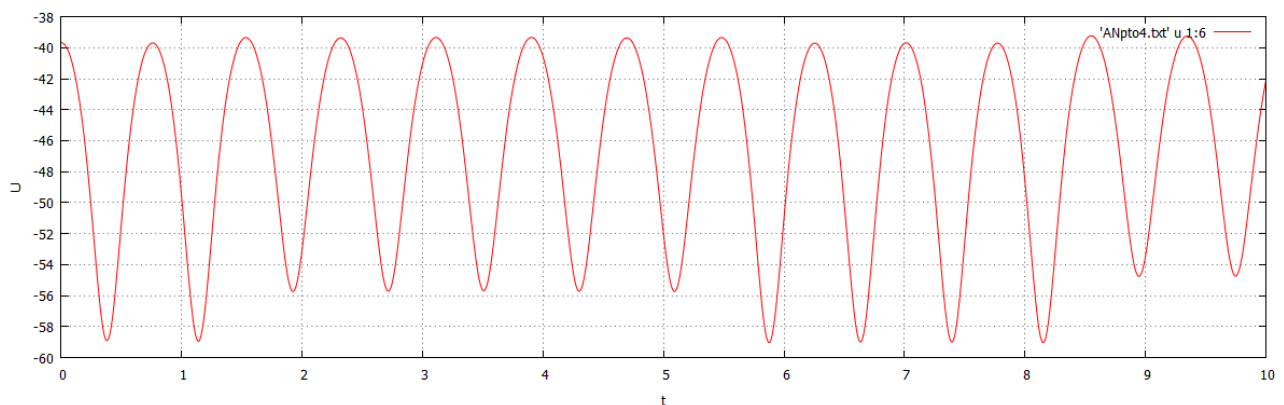
Nel nostro sistema solare per un osservatore solidale con la Terra, che è un sistema di riferimento non inerziale, accadono fenomeni analoghi. Fino a che nella storia non si è passati ad un sistema di riferimento eliocentrico i moti retrogradi dei pianeti erano giustificati dal modello

tolemaico, geocentrico, grazie all'introduzione di epicicli lungo cui si muoveva il pianeta che a loro volta orbitavano su un'orbita principale detta deferente.

#### PUNTO 4

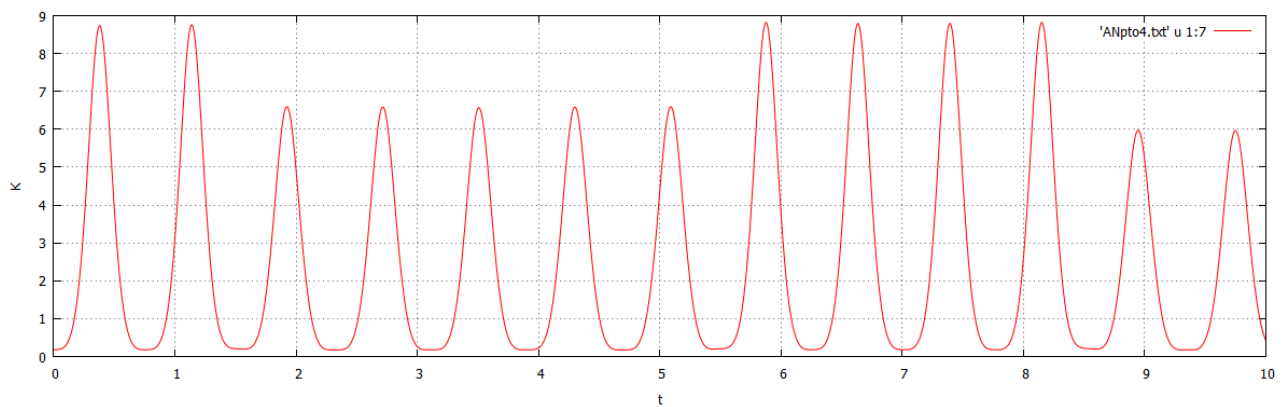
MA=0.9999 MB=0.0001 dt=0.000005 tmax=10

La traiettoria dell'asteroide è la stessa del punto precedente.

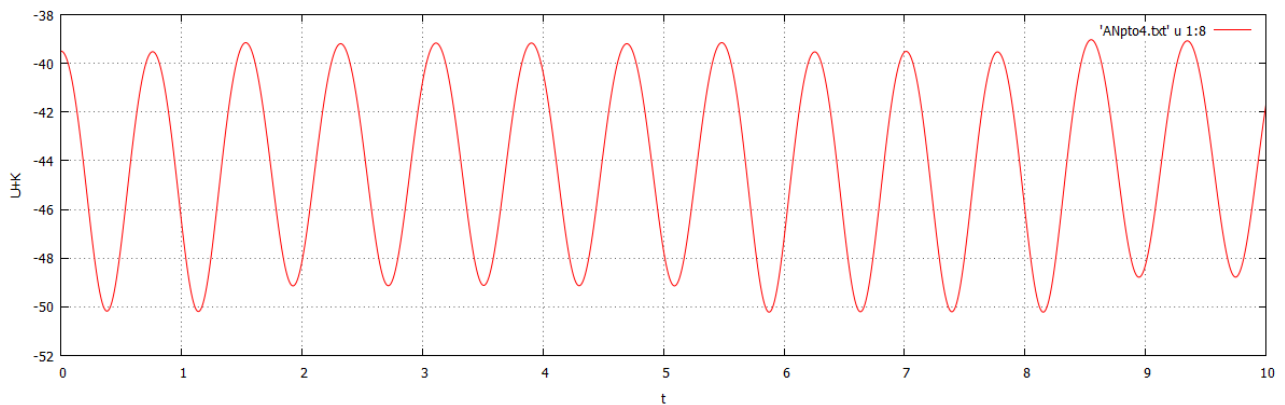


È riportato l'andamento dell'energia potenziale  $U$  al passare del tempo. Si notano delle consistenti oscillazioni in corrispondenza dei "riccioli" al cui apice l'asteroide raggiunge la massima distanza dall'origine dove è posto il centro di massa del sistema, e dunque dove l'energia potenziale è maggiore.

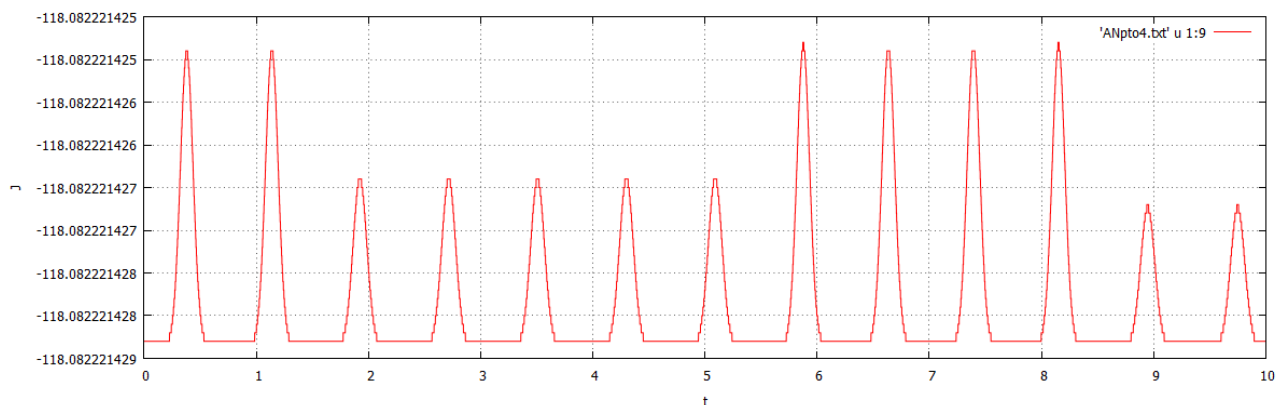
Di seguito è riportato l'andamento dell'energia cinetica  $K$  al passare del tempo. L'andamento, come intuibile da quello di  $U$ , è oscillatorio in opposizione di fase con quello dell'energia potenziale.



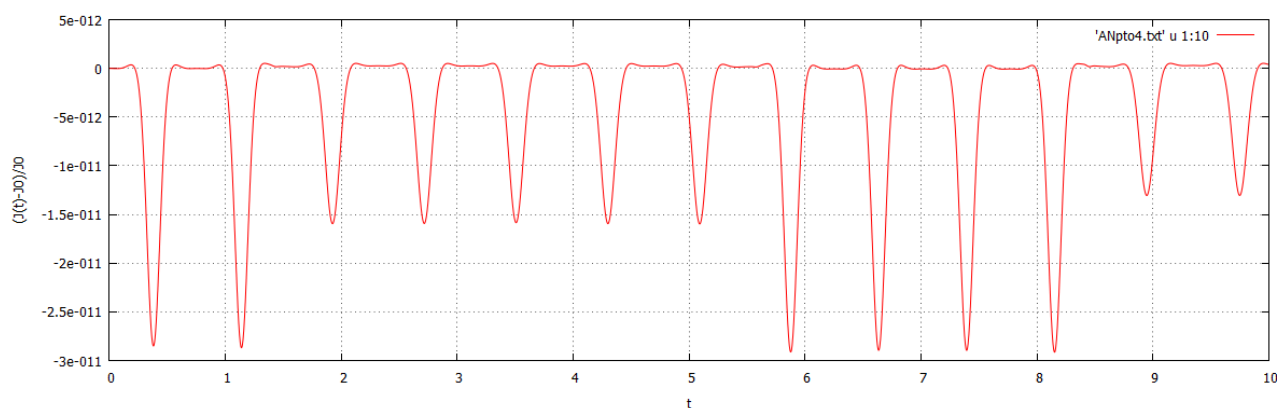
Dal seguente grafico in cui è riportata la somma dell'energia potenziale e quella cinetica in funzione del tempo si nota come questa non sia una costante del moto, presentando invece ampie oscillazioni. Il sistema di riferimento non è inerziale e dunque per ottenere una grandezza costante nel tempo bisogna apportare un opportuno termine di correzione, in questo caso proporzionale alla velocità angolare  $\omega$  con cui ruota il sistema di riferimento rispetto a quello delle stelle fisse, inerziale.



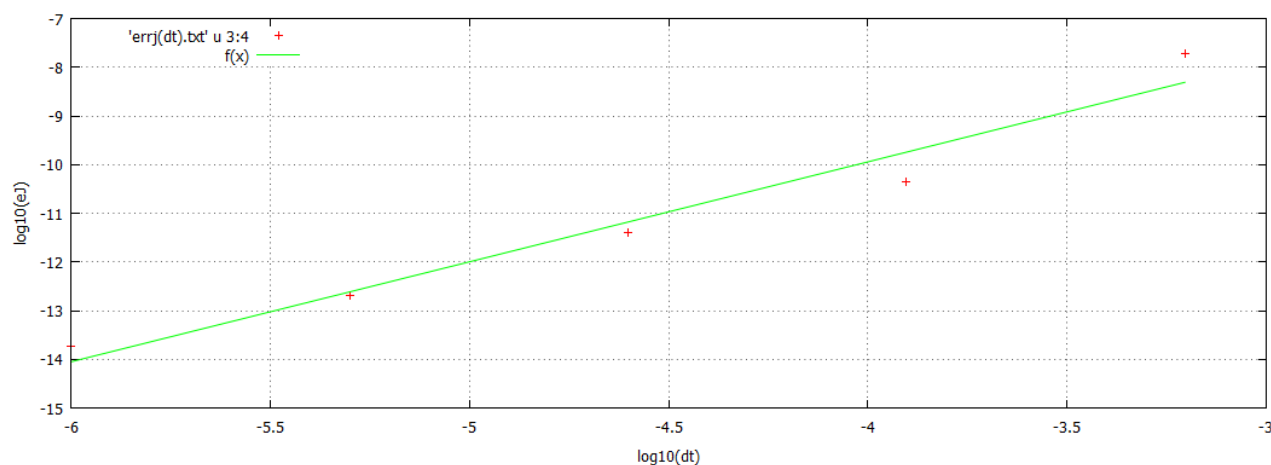
La grandezza in questione è J definita come  $J = 2K + 2U - \omega^2(x^2 + y^2)$ . Di seguito è riportato il grafico di J in funzione del tempo. J si mantiene costante a meno di piccolissime oscillazioni, l'altezza media relativa dei picchi è dell'ordine di  $10E-11$ .



Nel grafico seguente è mostrato l'andamento dell'errore su J in funzione del tempo, l'errore su J è stato definito come  $\frac{J(t) - J_0}{J_0}$ . Come detto precedentemente gli errori su J sono piuttosto contenuti e dell'ordine di  $10E-11$ .



Nell'ultimo grafico di questo punto è studiato l'andamento dell'errore su  $J$  per diversi  $dt$ . Tale grafico serve per verificare l'ordine d'integrazione dell'algoritmo scelto, in particolare permette di individuare eventuali simmetrie che permetterebbero di guadagnare qualche ordine. Per Rounge Kutta 2 l'andamento atteso è una parabola poiché di secondo ordine. Per rendere lo studio più semplice si sono graficati i logaritmi in base 10 delle grandezze così da poter avere un'andamento lineare, in particolare è necessario verificare che il coefficiente angolare della retta sia 2. Tutti i punti si riferiscono ad un tempo di 1.5 unità temporali astronomiche. La retta ottenuta ha coefficiente angolare  $m=2.05\pm0.24$  ed intercetta  $q=-1.7\pm1.1$ . Il risultato ottenuto è soddisfacente, il coefficiente angolare è compatibile con quello atteso.

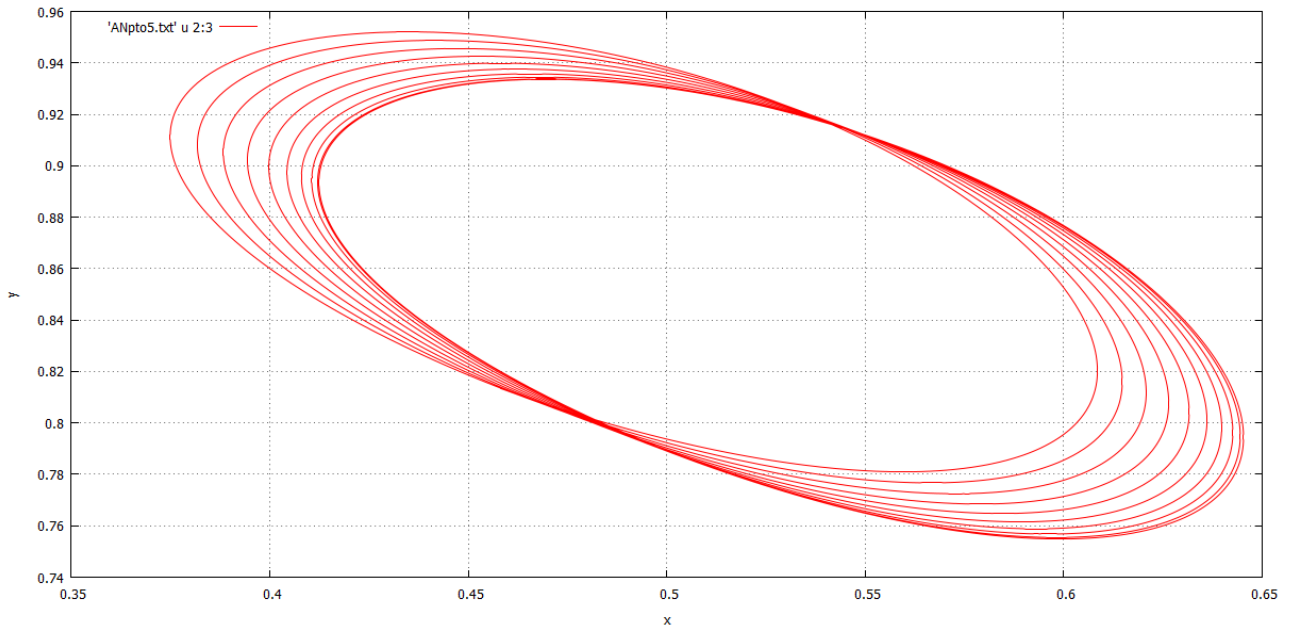


Tale studio tuttavia presenta importanti complicazioni. Innanzitutto il risultato non è del tutto indipendente dal particolare tempo  $t$  scelto, per  $t=1$  ad esempio i risultati sono rispettivamente  $m=2.186\pm0.046$  e  $q=-0.56\pm0.22$ . Inoltre è necessario scegliere un intervallo opportuno di  $dt$ , per  $dt$  troppo piccoli o troppo grandi diventano significativi altri fattori di imprecisione oltre a quella prevista dall'algoritmo d'integrazione, come ad esempio l'approssimazione della macchina.

# PUNTI FACOLTATIVI

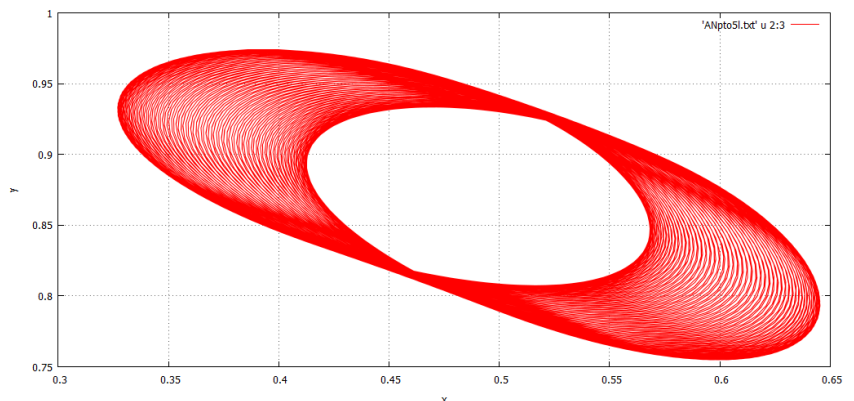
## PUNTO 1

MA=0.9999 MB=0.0001 dt=0.000005 tmax=10



La traiettoria dell'asteroide è completamente nel primo quadrante, l'orbita sembra non essere intorno al centro di massa del sistema. Inoltre tale orbita non è periodica infatti trasla lentamente nello spazio. Il primo tempo di ritorno vicino alle condizioni iniziali è  $1.000350 \pm 0.000005$  unità temporali astronomiche, vicinissimo al tempo di rivoluzione del pianeta intorno al Sole (1 unità temporale astronomica). Ciò suggerisce che nel sistema di riferimento delle stelle fisse, inerziale, l'asteroide sia molto lento e si veda passare il pianeta davanti ogni unità astronomica, che è il tempo di rivoluzione del pianeta intorno al Sole. In particolare il moto sembra analogo a quello della seconda parte dell'ultimo punto dell'esonero, solo che qui non si vede l'intero ferro di cavallo ma solo una piccolissima parte.

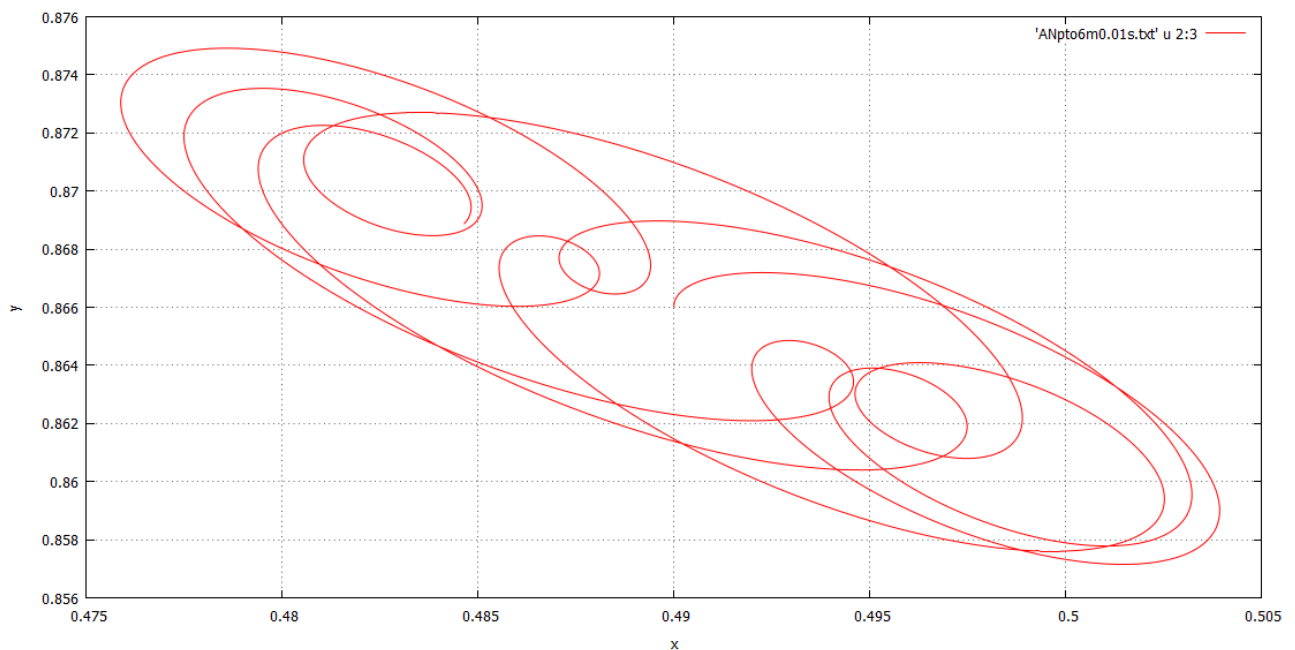
Di fianco è riportata la traiettoria per un tempo di integrazione di 200 unità temporali astronomiche. Si noti come la traslazione è lentissima.



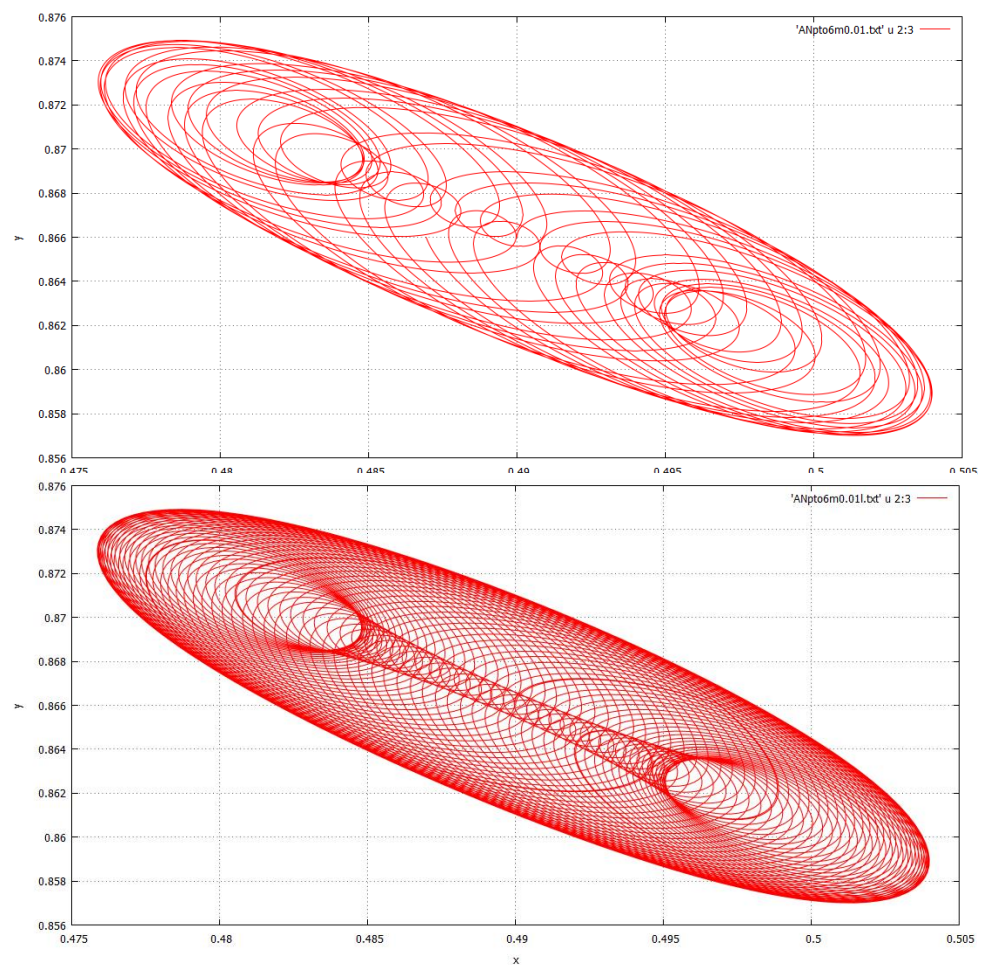


## PUNTO 2

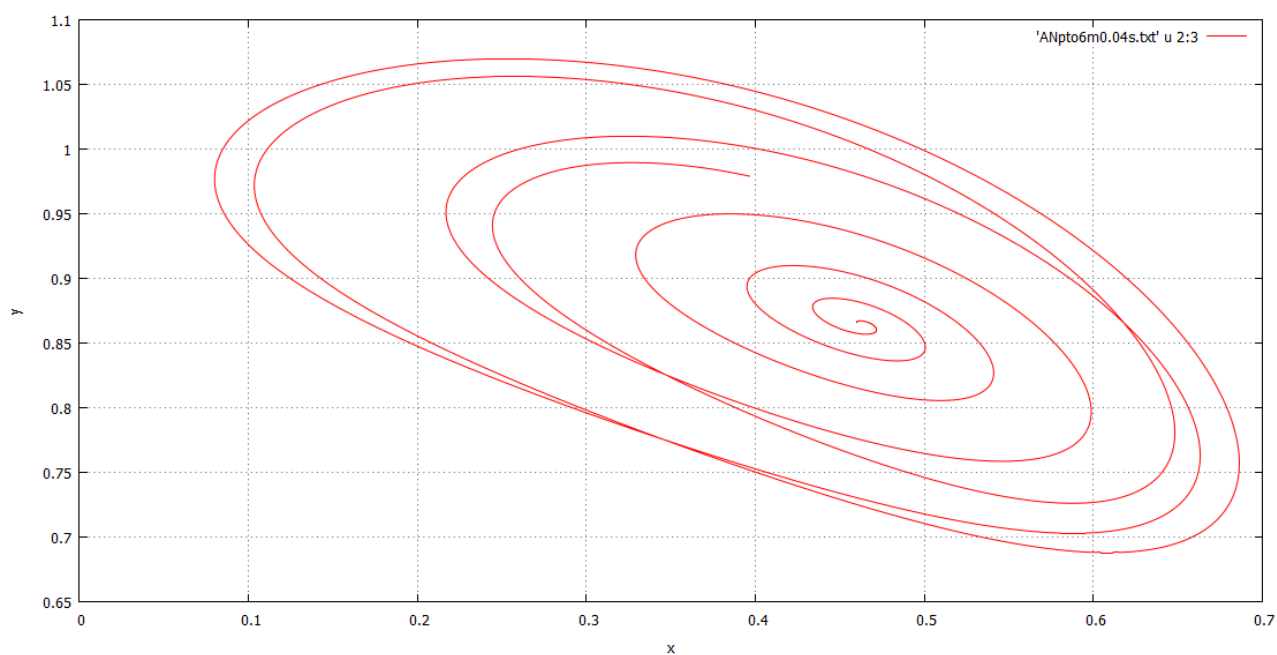
MA=0.99 MB=0.01 dt=0.000005 tmax=10, 50, 150



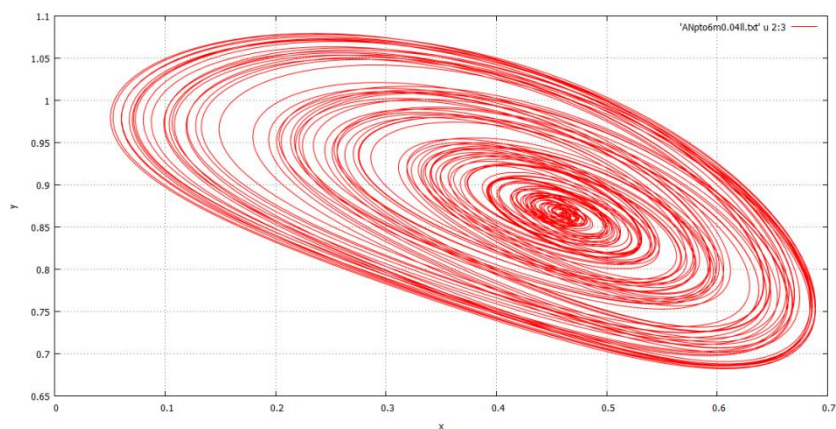
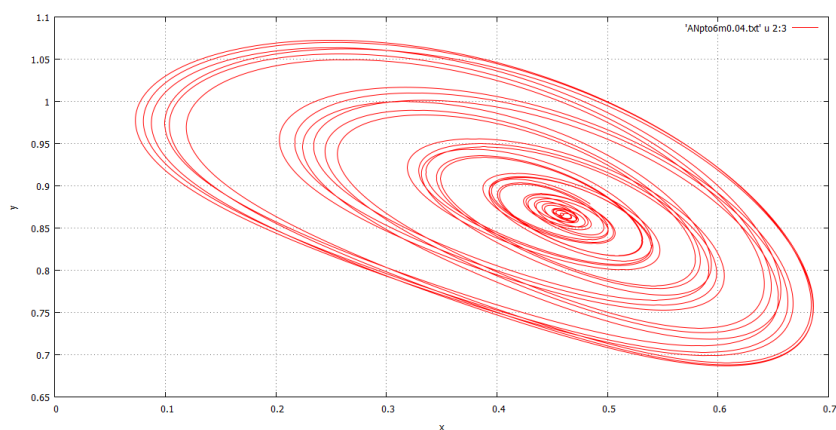
La traiettoria dell'asteroide è completamente nel primo quadrante, non è più regolare ma è fortemente perturbata dal pianeta di massa 0.01. Essa è contenuta in un'ellisse il cui centro coincide con il punto iniziale  $P_0(0.49;0.866)$ . Studiando tempi d'integrazione maggiori si vede riempire l'ellisse fino a che la traiettoria non risulta periodica. È interessante notare cosa succede nei pressi dei due fuochi.



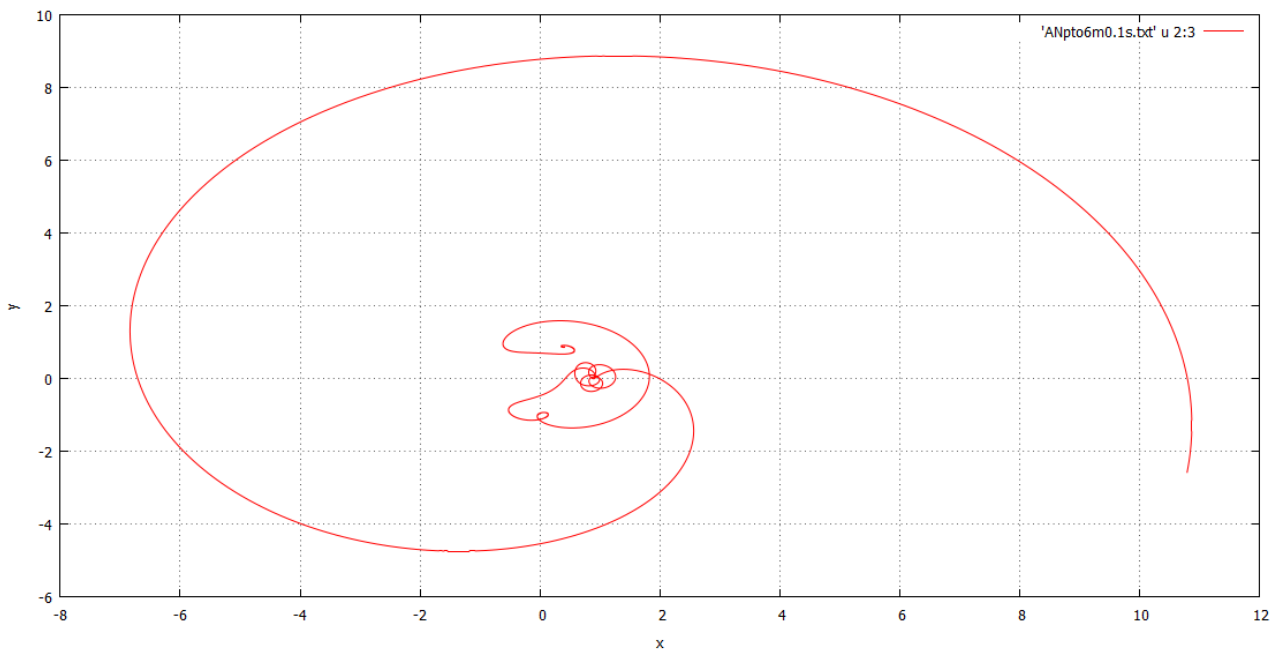
MA=0.96 MB=0.04 dt=0.000005 tmax=10, 50, 150



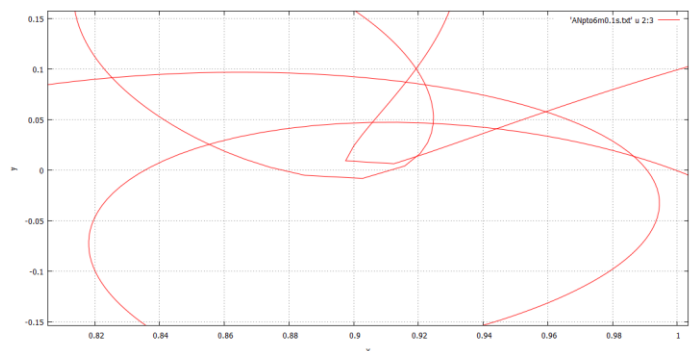
La traiettoria dell'asteroide è completamente nel primo quadrante. Aumentando la massa del pianeta l'ellisse in cui era contenuto il moto precedente si allarga diventando irregolare, ma ancora contiene l'intera traiettoria. L'asteroide compie spirali intorno a  $P_0(0.49;0.866)$  verso l'esterno e poi verso l'interno alternativamente.



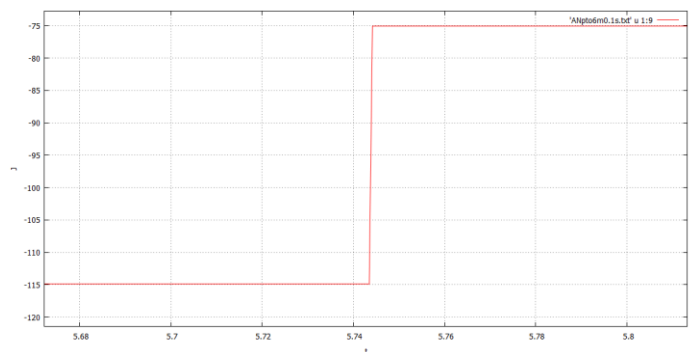
MA=0.9 MB=0.1 dt=0.000005 tmax=7, 20



Il sistema in cui ci troviamo è praticamente binario dato che la massa del pianeta è dello stesso ordine di grandezza di quella del Sole. La traiettoria dell'asteroide è in questo caso molto irregolare nelle fasi iniziali, In particolare l'asteroide passa vicinissimo al pianeta che si trova in  $x_B(0.9;0)$  come si può vedere dall'ingrandimento.

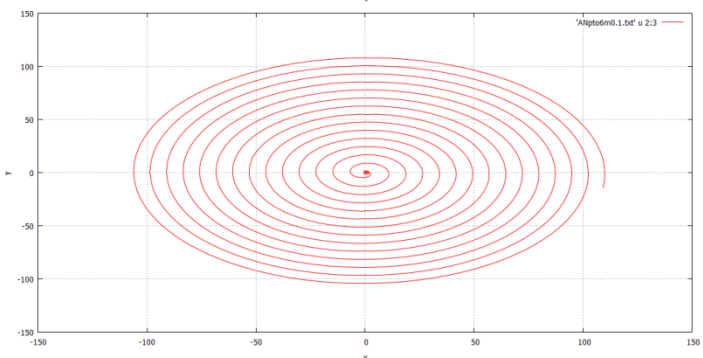


A tale vicinanza bastano piccolissime variazioni nelle coordinate spaziali e nelle velocità nel momento in cui l'asteroide è più vicino al pianeta per ottenere traiettorie completamente differenti. Ciò compromette fra l'altro la capacità di previsione dell'algoritmo come evidenziato dalla variazione di J in seguito al passaggio nei pressi del pianeta al tempo  $t \sim 5.743$  unità temporali astronomiche.



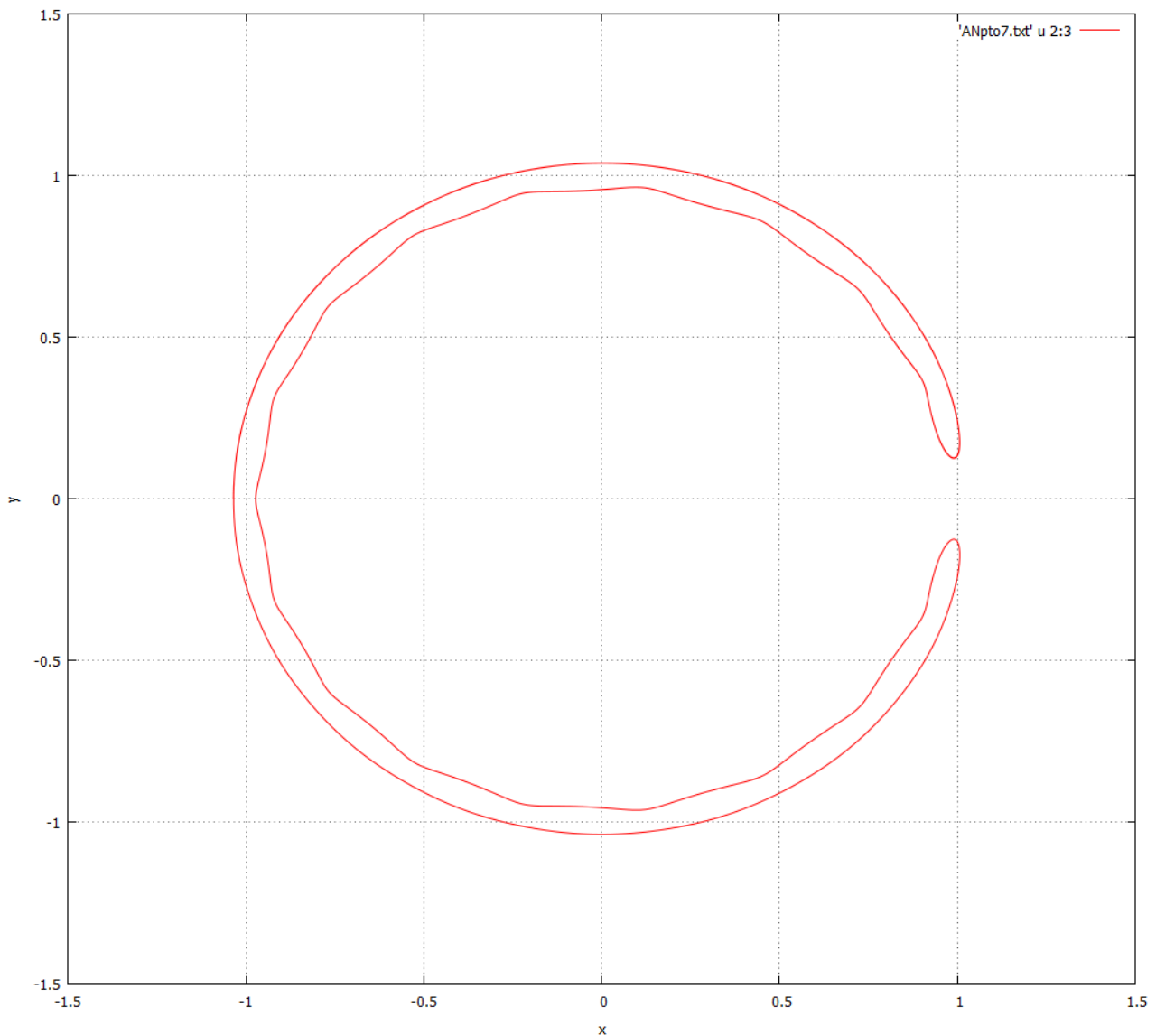
Tali passaggi ravvicinati a corpi celesti sono alla base della tecnica della fionda gravitazionale per far cambiare direzione in modo consistente a sonde spaziali con un contenuto utilizzo di carburante.

Il moto dell'asteroide continua poi con una spirale diretta verso l'esterno.



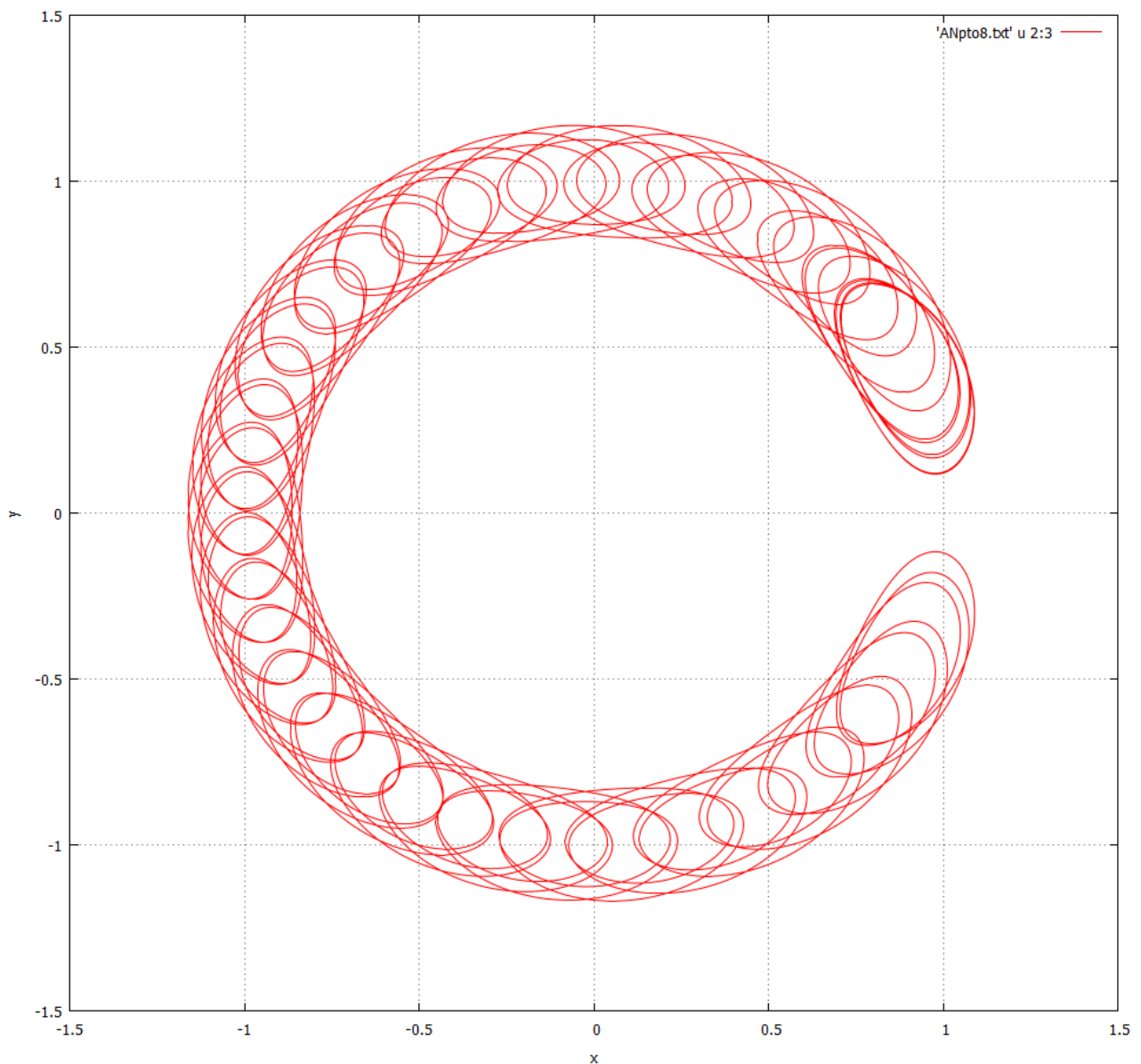
### PUNTO 3

MA=0.9999 MB=0.0001 dt=0.000005 tmax=50



L'orbita che si ottiene in queste particolari condizioni è regolare e periodica, di periodo  $35.741580 \pm 0.000005$  unità temporali astronomiche. Si nota un'inversione del moto quando l'asteroide si trova nei pressi del pianeta. L'asteroide ruota intorno al Sole ad una velocità molto vicina a quella del pianeta, in particolare è leggermente più veloce nella parte interna del ferro di cavallo e più lento in quella esterna (II legge di Keplero). Quando sta per superare o essere superato dal pianeta, la forza gravitazionale che il pianeta, ora vicino, gli imprime, rispettivamente lo rallenta o lo accelera abbastanza da permettergli di non superare o essere superato dallo stesso pianeta; l'asteroide viene quindi spostato su un'orbita più lontana o più vicina al Sole; questo processo si ripete ogni volta. Per un osservatore solidale al pianeta l'orbita risultante è a forma di ferro di cavallo.

MA=0.9999 MB=0.0001 dt=0.000005 tmax=70



L'orbita che si ottiene in queste particolari condizioni è nuovamente periodica, di periodo  $67.051435 \pm 0.000005$  unità temporali astronomiche. Il primo tempo di ritorno vicino le condizioni iniziali è invece di  $0.967435 \pm 0.000005$  unità temporali astronomiche. Il fenomeno è analogo a quello descritto nel punto precedente a parte che in questo caso l'asteroide sembra compiere delle piccole orbite lungo la traiettoria che descrive il pianeta intorno al Sole nel sistema di riferimento delle stelle fisse.