# Laboratorio di Fisica Computazionale I, a.a. 2014/2015
# Prima prova in Itinere (obbligatoria)

In questo problema studieremo il moto di un asteroide $P$ in uno spazio bidimensionale. Tratteremo dunque due equazioni differenziali accoppiate del secondo ordine che descrivono l'evoluzione delle due coordinate dell'asteroide $P$.

Consideriamo un Sole $A$ di massa $\mathrm{M}_A$ e un pianeta $B$ di massa $\mathrm{M}_B$ che, nel sistema di riferimento del loro centro di massa, orbitano su due diverse orbite circolari intorno al centro di massa comune, con velocità angolare $\omega$, mantenendo tra loro una distanza fissa $R$. La dinamica di questo sistema binario è fissa, non cambia nel tempo (visto che sia $A$ che $B$ sono molto piú pesanti dell'asteroide $P$) e non dovremo occuparcene.

Poniamo l'origine del sistema di riferimento (co-rotante con il pianeta $B$) nel centro di massa del sistema composto da $A$ e da $B$. Caratterizziamo con le coordinate $(x, y)$ il piano orbitale, nel quale gli assi $x$ ed $y$ sono scelti in modo tale che $A$ e $B$ sono fermi lungo l'asse $x$, rispettivamente nelle posizioni $x_A = -\mathrm{M}_B R/(\mathrm{M}_A + \mathrm{M}_B)$, $y_A = 0$ e $x_B = \mathrm{M}_A R/(\mathrm{M}_A + \mathrm{M}_B)$, $y_B = 0$.

Studieremo quindi, nel campo delle forze esercitato da questo sistema binario, il moto nel piano $(x, y)$ di un terzo corpo celeste $P$ di massa $\mathrm{M}_P$ trascurabile rispetto a $\mathrm{M}_A$ e $\mathrm{M}_B$. $P$ non perturba il moto di $A$ e $B$ che rimangono immobili nel sistema di riferimento co-rotante definito prima.

Fissiamo nel seguito $\omega = 2\pi$, $R = 1$ ed imponiamo che

$$\mathrm{M}_A + \mathrm{M}_B = 1 \ .$$

In queste condizioni $A$ e $B$ sono immobili, nel nostro sistema di riferimento, rispettivamente nelle posizioni

$$x_A = -\mathrm{M}_B \ , \ \ y_A = 0 \ ; \ \ x_B = M_A \ , \ \ y_B = 0 \ .$$

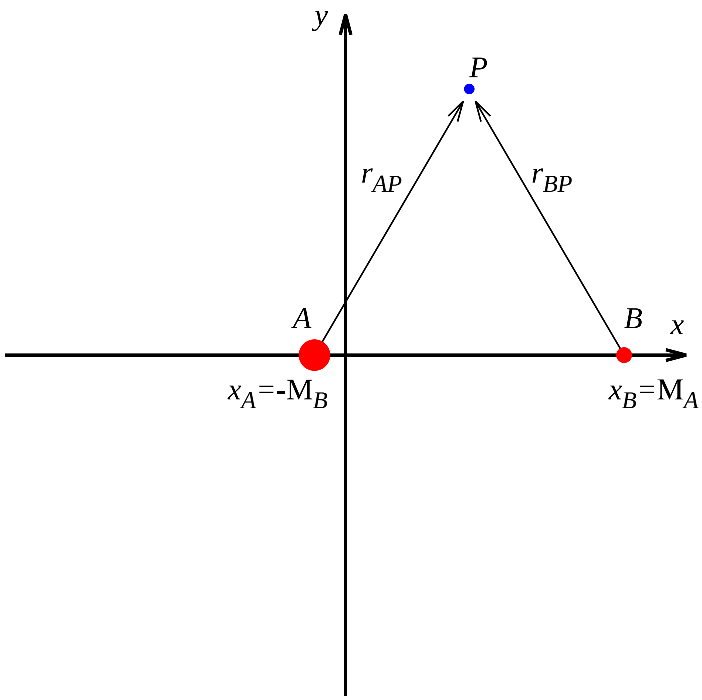
L'accelerazione di $P$ nel sistema di riferimento indicato, che determina le nostre equazioni del moto, ha forma:

$$\vec{a} = -4\pi^2 \left( \mathrm{M}_A \frac{\vec{r}_{AP}}{r_{AP}^3} + \mathrm{M}_B \frac{\vec{r}_{BP}}{r_{BP}^3} \right) - 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \omega^2 \vec{r}$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione di $P$ e $\vec{v}$ è la sua velocità , $r$ è il modulo di $\vec{r}$, i due vettori $\vec{r}_{AP}$ e $\vec{r}_{BP}$ puntano rispettivamente dalla stella $A$ all'asteroide $P$ e dal pianeta $B$ all'asteroide $P$, e $r_{AP}$ e $r_{BP}$ sono i loro rispettivi moduli. $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare del sistema stazionario composto dal Sole $A$ e dal pianeta $B$, $\vec{\omega}$ ha modulo $\omega = 2\pi$, è ortogonale al piano del moto ed ha verso uscente dal piano del disegno in figura. Scritte in forma esplicita per le due componenti le equazioni del moto hanno forma:

$$\begin{aligned} a_x &= -4\pi^2 \left( \mathrm{M}_A \frac{x - x_A}{r_{AP}^3} + \mathrm{M}_B \frac{x - x_B}{r_{BP}^3} \right) + 2\omega v_y + \omega^2 x \ , \\ a_y &= -4\pi^2 y \left( \frac{\mathrm{M}_A}{r_{AP}^3} + \frac{\mathrm{M}_B}{r_{BP}^3} \right) - 2\omega v_x + \omega^2 y \ . \end{aligned}$$

Sono dunque queste le due equazioni del moto accoppiate che dovremo analizzare.




Utilizzate, per lo svolgimento della prova un metodo di integrazione che sia almeno del secondo ordine. Giustificate in ognuno dei punti svolti la scelta del valore del passo d'integrazione.

1. Per iniziare, si ponga $\mathrm{M}_B = 0$ e $\mathrm{M}_A = 1$ (e di conseguenza naturalmente $x_A = 0$ mentre il valore di $x_B$ è in questo caso ininfluente). Si integrino le equazioni del moto, con condizioni iniziali $x(0) = 0.895$, $y(0) = 0$, $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = 1.018$, per un tempo di almeno 6 unità temporali astronomiche. Discutete il moto osservato. Che tipo di orbita si ottiene?
2. Si ponga $\mathrm{M}_B = 0.0001$ (è un valore realistico per un gigante gassoso in orbita intorno ad una stella di classe simile a quella del Sole; nel sistema solare, se $\mathrm{M}_A$ è la massa del Sole e in unità tali che $G(\mathrm{M}_A + \mathrm{M}_B) = 4\pi^2$, Giove avrebbe $\mathrm{M}_B \simeq 0.001$, Urano $\mathrm{M}_B \simeq 4.3 \cdot 10^{-5}$ e la Terra $\mathrm{M}_B \simeq 3 \cdot 10^{-6}$) e, come sempre, $M_A = 1 - M_B$. Ripetete l'integrazione con le stesse condizioni iniziali del punto precedente, e analizzate tempi piú lunghi che nel caso precedente. Cosa si osserva? Come influisce la presenza del pianeta $B$ sul moto dell'asteroide?
3. Si considerino adesso le condizioni iniziali $x(0) = -0.995$, $y(0) = 0$ $v_x(0) = 0$, $v_y(0) = 0.6$. Si discuta il moto nel caso $\mathrm{M}_B = 0.0001$. Si tracci la traiettoria nel piano $(x, y)$ per un tempo simulato di almeno $t_{\max} = 8$ unità temporali astronomiche.
4. Nelle condizioni del moto indicate al punto precedente, controllate l'andamento dell'energia potenziale gravitazionale di $P$

$$U(x, y) = -4\pi^2 \left( \frac{M_A}{r_{AP}} + \frac{M_B}{r_{BP}} \right) ,$$

della sua energia cinetica $K = \frac{1}{2}v^2$ e della loro somma. Verificate inoltre che la quantità

$$J = v_x^2 + v_y^2 + 2U(x, y) - \omega^2(x^2 + y^2)$$

sia una costante del moto. Verificate che l'errore di integrazione segua l'andamento previsto per l'algoritmo di integrazione scelto.

**Facoltativo**:
Affrontate lo studio dei temi proposti di seguito soltanto *dopo* aver svolto tutti gli esercizi proposti sopra, la cui corretta discussione garantisce comunque un'ottima valutazione della prova. Questi punti facoltativi sono piú una possibile sfida con voi stessi che un modo per ottenere un voto migliore.

Lo studio può essere approfondito sotto molti aspetti. Viste da un osservatore solidale con un pianeta in orbita intorno al sole, le orbite di piccoli oggetti co-orbitali possono assumere forme bizzarre. Alcune di queste orbite possono essere stabili per centinaia di milioni di anni.

1. Con $\mathrm{M}_B = 0.0001$, si usino le condizioni iniziali $x(0) = 0.499$, $y(0) = 0.79$, $v_X(0) = -0.71421$, $v_y(0) = 0.438729$ e si osservi l'orbita dell'asteroide, misurandone se possibile l'eventuale periodo o il primo tempo di ritorno "vicino" alle condizioni iniziali.
2. Si consideri il punto di coordinate $x = x_L = 0.5 - \mathrm{M}_B, y = y_L = \sqrt{3}/2$. Provate a mettere inizialmente il corpo celeste $P$ in questo punto con una piccola velocità: $x(0) = x_L$, $y(0) = y_L$ con $v_x(0) = 0$ e $v_y(0) = 0.01$ e seguite il moto per vari valori di $\mathrm{M}_B$, ad esempio $\mathrm{M}_B = 0.01$, $\mathrm{M}_B = 0.04$, $\mathrm{M}_B = 0.1$, commentando i vari casi.
3. Orbite a *ferro di cavallo*: alcuni asteroidi condividono l'orbita di un pianeta senza mai entrare in collisione. Per un osservatore che ruota insieme al pianeta, la forma delle orbite risultanti è davvero curiosa. Sia $\mathrm{M}_B = 0.0001$, a provate ad integrare le equazioni del moto usando le condizioni iniziali: $x(0) = -1.03552$, $y(0) = 0$ con $v_x(0) = 0$ e $v_y(0) = 0.331842$ e osservate l'orbita risultante. Avete la pazienza calcolarne il periodo? Un'altra orbita interessante la si ottiene con le condizioni iniziali: $x(0) = 1.06691$, $y(0) = 0.435202$, $v_x(0) = 0.370381$, $v_y(0) = -1.79883$. Che caratteristiche ha? È periodica? su che scala di tempo? Come si comporta su scale di tempo dell'ordine del periodo di rivoluzione di $B$ intorno ad $A$ ($T = 1$)?

**Regole**

- Il programma va consegnato come file di testo semplice (niente word, niente pdf), con estensione `.c` (e se necessario, meglio evitare, con file da includere con estensione `.h`). Il programma deve poter essere compilato correttamente. La relazione va consegnata in un unico file pdf contenente commenti, discussioni e grafici.
- Usate solo i primi 128 caratteri ASCII per il codice (per esempio niente lettere accentate).
- Non usate la libreria conio.h, che viene fornita solo in alcuni compilatori ma è assente in molti altri.
- Se davvero necessario (in linea di principio vanno inclusi nella relazione in formato pdf) potete allegare grafici anche separatamente nei formati postscript, pdf o jpeg (assolutamente vietato il formato bitmap, nel quale i file risulterebbero troppo grandi).
- Non possono essere allegati file di dati. Il programma deve poter riprodurre tutti i dati discussi e presentati nella relazione, in un formato direttamente accessibile da gnuplot, con i commenti preceduti da `#`.

Gli studenti del prof. Marinari dovranno inviare il compito in allegato all'indirizzo email:

`lfc.docente@gmail.com`

Gli studenti dei proff. Cammarota e Maiorano dovranno inviare il compito in allegato all'indirizzo email:
`lfc1.box@gmail.com`

Gli studenti del prof. Ricci-Tersenghi dovranno inviare il compito in allegato all'indirizzo email:
`lfc1esonero@gmail.com`

La consegna deve avvenire entro le ore 18:00 di mercoledì 5 novembre 2014.