Alapvető algoritmusok

Greedy szeminárium

Dr. Pătcaș Csaba

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
Matematika és Informatika Kar

Mohó pénzautomata

Feladat

A *mohó pénzautomatában* n $(1 \leq n \leq 1\ 000\ 000)$ különböző címletű bankjegy található, melyeknek ismertek $b_1, \ldots, b_n$ értékei, melyek páronként különbözőek és biztosan szerepel közöttük az 1 $(1 \leq b_i \leq 1\ 000\ 000\ 000, \forall i = \overline{1, n})$.
Ha valaki egy s pénzösszeget szeretne kivenni az automatából, akkor az nevéhez hűen kiad egy b_k címletű bankjegyet, amely a legnagyobb azok közül melyek nem nagyobbak, mint s, majd ugyanezt az eljárást folytatja az $s - b_k$ összegre.
Feltételezve, hogy végtelen számú bankjegy található az automatában minden címletből és bármekkora összeget kivehetünk az automatából, legtöbb hány különböző címletű bankjegyre tehetünk szert?

Mohó pénzautomata
Példák

Bemenet: $b = [1\ 2\ 4\ 8\ 16\ 32]$

Kimenet: Mind a 6 címletből kapunk, ha pl. $s = 63$

Bemenet: $b = [1\ 3\ 6\ 8\ 15\ 20]$

Kimenet: 4

- A példák alapján arra gondolhatunk, hogy amikor s az összes szám összege, akkor kapjuk az optimális megoldást, de erre az alábbi példa rácáfol.
- $b = [1\ 7\ 8]$, $16 = 8 + 8$, míg az optimális $9 = 8 + 1$
- Innen jöhetne az ötlet, hogy külön esetként kell kezelni, ha két egymásutáni szám összege egyenlő pont a következő számmal a sorban, de ezzel sem fedtünk le minden esetet.
- $b = [1\ 3\ 5\ 7\ 15]$, $31 = 15 + 15 + 1$, miközben az optimális megoldás $26 = 15 + 7 + 3 + 1$

Mohó pénzautomata

Elemzés

- Az eddigi példákban mindig megpróbáltuk felépíteni azt az s értéket, amely maximizálja a kapott címletek számát.
- A probléma abból eredt, hogy az automata nem azokkal a címletekkel fizette ki az s összeget, amelyekből mi kiraktuk azt.
- A helyes megoldáshoz azt kell észrevennünk, hogy az eddig felépített összeghez csak akkor érdemes hozzávenni egy elemet, ha ezzel nem haladjuk meg a következő elemet a rendezett sorozatban.
- Vegyük észre, hogy a megoldásunk ugyanúgy a mohó stratégiát alkalmazza, mint a *mohó pénzautomata* :)

Figyeljük meg, hogy ezt a módszert alkalmazva az első és az utolsó elem is mindig hozzá fog tartozni a megoldáshoz:

1. Mivel az 1 mindig a számsor része lesz, a rendezett sorozatban mindig ő lesz az első és nem veszítünk semmit azzal, ha a megoldáshoz hozzávesszük.
2. A sorozat bejárása után, ha az utolsó elem nagyobb, mint az addig felépített s összeg, akkor nyugodtan hozzávehetjük a megoldáshoz, mert egyedi az $s + b[n]$ összeget is úgy fogja felbontani az automata, ahogy felépítettük.
3. Az az eset meg nem állhat fenn, hogy az utolsó elem kisebb vagy egyenlő, mint az addigi összeg, mert az összeget csak akkor növeljük, ha vagy az utolsó, vagy egy nála kisebb korábbi elemet nem haladunk meg.

Mohó pénzautomata
Megoldás


```
ALGORITMUS Pénzautomata(b, n)
  RendezNövekvőbe(b, n)
  osszeg = 0
  cimlet = 1
  MINDEN i = 1, n - 1 végezd el:
    HA (osszeg + b[i] < b[i + 1])
      osszeg = osszeg + b[i]
      cimlet = cimlet + 1
    VÉGE(Ha)
  VÉGE(Minden)
  VISSZATÉRÍT cimlet
VÉGE(Algoritmus)
```

Minimális lefedés

Feladat

Adott n darab zárt intervallum egész végpontjaikon keresztül és egy m természetes szám. Az adott intervallumok közül legkevesebb hányra van szükség, hogy lefedjük a teljes $[0, m]$ intervallumot?

Példa

$n = 5, m = 10$

$[-2, 5]$

$[7, 8]$

$[-10, 7]$

$[8, 100]$

$[5, 12]$

Megoldás: $[-2, 5], [5, 12]$

- A példából látjuk (és hasonló feladatok ismeretében sejtjük), hogy nem célravezető a leghosszabb intervallumokkal kezdeni.
- Hasonló okokból az sem lesz jó, ha a legkorábban kezdődő intervallumokkal kezdjük, vagy a legkevesebb intervallum által keresztezett darabokat próbáljuk először lefedni.

- Nyilvánvaló, hogy a 0-ást le kell fednünk valamikor, a megoldást felépíthetjük balról jobbra haladva.
- A mohó stratégiát követve, azt az intervallumot választjuk, amely a 0-át is magában foglalja és a legtávolabbra tart jobbra, vagyis amelyre lefedhetjük a $[0, x]$ intervallumot, úgy, hogy az x maximális legyen.
- Ha $x < m$, akkor ezt követően ismételjük az eljárást az $[x, m]$ intervallumra.

Költözik a múzeum. A tárgyakat kocka alakú, különböző méretű ládákba csomagolták. Kicsomagoláskor több személy dolgozik egyidőben. A rendetlenség elkerülése végett, azokba a helyiségekbe, ahol a kicsomagolás folyik felszereltek egy futószalagot, amelyre az üres ládákat helyezik, a nyitott felükkel felfele. A futószalag végéhez egy gyereket állítottak, akinek az a feladata, hogy összeszedje a ládákat és úgy helyezze egyiket a másikba, (ha lehetséges), hogy végül a ládacsomagok száma a lehető legkisebb legyen. Az igazgató úgy látja, hogy a gyerek tanácstalan, ezért még hozzáteszi:

Múzeum

Kijelentés

- A ládákat az érkezésük sorrendjében kell a futószalagról levenni.
- Az aktuális láda csak egy nála nagyobb méretű ládába helyezhető.
- Ha nincs olyan megkezdett csomag, amelybe elhelyezhető az aktuális láda, akkor ez a láda egy új csomag első ládája lesz.
- Egy megkezdett csomagba csak egyetlen láda helyezhető, vagyis nem lehet két ládát egymás mellé helyezni még akkor sem, ha ez egyébként lehetséges volna.
- Egy elhelyezett ládát többé nem szabad mozgatni.
- Egy megkezdett csomag nem helyezhető egy másik csomagba még akkor sem, ha ez egyébként lehetséges volna.
- Egyetlen ládát sem lehet figyelmen kívül hagyni.

Állapítsuk meg, hogy minimálisan hány ládába lehet a ládasorozatot összepakolni, továbbá, hogy mely ládák lesznek egybepakolva.

Múzeum
Példa

Bemenet: [4 1 5 10 7 9 2 8 3 2]

Kimenet:

4

4 1

5 2

10 7 3 2

9 8