Backtracking

Visszalépéses keresés

Babeș-Bolyai Tudományegyetem

Permutációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, ..., n$.

Határozzuk meg a halmaz összes permutációját.

1. Permutáció értelmezése.

Permutációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, \ldots, n$.

Határozzuk meg a halmaz összes permutációját.

1. Permutáció értelmezése.
2. Hány permutációja van egy adott halmaznak?

Permutációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, ..., n$.

Határozzuk meg a halmaz összes permutációját.

1. Permutáció értelmezése.
2. Hány permutációja van egy adott halmaznak?

$$P(n) = n!$$

3. Hogyan generáljuk ki az összes permutációt?

Permutációk 2

- 1. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, ..., n)$
- 2. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, ..., n)$

  ...
- i. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, ..., n)$

  ...
- n. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, ..., n)$

Belső feltétel: minden szám csak egyszer fordulhat elő. Optimalizálási lehetőség.

Észrevétel: ugyanaz a feladat minden szinten.

Permutációk 3

Megoldási módszerek:

1. Minden i. elem kiválasztásakor ellenőrizzük, hogy az előtte levő választásokban nem szerepel-e az aktuálisan kiválasztott szám. $(x_k \neq x_i, \forall i = \overline{1, n})$

   Az ellenőrzés átlagos bonyolultsága: ...?

Permutációk 3

Megoldási módszerek:

1. Minden i. elem kiválasztásakor ellenőrizzük, hogy az előtte levő választásokban nem szerepel-e az aktuálisan kiválasztott szám. $(x_k \neq x_i, \forall i = \overline{1, n})$

   Az ellenőrzés átlagos bonyolultsága: ...?

2. Nyilvántartjuk egy logikai tömbben, hogy egy számot használtunk-e vagy sem.

   Az ellenőrzés átlagos bonyolultsága: ...?

Variációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, \ldots, n$, és egy k $(k \leq n)$ szám.

Határozzuk meg a halmaz összes k-ad rendű variációját.

1. Variáció értelmezése.

Variációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, \ldots, n$, és egy k $(k \leq n)$ szám.

Határozzuk meg a halmaz összes k-ad rendű variációját.

1. Variáció értelmezése.
2. Hány k-ad rendű variációja van egy adott halmaznak?

Variációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, \ldots, n$, és egy k $(k \leq n)$ szám.

Határozzuk meg a halmaz összes k-ad rendű variációját.

1. Variáció értelmezése.
2. Hány k-ad rendű variációja van egy adott halmaznak?

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Variációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, \dots, n$, és egy k $(k \leq n)$ szám.

Határozzuk meg a halmaz összes k-ad rendű variációját.

1. Variáció értelmezése.
2. Hány k-ad rendű variációja van egy adott halmaznak?

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Hogyan generáljuk ki az összes variációt?

Variációk 2

- 1. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, ..., n)$
- 2. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, ..., n)$

  ...
- i. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, ..., n)$

  ...
- **k**. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, ..., n)$

Belső feltétel: minden szám csak egyszer fordulhat elő.
Optimalizálási lehetőség.

Észrevétel: ugyanaz a feladat minden szinten.

Variációk 3

Megoldási módszerek:

1. Minden i. elem kiválasztásakor ellenőrizzük, hogy az előtte levő választásokban nem szerepel-e az aktuálisan kiválasztott szám. $(x_k \neq x_i, \forall i = \overline{1, n})$

   Az ellenőrzés átlagos bonyolultsága: ...?

Variációk 3

Megoldási módszerek:

1. Minden i. elem kiválasztásakor ellenőrizzük, hogy az előtte levő választásokban nem szerepel-e az aktuálisan kiválasztott szám. $(x_k \neq x_i, \forall i = \overline{1, n})$

   Az ellenőrzés átlagos bonyolultsága: ...?

2. Nyilvántartjuk egy logikai tömbben, hogy egy számot használtunk-e vagy sem.

   Az ellenőrzés átlagos bonyolultsága: ...?

Kombinációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, \ldots, n$, és egy k $(k \leq n)$ szám.

Határozzuk meg a halmaz összes k-ad rendű kombinációját, azaz

Kombinációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, \ldots, n$, és egy k $(k \leq n)$ szám.

Határozzuk meg a halmaz összes k-ad rendű kombinációját, azaz a halmaz összes k-ad rendű részhalmazát.

1. Kombináció értelmezése.

Kombinációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, \ldots, n$, és egy k ($k \leq n$) szám.

Határozzuk meg a halmaz összes k-ad rendű kombinációját, azaz a halmaz összes k-ad rendű részhalmazát.

1. Kombináció értelmezése.
2. Hány k-ad rendű kombinációja van egy adott halmaznak?

Kombinációk

Adott egy n elemű halmaz, melynek elemei: $1, 2, \ldots, n$, és egy k ($k \leq n$) szám.

Határozzuk meg a halmaz összes k-ad rendű kombinációját, azaz a halmaz összes k-ad rendű részhalmazát.

1. Kombináció értelmezése.
2. Hány k-ad rendű kombinációja van egy adott halmaznak?

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

3. Hogyan generáljuk ki az összes kombinációt?

Kombinációk 2

- 1\. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, \ldots, n)$

  ...
- i\. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, \ldots, n)$

  ...
- k\. helyre kiválaszthatunk bármely számot $(1, \ldots, n)$

Belső feltétel: minden szám csak egyszer fordulhat elő.
Ugyanaz a *részhalmaz* csak egyszer fordulhat elő.

Észrevétel: ugyanaz a feladat minden szinten.

Kombinációk 3

A megoldás elfogadásához az adott részhalmaz egyedi kell hogy legyen.

Hogyan **garantáljuk** ezt?

Kombinációk 3

A megoldás elfogadásához az adott részhalmaz egyedi kell hogy legyen.

Hogyan **garantáljuk** ezt?

Értelmezünk egy rendezési relációt a számok között, és kikötjük, hogy csak *növekvő* sorokat szabad építsünk.

$\Rightarrow$ minden részhalmaz építéséből kifolyólag egyedi lesz.

Kombinációk 3

A megoldás elfogadásához az adott részhalmaz egyedi kell hogy legyen.

Hogyan **garantáljuk** ezt?

Értelmezünk egy rendezési relációt a számok között, és kikötjük, hogy csak *növekvő* sorokat szabad építsünk.

$\Rightarrow$ minden részhalmaz építéséből kifolyólag egyedi lesz.

Az ellenőrzés átlagos bonyolultsága: ...?

Halmaz-partíciók

Generáljuk az $\{1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}^*$ halmaz partícióit!
Egy $M = \{1, 2, ..., n\}$ halmaz partíciói alatt a halmaz *diszjunkt részhalmazokra való felbontását* értjük. Ezek egyesítése az M halmazt eredményezi.

$$M = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_k, M_i \subseteq M, i = \overline{1, k},$$

$$M_i \cap M_j = \emptyset, \forall i, j = \overline{1, k}, i \neq j, k = \overline{1, n}$$

Halmaz-partíciók 2

Példa: legyen $M = \{1, 2, 3\}$

	x_1	x_2	x_3	
$\{1, 2, 3\}$ $M = M_1$	1	1	1	$(1, 2, 3 \in M_1)$
$\{1, 2\} \cup \{3\}$ $M = M_1 \cup M_2$	1	1	2	$1, 2 \in M_1$ $3 \in M_2$
$\{1, 3\} \cup \{2\}$ $M = M_1 \cup M_2$	1	2	1	$1, 3 \in M_1$ $2 \in M_2$
$\{1\} \cup \{2, 3\}$ $M = M_1 \cup M_2$	1	2	2	$1 \in M_1$ $2, 3 \in M_2$
$\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$ $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$	1	2	3	$1 \in M_1$ $2 \in M_2$ $3 \in M_3$

Halmaz-partíciók 3

Megjegyzések

1. A halmazpartíciók esetében a sorrend nem számít, csak a részhalmazok.
2. Egyediség: rendezési reláció.
3. Minden i elem, amely hozzátartozik az M halmazhoz, csak egyetlen M_j részhalmazhoz tartozhat.
4. A partíciót egy olyan $x_1, x_2, ..., x_n$ sorozatt alkotoljuk, amelynek x_i elemei azoknak az M_j részhalmazoknak a j indexei, amelyhez az i elem tartozik.
5. Az 1 mindig eleme M_1 nek
6. A 2 eleme M_1-nek, vagy M_2-nek $\Rightarrow$ i nem tartozhat csak az $M_1, M_2, ..., M_i$ halmazok egyikéhez.

Halmaz-partíciók 4

Az **általános lépés**:

- Ha eljutottunk az i-hez $\Rightarrow$ az előző elemeket már elhelyeztük.
  A partícióban már megvannak az $M_1, M_2, ..., M_k, k < i$) részhalmazok.
- Az i elemet vagy hozzáadjuk valamely már létező részhalmazhoz, vagy új M_{k+1} részhalmazt alakítunk belőle
- A továbbiakban, azt a feladatot, amit megoldottunk i-re, megoldjuk $i + 1$ re.

Megállási feltétel: az M halmaz valamennyi eleme be van osztva részhamazokba.