Algoritmika

5. szeminárium

Orosz szorzás

Adottak az *a*, *b* természetes számok. Számoljuk ki *a*b*-t.**
(Használjuk az orosz paraszt módszerét)

Példa: $x = 45$, $y = 17$

$x * y = 765$

Csak a következő műveleteket "ismerjük":

- **el tudjuk dönteni, hogy egy szám páros-e**
- **össze tudunk adni két számot**
- **össze tudunk hasonlítani egy számot 0-val**
- **felezni tudunk egy számot**

Orosz szorzás

x	y	p
45	17	0

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	= p+y

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	**17**

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
= x/2	**= y*2**	

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	**34**	

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
x/2	**y*2**	

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	**= p+y**

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	**85**

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	85
= x/2	= y*2	

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	85
5	**136**	

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	85
5	136	**= p+y**

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	85
5	136	**221**

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	85
5	136	221
= x/2	= y*2	

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	85
5	136	221
2	**272**	

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	85
5	136	221
2	272	
= x/2	**= y*2**	

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	85
5	136	221
2	272	
1	**544**	

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	85
5	136	221
2	272	
1	544	**= p+y**

Orosz szorzás

Minden lépésben:

- **Ha x páratlan, akkor az y-t hozzáadjuk a szorzathoz**
- **x-et felezzük**
- **y-t duplázzuk**

Ha x=0, akkor végeztünk, a szorzatban meglesz a végleges eredmény

x	y	p
45	17	0
45	17	17
22	34	
11	68	85
5	136	221
2	272	
1	544	**765**

Gyors hatványozás

Adott az x valós és az n természetes szám. Számoljuk ki x^n-t.

Példa: **$x = 2$, $n=11$**

$x^n=2048$

Gyors hatványozás

Adott az x valós és az n természetes szám. Számoljuk ki x^n-t.

Példa: **$x = 2$, $n=11$**

$x^n=2048$

Naív algoritmus: n-1 - szer megszorozzuk x-et önmagával

Kérdés: lehet-e jobban?

Gyors hatványozás

A feladatot lényegesebben gyorsabban megoldhatjuk, ha ismételt négyzetre emeléseket használunk.

- $x^{12} = ((x^2)^2)^2 \cdot (x^2)^2$
- $x^{11} = ((x^2)^2)^2 \cdot x^2 \cdot x$

Gyakorlatilag felírjuk n-t kettes számrendszerben és x^n-t felírjuk $(x^2)^k$ alakú számok szorzataként.

- $(12)_2 = 1100$, $x^{12} = x^8 \cdot x^4$
- $(11)_2 = 1011$, $x^{11} = x^8 \cdot x^2 \cdot x$

Gyors hatványozás

```
Algoritmus GyorsHatvány(x, n, eredmény):
{ Bemeneti adat: x, Kimeneti adat: eremény }
    eredmeny ← 1
    Amíg n ≠ 0 végezd el
      Ha n%2 = 1 akkor
        eredmeny ← eredmeny · x
      Vége (ha)
      x ← x · x
      n ← n/2
    Vége (amíg)
Vége (algoritmus)
```

Gyors hatványozás

Algoritmus GyorsHatvány(x, n, eredmény):
{ Bemeneti adat: x, Kimeneti adat: ereмény }

```
{ Bemeneti adat: x, Kimeneti adat: eremény }
        eredmeny ← 1
        Amíg n ≠ 0 végezd el
           Ha n%2 = 1 akkor
               eredmeny ← eredmeny · x
           Vége (ha)
           x ← x · x
           n ← n/2
        Vége (amíg)
Vége (algoritmus)
```

Kérdés: mennyi az algoritmus futási ideje?

Gyors hatványozás

Algoritmus GyorsHatvány(x, n, eredmény):
{ Bemeneti adat: x, Kimeneti adat: eremény }

```
    eredmeny ← 1
    Amíg n ≠ 0 végezd el
       Ha n%2 = 1 akkor
          eredmeny ← eredmeny · x
       Vége (ha)
       x ← x · x
       n ← n/2
    Vége (amíg)
Vége (algoritmus)
```

Kérdés: mennyi az algoritmus futási ideje? O(log n)

Fibonacci számok

Határozzuk meg az n. Fibonacci számot!

Példa: $n=8$, $F_8 = 21$

Fibonacci számok rekurzív definíciója:

- $F_0 = 0$
- $F_1 = 1$
- …
- $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$

Megoldás: A fenti képletet alkalmazva felépítjük a Fibonacci sorozatot

Kérdés: lehet-e jobban?

Fibonacci számok

```
Algoritmus Fibonacci (n):
    Ha n<2 akkor
            visszatérít: n
        Vége (ha)
        a ← 0
        b ← 1
        Minden i = 2, n végezd el
            c ← a + b
            a ← b
            b ← c
        Vége (minden)
        Visszatérít: c
Vége (algoritmus)
```

Fibonacci számok

Algoritmus Fibonacci (n):

```
Ha n<2 akkor
        visszatérít: n
    Vége (ha)
    a ← 0
    b ← 1
    Minden i = 2, n végezd el
        c ← a + b
        a ← b
        b ← c
    Vége (minden)
    Visszatérít: c
Vége (algoritmus)
```

Kérdés: mennyi az algoritmus futási ideje? O(n)

Fibonacci számok

Több lehetőség is létezik az n. Fibonacci-szám meghatározására O(log n) időben
Az egyik lehetőség az alábbi mátrix-egyenlőségre alapul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

- **2 x 2-es mátrixokat konstans idő alatt tudunk összeszorozni**
- **A mátrixok szorzása esetén is alkalmazható a gyorshatvány algoritmus**
- **Így a kezdeti mátrixot logaritmikus időben a megfelelő hatványra tudjuk emelni**