Algoritmika

11. szeminárium

Összeg kifizetése

Adott n különböző címletű bankjegy (b_1, b_2, ..., b_n) és egy S összeg. Állapítsuk meg, hogy kifizethető-e az S összeg a megadott bankjegyek felhasználásával. Minden bankjegyből csak 1 darab áll rendelkezésre.

Példa:

S = 10
b = (1, 2, 5)

Válasz: nem

S = 10
b = (1, 2, 5, 7)

Válasz: igen

Összeg kifizetése

Minden i. bankjegy esetén két választási lehetőségünk van:

- **1. eset**: Nem használjuk fel az i. bankjegyet az összeg kifizetéséhez:
    - továbbra is az S összeget kell kifizetni a megmaradt bankjegyek segítségével

- **2. eset**: Felhasználjuk az i. bankjegyet az összeg kifizetéséhez:
    - a továbbiakban $S\text{-}b_i$ összeget kell kifizetni a megmaradt bankjegyek segítségével

Összeg kifizetése

Legyen X annak a feladatnak a megoldáshalmaza, ahol az $(1,2,\ldots,i)$ bankjegyek segítségével fiztejük ki az S összeget.

1. eset: $\mathbf{i} \notin \boldsymbol{X}$:

   akkor X annak a feladatnak is megoldáshalmaza, ahol az $(1,2,\ldots,i\text{-}1)$ bankjegyek segítségével fiztejük ki az S összeget

2. eset: $\mathbf{i} \in \boldsymbol{X}$:

   akkor $X\text{-}\{i\}$ annak a feladatnak a megoldáshalmaza, ahol az $(1,2,\ldots,i\text{-}1)$ bankjegyek segítségével fiztejük ki az $S\text{-}b_i$ összeget

Összeg kifizetése

Legyen $V_{i,k} \in \{0,1\}$ - az értéke annak az optimális megoldásnak, amely:

- Csak az első i bankjegyet használja
- A k összeget fizeti ki

$V_{i,k} =$ $V_{i\text{-}1,\ k}$ VAGY (ha az első eset áll fenn)

$V_{i\text{-}1,\ k\text{-}bi}$ (ha a második eset áll fenn)

Magyarul: Egy k összeget akkor tudunk kifizetni az $\{1,\ldots,i\}$ bankjegyek segítségével ha vagy a k, vagy a $k\text{-}bi$ összeget ki tudjuk fizetni az $\{1,\ldots,i\text{-}1\}$ bankjegyek segítségével

Összeg kifizetése

```
A[i,k] := A[i-1,k] || A[i-1,k-b_i]
```

a 0 összeget ki tudjuk fizetni

$S=6$

$b_1=1$

$b_2=2$

$b_3=5$

$b_4=7$

	x=0	1	2	3	4	5	6
i = 0	1	0	0	0	0	0	0
1	1						
2	1						
3	1						
4	1						

Összeg kifizetése

```
A[i,k] := A[i-1,k] || A[i-1,k-b_i]
```

S=6

$b_1=1$

$b_2=2$

$b_3=5$

$b_4=7$

	x=0	1	2	3	4	5	6
i = 0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0
3	1	1	1	1	0	1	**1**
4	1						

Összeg kifizetése

- A fenti mátrix minden eleme egy részfeladat, amit megoldottunk ahhoz, hogy a végeredményt megkapjuk.
- A mátrixos ábrázolás abban segít, hogy átlátható legyen, hogy hogyan épül fel a végső megoldás

- A feladat megoldásához nincs szükség egy teljes mátrix tárolására

Összeg kifizetése

Implementálási részletek:

- Egy S méretű a tömbben tároljuk, hogy melyek azok az összegek, amelyeket ki tudunk fizetni
  - Ha a[k] = 1: a k összeget ki tudjuk fizetni
- Kezdetben az a[0] értéket leszámítva, minden érték HAMIS
- A bankjegyeket sorban dolgozzuk fel. Minden i. bankjegy esetén:
  - Ha a[k] = 1: az a[k+b[i]] értéket is igazra állíthatjuk
- Az összes bankjegy feldolgozása után az a[S] értéke lesz a végeredmény

Összeg kifizetése

```
Algoritmus Fizet (S, b, n)
    a[0] = IGAZ
    Minden i = 1, n végezd el
        minden j = S,b[i]  végezd el
            ha b[j-b[i]] = IGAZ akkor
                b[j] = IGAZ
            vége ha
        vége minden
    vége minden
    visszatérít b[S]
vége algoritmus
```

Összeg kifizetése

Kérdés: Hogyan kapjuk meg a felhasznált bankjegyeket?

Hátizsák probléma (knapsack problem)

Bemenet:

- n elem, minden $i.$ elemhez tarozik egy:
  - érték: $e_i \geq 0$
  - súly/méret: $s_i \geq 0$ (feltételezzük, hogy egész szám)
- Kapacitás: S (feltételezzük, hogy egész szám)

Kimenet: Egy halmaz, $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, amely

- maximalizálja a $\sum_{i \in X} e_i$ összeget
- úgy, hogy $\sum_{i \in X} s_i \leq S$

Hátizsák probléma (knapsack problem)

Legyen X = optimális megoldása annak a feladatnak, ahol az $(1,2,\ldots,i)$ elemeket használjuk fel és a maximális kapacitás S.

1. Eset: Feltételezzük, hogy $i \notin X$
   - $\Rightarrow X$ optimális megoldása az első i-1 elemnek (a max. kapacitás marad S)

2. Eset: Feltételezzük, hogy $i \in X$
   - $\Rightarrow X - \{i\}$ optimális megoldása ez első i-1 elemnek, úgy, hogy a max. kapacitás $S - s_i$

Hátizsák probléma (knapsack problem)

Legyen $V_{i,k}$ = az értéke annak az optimális megoldásnak, amely:

- Csak az első i elemet használja
- Az összmérete $\leq k$

$V_{i,k} = \max \{ \quad V_{i\text{-}1,\, k}$ (ha az első eset áll fenn),

$\qquad e_i + V_{i\text{-}1,\, k\text{-}si}$ (ha a második eset áll fenn) $\}$

Hátizsák probléma (knapsack problem)

- $A[i,k] := \max\{ A[i-1,k] , A[i-1,k-s_i] + e_i \}$

$S=6$

$e_1=3$, $s_1=4$

$e_2=2$, $s_2=3$

$e_3=4$, $s_3=2$

$e_4=4$, $s_4=3$

	k=0	1	2	3	4	5	6
i = 0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	3	3	3
2	0	0	0	2	3	3	3
3	0	0	4	4	4	6	7
4	0	0	4	4	4	8	8

Hátizsák probléma (knapsack problem)

- $A[i,k] := \max \{ A[i-1,k] , A[i-1,k-s_i] + e_i \}$

S=6

$e_1=3, s_1=4$

$e_2=2, s_2=3$

$e_3=4, s_3=2$

$e_4=4, s_4=3$

	k=0	1	2	3	4	5	6
i = 0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	3	3	3
2	0	0	0	2	3	3	3
3	0	0	4	4	4	6	7
4	0	0	4	4	4	8	8