Véletlenszám-generátorok

4. rész

– egy MATLAB® alapú megközelítés –

Baja Zsolt, Vas Orsolya

Matematika és Informatika Intézet, Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Románia

(bajazsolt98@gmail.com, vas.orsolya@yahoo.com)

4. labor / 2023. október 23–27.

- Megjegyezzük, hogy az ebben a pontban leírt eljárást még az elfogadás módszerének is nevezik a szakirodalomban – a továbbiakban viszont mi csak az elutasítás módszereként említjük. A módszer lényege a következő tulajdonságokra épül.

1. Tulajdonság

Adott az $f : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ sűrűségfüggvényű X valószínűségi vektor és az ettől független $[0,1]$ intervallumon értelmezett egyenletes eloszlású U valószínűségi változó.

- Ekkor az $(X, cUf(X))$ valószínűségi vektor egyenletes eloszlású az

$$A = \left\{(x,u) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in \mathbb{R}^d,\, 0 \leq u \leq cf(x)\right\}$$

  tartományon, ahol $c > 0$ egy tetszőleges konstans.

- Fordítva, ha (X, U) olyan valószínűségi vektor az $\mathbb{R}^{d+1}$ térben, mely egyenletes eloszlású az A tartományon, akkor az $\mathbb{R}^d$ térbeli X valószínűségi vektor sűrűségfüggvénye éppen f.

Bizonyítás

- Először a direkt állítást bizonyítjuk.
- Tekintsünk egy tetszőleges Borel-mérhető $B \subseteq A$ részhalmazt és ennek az $x \in \mathbb{R}^d$ ponthoz tartozó
$$B_x = \{u : (x, u) \in B\}$$
szekcióját!
- Ekkor
$$P\left((X, cUf(X)) \in B\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{B_x} \frac{1}{cf(x)} \mathrm{d}u \right) f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{c} \int_B \mathrm{d}u\mathrm{d}x,$$
ahol felhasználtuk, hogy az $(X, cUf(X))$ valószínűségi vektor X és $cUf(X)$ komponense független, valamint, hogy az X valószínűségi változó bármely $x \in \mathbb{R}^d$ értékére a $cf(x)\,U$ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0, cf(x)]$ intervallumon, azaz sűrűségfüggvénye azonosan megegyezik az $\frac{1}{cf(x)}$ mennyiséggel ezen az intervallumon.
- Mivel az A tartomány térfogata éppen
$$\int_A \mathrm{d}u\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{cf(x)} \mathrm{d}u\mathrm{d}x = c \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \,\mathrm{d}x = c,$$
a fentiekből következik, hogy az $(X, cUf(X))$ valószínűségi vektor valóban egyenletes eloszlású az A tartományon.

Bizonyítás – folytatás

- A valószínűségi vektorok sűrűségfüggvényének értelmezése alapján a fordított állítás igazolásához be kellene látnunk, hogy bármely $B \subseteq \mathbb{R}^d$ Borel-mérhető halmazra teljesül a
$$P(X \in B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$$
egyenlőség.
- Tetszőlegesen rögzített $B \subseteq \mathbb{R}^d$ Borel-mérhető halmaz esetén vezessük be a
$$B^\star = \{(x,u) : x \in B, 0 \leq u \leq cf(x)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$
jelölést!
- Ekkor a következőket írhatjuk:
$$P(X \in B) = P((X,U) \in B^\star) = \frac{\int_{B^\star} \mathrm{d}u\mathrm{d}x}{\int_A \mathrm{d}u\mathrm{d}x} = \frac{1}{c}\int_B cf(x)\,\mathrm{d}x = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x,$$
amit éppen igazolni kellett.

2. Tulajdonság

Tekintsük az $\{X_i\}_{i \geq 1}$ független, azonos eloszlású, $\mathbb{R}^d$-értékkészletű valószínűségi vektorokból álló sorozatot, továbbá legyen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ egy Borel-mérhető halmaz, amelyre $P(X_1 \in A) = p > 0$. Az Y valószínűségi vektor egyezzen meg az első olyan X_i valószínűségi vektorral, amely értékeit az A halmazból veszi fel!

- Ekkor bármely $B \subseteq \mathbb{R}^d$ Borel-mérhető halmazra az Y eloszlását a

$$P(Y \in B) = \frac{1}{p} P(X_1 \in A \cap B)$$

  képlet adja.

- Sajátságosan, ha X_1 egyenletes eloszlású az A_0 halmazon (ahol $A \subseteq A_0$), akkor Y egyenletes eloszlású az A halmazon.

Bizonyítás

- Vegyük észre, hogy tetszőleges $B \subseteq \mathbb{R}^d$ Borel-mérhető halmaz esetén

$$\begin{aligned} P(Y \in B) &= \sum_{i \geq 1} P(X_1 \notin A, X_2 \notin A, \ldots, X_{i-1} \notin A, X_i \in B \cap A) \\ &= \sum_{i \geq 1} (1-p)^{i-1} P(X_1 \in A \cap B) \\ &= \frac{1}{1-(1-p)} P(X_1 \in A \cap B) \\ &= \frac{1}{p} P(X_1 \in A \cap B), \end{aligned}$$

amit éppen igazolni kellett!

- Ha X_1 egyenletes eloszlású az A_0 halmazon, akkor

$$P(Y \in B) = \frac{P(X_1 \in A \cap B)}{P(X_1 \in A)} = \frac{\int_{A_0 \cap A \cap B} \mathrm{d}x}{\int_{A_0} \mathrm{d}x} \frac{\int_{A_0} \mathrm{d}x}{\int_{A_0 \cap A} \mathrm{d}x} = \frac{\int_{A \cap B} \mathrm{d}x}{\int_{A} \mathrm{d}x},$$

amiből következik, hogy Y egyenletes eloszlású az A halmazon.

- Az elutasítás módszerének alapértelmezett változata feltételezi, hogy az $f : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ sűrűségfüggvényű X valószínűségi vektor esetén létezik egy olyan $g : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ sűrűségfüggvény és egy olyan $c \geq 1$ konstans, amelyek esetén teljesül az
$$f(x) \leq cg(x), \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{1}$$
egyenlőtlenség.
- Ekkor f sűrűségfüggvényű valószínűségi vektorokat az alábbi algoritmussal generálhatunk.

1. Algoritmus (Az elutasítás módszerének alapértelmezett változata)

- *Bemenet:* az (1)-es feltételt kielégítő $f, g : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ sűrűségfüggvények, a $c \geq 1$ „elutasítási" konstans, valamint az $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneti mintavétel nagyságát határozza meg.
- *Kimenet:* az f sűrűségfüggvénnyel jellemzett X valószínűségi vektornak egy n-elemű független $\{X_i\}_{i=1}^n$ mintavétele.

1. **Minden** $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre **végezd el**:
2. **ismételd:**
3. generáld az $\mathbb{R}^d$ térbeli g sűrűségfüggvényű Y valószínűségi vektort, valamint az ettől független $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ valószínűségi változót
4. **ameddig** $U \leq \dfrac{f(Y)}{cg(Y)}$
5. $X_i = Y$.

Az elutasítás módszerének helyessége

- A 1. algoritmus helyességét vagy az 1. és a 2. tulajdonságok együttes alkalmazásával, vagy akár direkt számolással is beláthatjuk.
- Minden $i = 1, 2, \ldots, n$ index és $B \subset \mathbb{R}^d$ Borel-mérhető halmaz esetén a következőket írhatjuk:

$$
\begin{aligned}
P\left(X_i \in B\right) &= P\left(Y \in B \,\middle|\, U \leq \frac{f\left(Y\right)}{cg\left(Y\right)}\right) = \frac{P\left(\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) \cap \left(Y \in B\right)\right)}{P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{y \in B} P\left(U \leq \frac{f\left(Y\right)}{cg\left(Y\right)} \,\middle|\, Y = y\right) g\left(y\right) dy}{\displaystyle\int_{y \in \mathbb{R}^d} P\left(U \leq \frac{f\left(Y\right)}{cg\left(Y\right)} \,\middle|\, Y = y\right) g\left(y\right) dy} = \frac{\displaystyle\int_{y \in B} \frac{f\left(y\right)}{cg\left(y\right)} g\left(y\right) dy}{\displaystyle\int_{y \in \mathbb{R}^d} \frac{f\left(y\right)}{cg\left(y\right)} g\left(y\right) dy} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{y \in B} f\left(y\right) dy}{\displaystyle\int_{y \in \mathbb{R}^d} f\left(y\right) dy} = \int_{y \in B} f\left(y\right) dy,
\end{aligned}
$$

vagyis az X_i mintavételbeli valószínűségi vektor sűrűségfüggvénye éppen f.

Az elutasítás módszerének tanulmányozása

- Jelölje N azt a valószínűségi változót, mely azt számolja, hogy az 1. algoritmusbeli **ismételd–ameddig** ciklus hány (Y, U) párt generál valamely $i = 1, 2, \ldots, n$ index esetén az $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$ leállási feltétel teljesüléséig.
- Ugyanakkor vegyük észre, hogy a leállási feltétel

$$p = P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} P\left(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)} \middle| Y = y\right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{cg(y)} g(y)\, dy$$
$$= \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, dy = \frac{1}{c}$$

  valószínűséggel következik be!
- Ekkor az N valószínűségi változó p-paraméterű geometriai eloszlást követ, hiszen $P(N = j) = (1 - p)^{j-1} p$, $j \geq 1$. Ezért egyetlen f sűrűségfüggvényű X_i minta generálása várhatóan $E(N) = \frac{1}{p} = c$ iteráció alatt történik, és ennek a várható iterációszámnak a szórásnégyzete $D^2(N) = \frac{1-p}{p^2} = c^2 - c$. Mindezekből következik, hogy a c konstans értékét a lehető legkisebbnek célszerű megválasztani. Az N geometriai eloszlása miatt a $P(N = j) = (1 - p)^{j-1} p$ valószínűségek exponenciális sebességgel csökkenek: vegyük észre, hogy $P(N > j) = (1 - p)^j \leq e^{-pj}$, $j \geq 1$.

- Jelölje $\mathcal{C}_{M,a,b}$ az $f : [a, b] \to [0, M]$ $(M > 0)$ sűrűségfüggvények osztályát. Ekkor minden $f \in \mathcal{C}_{M,a,b}$ sűrűségfüggvényt az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás $g(x) = \frac{1}{b-a}$ sűrűségfüggvényével majorálhatunk úgy, hogy a c elutasítási konstanst $M(b-a)$ alakban választjuk meg. Az 1. algoritmus ekkor a következőképpen módosul.

2. Algoritmus (Kompakt tartományú és korlátos sűrűségfüggvények esete)

- *Bemenet:* az $f \in \mathcal{C}_{M,a,b}$ sűrűségfüggvény és az $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneti mintavétel nagyságát határozza meg.
- *Kimenet:* az f sűrűségfüggvényű X valószínűségi változónak egy n-elemű független $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ mintavétele.

Minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre **végezd el**:

  ismételd:

    generáld a független $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ és $V \sim \mathcal{U}([0,1])$ valószínűségi változókat

    $Y \leftarrow a + (b-a)V$

  ameddig $UM \leq f(Y)$

  $X_i = Y$.

- Elégséges csak az $\mathcal{N}(0,1)$ standard normális eloszlású valószínűségi változók generálását megoldanunk, hiszen egy alkalmas lineáris transzformációval általános $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ normális eloszlású számokat mintavételezhetünk ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$).
- Ismert tény, hogy az

$$F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

  eloszlásfüggvényt nem tudjuk elemi függvényekkel kifejezni, ezért az egzakt inverziós módszer nem alkalmas, a közelítő numerikus inverziós módszer pedig – a (2)-es képletbeli improprius integrál kvadratúra képletekkel történő ismételt approximálása miatt – túlságosan költséges lenne standard normális eloszlású valószínűségi változók generálására. Ezért más módszerekhez kell folyamodnunk.
- Az egyik lehetőség az alábbi, Laplace-féle sűrűségfüggvényre épülő, elutasítás típusú módszer.

- Tekintsük a standard normális eloszlás

$$f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R}$$

sűrűségfüggvényét!

- Ha az $f_{\mathcal{N}(0,1)}$ függvényre keresünk felső határt, akkor valójában az $\frac{x^2}{2}$ függvényre kell egy alsó határt találnunk.
- Vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{2}(|x| - 1)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - |x| \geq 0,$$

ezért

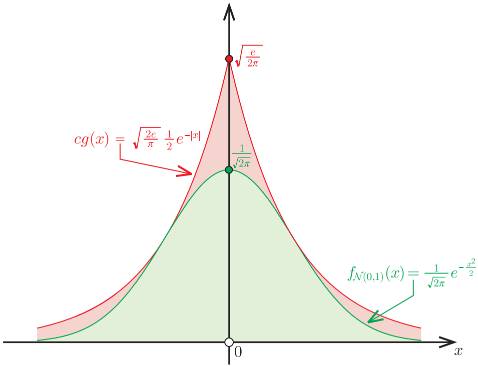
$$f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2} - |x|} = cg(x),$$

ahol

$$g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}$$

a Laplace-féle (másképpen dupla-exponenciális) sűrűségfüggvényt, $c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$ pedig az elutasítási konstanst jelöli.

- Az 1. ábra szemlélteti ezeket a függvényeket.



1. ábra. Az elutasítás módszerére épülő 3. algoritmus a standard normális eloszlás $f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényét, valamint az azt határoló $cg(x)$ függvényt használja fel, ahol $g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ a Laplace-féle (másképpen dupla-exponenciális) sűrűségfüggvényt, $c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$ pedig az optimális elutasítási konstanst jelöli.

3. Algoritmus ($\mathcal{N}(0,1)$-eloszlású számgenerátor a Laplace-féle sűrűségfüggvény alapján)

- *Bemenet:* az $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneti mintavétel méretét rögzíti.
- *Kimenet:* az $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ valószínűségi változónak egy n-elemű független $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ mintavétele.

1. **Minden** $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre **végezd el**:
2. **ismételd:**
3. generáld az $Y \sim \mathcal{E}xp(1)$, $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ és $V \sim \mathcal{U}([0,1])$ független valószínűségi változókat
4. **ha** $U < \frac{1}{2}$, **akkor** $Y \leftarrow -Y$
5. **ameddig** $Ve^{\frac{1}{2}-|Y|} \leq e^{-\frac{Y^2}{2}}$
6. $X_i \leftarrow Y$.

- Vegyük észre, hogy a 3. algoritmus 4. sorában feleslegesen generálunk véletlenszerű előjelet olyan Y exponenciális eloszlású valószínűségi változók esetén, amelyeket elutasítunk! Ugyanakkor numerikus szempontból jobb, ha az algoritmus **ismételd–ameddig** ciklusának 5. sorában megfogalmazott leállási feltételben az exponenciális függvény helyett természetes alapú logaritmust használunk. Ezért a 3. algoritmus az alábbi trükkel hatékonyabbá tehető.

4. Algoritmus (A 3. algoritmus optimálisabb változata)

- *Bemenet:* egy $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneti mintavétel méretét szabja meg.
- *Kimenet:* az $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ valószínűségi változónak egy n-elemű független $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ mintavétele.

1. **Minden** $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre **végezd el**:
2. **ismételd:**
3. generáld a független $Y \sim \mathcal{E}xp(1)$ és $V \sim \mathcal{U}([-1,1])$ valószínűségi változókat
4. **ameddig** $(Y-1)^2 \leq -2\ln(|V|)$
5. $X_i \leftarrow Y \operatorname{sign}(V)$.

- Adott $f : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ és az azt majoráló $g : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ sűrűségfüggvények esetén a c elutasítási konstans értéke legalább a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{f(x)}{g(x)}$$

  mennyiséggel kell megegyezzen.

- Semmit sem veszítünk ezzel a beállítással, hiszen ekkor az f és cg függvények érintik valahol egymást.

- A 3. algoritmus esetén a g majoráló sűrűségfüggvényt egy speciális egyenlőtlenség szerkesztésével határoztuk meg, sokszor viszont bölcsebb, ha az ismeretlen majoráló sűrűségfüggvényt egy $\theta \in \mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$ paramétervektortól függő

$$\left\{ g_\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \theta \in \mathbb{R}^k \right\}$$

  sűrűségfüggvény-család legjobb g_θ elemeként választjuk ki úgy, hogy az optimális elutasítási konstanst a

$$c_\theta = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{f(x)}{g_\theta(x)}$$

  alakban választjuk meg, ahol azt a θ paramétervektort tekintjük optimálisnak, amelyre c_θ minimális, azaz amelyre c_θ értéke a lehető legközelebb esik az 1-hez.

- Ezt az optimalizálási folyamatot egy példán keresztül mutatjuk be.
- Az egyszerűség kedvéért maradjunk a standard normális eloszlás

$$f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

  sűrűségfüggvényénél, valamint válasszuk ki az ezt majoráló sűrűségfüggvényt a

$$\left\{ g_\theta(x) = \frac{\theta}{\pi} \frac{1}{x^2 + \theta^2}, x \in \mathbb{R} : \theta > 0 \right\}$$

  Cauchy-féle sűrűségfüggvények családjából, ahol θ egy skálázási paraméter.
- Mivel bármely $\theta > 0$ paraméter esetén a g_θ sűrűségfüggvény az $f_{\mathcal{N}(0,1)}$ sűrűségfüggvényhez hasonlóan szigorúan növekszik a $(-\infty, 0]$ intervallumon, illetve szigorúan csökken a $[0, \infty)$ tartományon, a θ skálázási paraméter mellett nincs szükség egyéb, például transzlációs, paraméter bevezetésére.

- A továbbiakban kimutatjuk, hogy ebben a sajátos esetben az optimális elutasítási konstans

$$c_\theta = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{e\theta} e^{\frac{\theta^2}{2}}, & 0 < \theta < \sqrt{2}, \\ \\ \theta\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \theta \geq \sqrt{2} \end{cases} \tag{3}$$

alakú.

- A következőképpen gondolkodhatunk: az $\frac{f_{\mathcal{N}(0,1)}}{g_\theta}$ függvény maximális, ha a $\ln\left(\frac{f_{\mathcal{N}(0,1)}}{g_\theta}\right)$ függvény maximális.
- Szélsőértékhely érdekében a
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(\frac{f_{\mathcal{N}(0,1)}(x)}{g_\theta(x)}\right) = 0$$
egyenletet kell megoldanunk, amely a
$$-x + \frac{2x}{x^2+\theta^2} = 0$$
egyszerűbb alakra hozható, ahonnan az $x = 0$ és az $x = \pm\sqrt{2-\theta^2}$ szélsőértékhelyeket kapjuk eredményül, ahol az utóbbi esetnek csak a $\theta^2 \leq 2$ feltétel teljesülésekor van értelme.
- Az $x = 0$ pontra az $\frac{f_{\mathcal{N}(0,1)}}{g_\theta}$ függvény a $\theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ értéket veszi fel, míg az $x = \pm\sqrt{2-\theta^2}$ esetén az $\frac{f_{\mathcal{N}(0,1)}}{g_\theta}$ értéke éppen $\frac{\sqrt{2\pi}}{e\theta}e^{\frac{\theta^2}{2}}$.
- Könnyű belátni, hogy a $0 < \theta < \sqrt{2}$ esetben az $\frac{f_{\mathcal{N}(0,1)}}{g_\theta}$ függvény a maximumát az $x = \pm\sqrt{2-\theta^2}$, a minimumát pedig az $x = 0$ pontokra veszi fel.
- A $\theta \geq \sqrt{2}$ esetben az $\frac{f_{\mathcal{N}(0,1)}}{g_\theta}$ függvény a maximumát az $x = 0$ pontban éri el. Ezzel az optimális c_θ elutasítási konstans (3)-as alakjának helyességét beláttuk.

- Az optimalizálási feladat fennmaradt része már egyszerűbb.
- A c_θ függvénynek egyetlen minimuma van, amelyet a $\theta = 1$ paraméter esetén ér el.
- Ez a minimális érték

$$c_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{e}},$$

amivel az

$$U c_\theta g_\theta(Y) \leq f_{\mathcal{N}(0,1)}(Y)$$

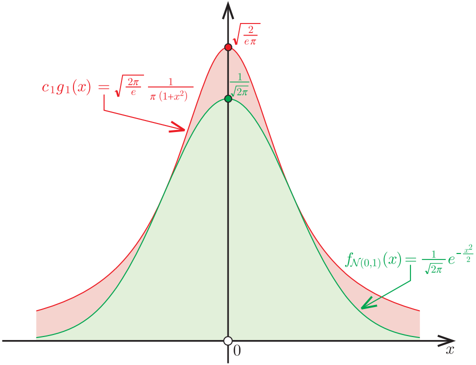
leállási/elfogadási feltételt az

$$U\sqrt{\frac{2\pi}{e}}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+Y^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}}$$

formára, vagy az annál egyszerűbb

$$U \leq \left(1+Y^2\right)\frac{\sqrt{e}}{2} e^{-\frac{Y^2}{2}}$$

alakra hozható, ahol az U valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon, az Y valószínűségi változó pedig Cauchy-eloszlású $\theta = 1$ paraméterrel (lásd 3. labor 1. táblázatát).



2. ábra. Az elutasítás módszerére épülő 5. algoritmus a standard normális eloszlás $f_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényét, valamint az azt majoráló $c_1 g_1(x)$ függvényt használja fel, ahol $g_{1(x)} = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$, $x \in \mathbb{R}$ a $\theta = 1$ paraméterű Cauchy-féle sűrűségfüggvényt, $c_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}$ pedig a Cauchy-féle sűrűségfüggvények $\left\{g_\theta(x) = \frac{\theta}{\pi}\frac{1}{x^2+\theta^2}, x \in \mathbb{R} : \theta > 0\right\}$ családjára nézve az optimális elutasítási konstanst jelöli.

5. Algoritmus ($\mathcal{N}(0,1)$-eloszlású számgenerátor a Cauchy-féle sűrűségfüggvény alapján)

- *Bemenet:* az $n \geq 1$ természetes szám, amely a kimeneti mintavétel méretét határozza meg.
- *Kimenet:* az $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ valószínűségi változónak egy n-elemű független $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ mintavétele.

1. $a \leftarrow \dfrac{\sqrt{e}}{2}$
2. **Minden** $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre **végezd el**:
3.   **ismételd:**
4.   generáld a független $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ és $V \sim \mathcal{U}([0,1])$ valószínűségi változókat
5. $Y \leftarrow \tan(\pi V)$
6. $S \leftarrow Y^2$
7.   **ameddig** $U \leq a(1+S)\,e^{-\frac{S}{2}}$
8. $X_i \leftarrow Y$.

1. feladat

Határozzátok meg az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\left(x^2(3-x) + \frac{5}{2}x\right), & x \in [0,3], \\ 0, & x \notin [0,3] \end{cases}$$

leképezés egy abszolút folytonos X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen, majd kódoljátok a 2. algoritmust az X valószínűségi változó mintavételezésére!

2. feladat

Standard normális eloszlású valószínűségi változók mintavételezése a 4. és 5. algoritmusok segítségével. Hogyan lehetne általános $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változókat ($\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$) generálni ezekkel az algoritmusokkal? Implementáljátok is a válaszotokat!

3. feladat (+1 pont elméleti megoldással együtt)

- Határozzátok meg az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $f_X(x) = \alpha x^2 e^{-6x}$, $x \geq 0$ leképezés egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen, majd keressétek meg a λ-paraméterű

$$\left\{ g_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} : x \geq 0, \lambda > 0 \right\}$$

  exponenciális sűrűségfüggvények családjában azt a g_λ függvényt, amelyre teljesül az $f_X(x) \leq c_\lambda g_\lambda(x)$, $x \geq 0$ egyenlőtlenség úgy, hogy a $c_\lambda = \sup_{x \geq 0} \frac{f_X(x)}{g_\lambda(x)}$ elutasítási konstans optimális!
- Ábrázoljátok az f_X és $c_\lambda g_\lambda$ függvényeket, majd implementáljátok az elutasítás módszerét az X valószínűségi változó mintavételezésére!