

# Központi/centrális határeloszlás tétel

– egy MATLAB® alapú megközelítés –

Baja Zsolt, Vas Orsolya

Matematika és Informatika Intézet, Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Románia

(bajazsolt98@gmail.com, vas.orsolya@yahoo.com)

8. labor / 2023. november 20–24.



- Statisztikai adatfeldolgozásban és gyakorlati alkalmazásokban a legtöbb esetben azonos eloszlású és független valószínűségi változók összegével dolgozunk.
- A továbbiakban olyan feltételeket ismertetünk, amelyek esetén az adott összeg közelítőleg standard normális eloszlású. Érvényes az alábbi tulajdonság.

## 1. Tétel (Központi határeloszlás azonos eloszlású és független valószínűségi változók összegére)

Tekintsük az  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  azonos eloszlású és független valószínűségi változókat, valamint jelölje  $\mu$  és  $\sigma$  a változók létező, közös várható értékét, illetve szórását, azaz

$\mu = E(X_i)$  és  $\sigma = D(X_i)$ ,  $i \geq 1$ . Ekkor az  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$  valószínűségi változónak a

$$Z_n = \frac{Y_n - E(Y_n)}{D(Y_n)} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

úgynevezett standardizált alakja aszimptotikusan  $\mathcal{N}(0, 1)$ -eloszlású, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F_{\mathcal{N}(0,1)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

## Bizonyítás

Lásd a nyomtatott jegyzet 82–83., illetve az elektronikus változat 89–90. oldalait!

## 1. Megjegyzés

Az 1. tétel jelöléseinél és feltételeinél maradva, a következő észrevételeket tehetjük. Rögzített, de eléggé nagy  $n$  értékre az (1)-es határértéket a

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) \approx F_{\mathcal{N}(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

közelítő egyenlőséggel helyettesíthetjük, vagy az ezzel ekvivalens

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n < x) = P(Y_n < x\sigma\sqrt{n} + n\mu) \approx F_{\mathcal{N}(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

közelítéssel, ami azt jelenti, hogy az  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$  valószínűségi változó közelítőleg  $\mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ -eloszlású. Ezért az 1. tételt az alábbi módon is megfogalmazhatjuk.



## 2. Tétel

Tekintsük az  $\{X_i\}_{i \geq 1}$  azonos eloszlású és független valószínűségi változókat, valamint jelölje  $\mu$  és  $\sigma$  a változók létező, közös várható értékét, illetve szórását, azaz  $\mu = E(X_i)$

és  $\sigma = D(X_i)$ ,  $i \geq 1$ ! Ekkor az  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$  valószínűségi változó közelítőleg

$E(Y_n) = n\mu$  várható értékű és  $D(Y_n) = \sigma\sqrt{n}$  szórású normális eloszlást követ (ahol a közelítés nyilvánvalóan annál jobb, minél nagyobb az  $n$  értéke). Az állítást az

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n < y) \approx F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{y - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad (3)$$

alakban is megfogalmazhatjuk.



## 2. Megjegyzés (Optimális mintavétel mérete)

Az 1. tétel jelöléseinél és feltételeinél maradva, a (2)-es képlet alapján felírhatjuk, hogy

$$P\left(\left|\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right| < x\right) \approx F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) - F_{\mathcal{N}(0,1)}(-x) = 2F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) - 1, \quad (4)$$

amit még a szemléletesebb

$$P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \mu\right| < x \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 2F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) - 1 \quad (5)$$

alakra is hozhatunk. Így olyan összefüggést kaptunk, amely alkalmas arra, hogy azonos eloszlású és véges szórású független valószínűségi változókból álló sorozat esetében meghatározzuk azt az  $n$  számot, amelyre adott  $\alpha \in (0, 1)$  szignifikanciaszint mellett a változók számtani átlaga  $1 - \alpha$  valószínűséggel az  $\varepsilon > 0$  küszöbhatárnál kevesebbel tér el a változók közös  $\mu$  várható értékétől.

- Tekintsünk néhány példát a 2. megjegyzésbeli optimális mintavétel meghatározására!



## 1. feladat

Hány kísérletet kell elvégezni ahhoz, hogy valamely  $A$  véletlen esemény relatív gyakorisága 0,95 valószínűséggel 0,05-nél kevesebbel térjen el az ismeretlen  $p = P(A) \neq 0$  valószínűségtől?

## Megoldás

- Az  $A$  eseményt az

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

$\text{Bern}(p)$ -eloszlású valószínűségi változóval írhatjuk le.

- Ekkor egy  $n$  hosszúságú független kísérletsorozat az  $\{X_i \sim \text{Bern}(p)\}_{i=1}^n$  független, azonos eloszlású,  $\mu = p$  várható értékű és  $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$  szórású valószínűségi változókból álló mintavételt jelent.
- Mivel a  $p$  valószínűséget nem ismerjük, ezért a  $p(1-p)$  szorzatot annak legnagyobb lehetséges értékével, az  $\frac{1}{4}$  számmal, helyettesítjük.
- Vegyük észre, hogy az  $n$  kísérlet során az  $A$  esemény bekövetkezéseinek számát az

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

valószínűségi változóval reprezentálhatjuk!



## Megoldás – folytatás

- Ekkor az 1. tétel minden feltétele teljesül és alkalmazhatjuk a 2. megjegyzésbeli (5)-ös becslést az optimális mintavétel  $n$  méretének meghatározására.
- Ezek szerint  $1 - \alpha = 0,95 \approx 2F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) - 1$ , ahonnan

$$F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) \approx 0,975 \Rightarrow x = F_{\mathcal{N}(0,1)}^{-1}(0,975) \approx 1,959963984540054;$$

a küszöbhatárra pedig az

$$\varepsilon = x \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 1,959963984540054 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}} = \frac{0,979981992270027}{\sqrt{n}} = 0,05$$

feltételt kapjuk, ahonnan az optimális mintavétel nagyságára az

$$n \approx \left[ \left( \frac{0,979981992270027}{0,05} \right)^2 \right] = [384,145882069412503] = 384$$

közelítő értéket kapjuk.



## Megoldás – folytatás

- A valószínűségi változók felépítése mellett a feladat fő megoldáskulcsa az  $F_{\mathcal{N}(0,1)}^{-1}(0,975)$  inverz érték meghatározása. Ezt megtehetjük a 3. labor anyagában ismertetett numerikus inverziós algoritmusok valamelyikével, vagy használhatunk egy előre elkészített standard normális eloszlásfüggvény-értékeket tartalmazó táblázatot, illetve használhatjuk a MATLAB<sup>®</sup> beépített **norminv** parancsát is, ahogy azt a

```
% the threshold  $\varepsilon$ 
epsilon = 0.05;
% the significance level  $\alpha$ 
alpha = 1 - 0.95;

% let the standard deviation  $\sigma$  be equal to
% the maximal value of the function  $\sqrt{p(1-p)}$ ,  $p \in [0,1]$ 
sigma = 1 / 2;
% calculate the probability  $u = 1 - \frac{\alpha}{2}$ 
u = 1 - alpha / 2;

% determine the inverse value  $F_{\mathcal{N}(0,1)}^{-1}(u)$ 
x = norminv(u, 0, 1);

% calculate the optimal sample size  $n = \left\lceil \left( \frac{x\sigma}{\varepsilon} \right)^2 \right\rceil$ 
n = round( (x * sigma / epsilon)^2 );
```

kódrészlet mutatja.





## 2. feladat

Ugyanazon gyártássorozatból származó azonos típusú processzorok órajelét ellenőrizve, nagyszámú megfigyelés után a mérnökök azt tapasztalták, hogy a leggyártott processzorok órajele  $\mu = 2800\text{MHz}$  várható értékű és  $\sigma = 708\text{MHz}$  szórású normális eloszlást követ. Ezzel a minőségi szinttel megelégedve, a mérnökök a processzorokat gyártó automatizált gép kalibrálását befejezték. Nyilván elengedhetetlen, hogy további gyártási folyamatok minőségét is ellenőrizzék, viszont mindezt egy optimális méretű mintavétel alapján szeretnék megtenni úgy, hogy elkerüljék a kalibrálás során végigszenvedett hatalmas munkát.

A további gyártási folyamatok során hány processzort kell tanulmányoznunk ahhoz, hogy 90%-os bizonyossággal állíthassuk azt, hogy a megvizsgált processzorok órajeleinek számtani átlaga a fenti ideális várható értékhez képest maximálisan annak 8%-val térjen el?



## Megoldás

- Jelölje  $\{X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)\}_{i=1}^n$  a megvizsgált, egymástól függetlenül legyártott proceszszorok órajelet.
- Ekkor az órajelek számtani átlagát az

$$\frac{1}{n} Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

valószínűségi változóval írhatjuk le. Erre a 2. megjegyzés feltételei teljesülnek és az (5)-ös közelítő képlet, valamint a feladat feltételei alapján a

$$\begin{aligned} 0,9 &= 1 - \alpha \\ &= 2F_{\mathcal{N}(0,1)}(x) - 1 \\ &\approx P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \mu\right| < x \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

összefüggésre jutunk, ahol  $\mu = 2800$ ,  $\sigma = 708$ , a küszöbhatárra pedig az

$$\varepsilon = x \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,08 \cdot \mu = 224$$

megszorítást kapjuk.



## Megoldás – folytatás

- Mindezek függvényében az

$$x \approx F_{\mathcal{N}(0,1)}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) = F_{\mathcal{N}(0,1)}^{-1} (0,95) \approx 1,644853626951473,$$

$$n \approx \left\lceil \left( \frac{x\sigma}{\varepsilon} \right)^2 \right\rceil = [27,028689691758689] = 27$$

számértékeket kapjuk, azaz elégséges csak 27 darab – találomra kiválasztott – processzor órajelét ellenőrizni.



## 1. feladat

A nyers erő (brute-force) módszerét használva, írjatok egy-egy szimulációt az elméletileg megoldott feladatok eredményeinek gyakorlati alátámasztására!

## 2. feladat (elméleti megoldás is szükséges az implementációhoz)

Felhasználva a centrális határeloszlás tételét, adott  $\alpha \in (0, 1)$  szignifikanciaszint (vagyis  $1 - \alpha$  valószínűség) mellett szerkesszettek megbízhatósági intervallumot:

- az  $(m = 8, p)$ -paraméterű binomiális eloszlás ismeretlen  $p \in (0, 1)$  paraméterére;
- az

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{\theta^3 x^4}, & x \in [\frac{1}{\theta}, \infty], \\ 0, & x \notin [\frac{1}{\theta}, \infty] \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változó ismeretlen  $\theta > 0$  paraméterére.

**Megjegyzés.** Az egyes eloszlású minták generálása során a fenti ismeretlen paramétereket is tekintsétek adottaknak, majd az egyes megbízhatósági intervallumok végpontjainak meghatározása során feltételezzétek azokat ismeretlennek és ellenőriztétek, hogy az „elfelejtett” paraméterértékek beleesnek-e az általatok szerkesztett megbízhatósági intervallumokba. Mindkét esetben számoljatok legalább 10000-elemű mintavétellel.

