

Wahadło Kapicy

Fizyka - projekt

Norbert Gościcki 337329
Bartosz Wojtaś 337408

13.06.2025

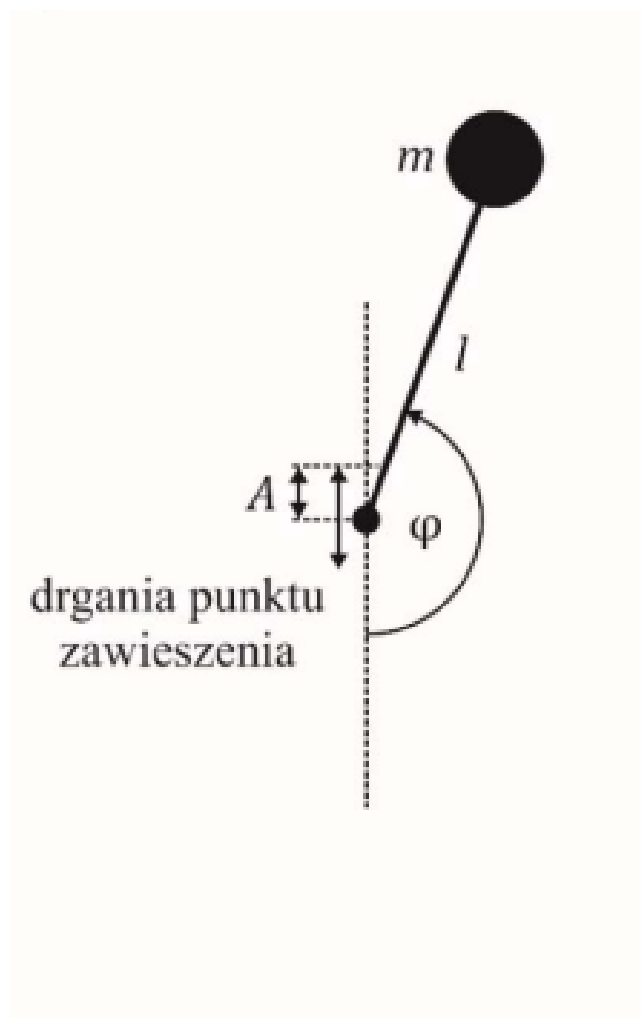
Spis treści

1. Wstęp	2
2. Model matematyczny	3
3. Potencjał efektywny i stabilizacja	3
4. Symulacja numeryczna	4
Referencje	4

1. Wstęp

Wahadło Kapicy to fascynujący przykład układu mechanicznego, w którym punkt zawieszenia wykonuje szybkie drgania w pionie, umożliwiając stabilizację wahadła w nietypowej, odwróconej pozycji – „do góry nogami”. W klasycznym wahadle matematycznym takie położenie jest niestabilne, jednak dzięki efektowi dynamicznej stabilizacji staje się możliwe. Celem projektu jest zbadanie zależności stabilności od częstotliwości drgań oraz przeprowadzenie symulacji numerycznej tego zjawiska, wspartej wizualizacją i analizą matematyczną.

— Schemat modelu wahadła Kapicy:



Rysunek 1. Schemat modelu wahadła Kapicy z oznaczonymi parametrami: m – masa wahadła, l – długość zredukowana, A – amplituda drgań, φ – kąt wychylenia.

2. Model matematyczny

Dynamikę wahadła Kapicy opisuje równanie różniczkowe II rzędu, które uwzględnia kąt wychylenia $\varphi(t)$ względem osi pionowej:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{l} (g + A\omega^2 \cos(\omega t)) \sin(\varphi), \quad (1)$$

gdzie:

- $\varphi(t)$ – aktualny kąt odchylenia wahadła w radianach,
- l – zredukowana długość wahadła w metrach,
- g – wartość przyspieszenia grawitacyjnego w metrach na sekundę kwadrat,
- A – wielkość amplitudy drgań punktu zawieszenia w metrach,
- $\omega = 2\pi f$ – pulsacja drgań, powiązana z częstotliwością f w hercach.

W odróżnieniu od standardowego wahadła matematycznego, gdzie ruch podlega równaniu $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin(\varphi)$, w tym przypadku pojawia się dodatkowy wyraz $A\omega^2 \cos(\omega t)$. Ten składnik symuluje efekt periodycznych wahań zawieszenia, które działają podobnie do zmiennego przyspieszenia grawitacyjnego, przypominającego odczucia w poruszającej się windzie.

3. Potencjał efektywny i stabilizacja

Aby przeanalizować możliwość utrzymania wahadła w pozycji odwróconej, rozważamy podział kąta φ na dwie części: szybką, związaną z oscylacjami zawieszenia, oraz powolną, opisującą główny ruch wahadła. Skupiamy się na składowej powolnej φ_s , dla której przybliżone równanie ruchu przyjmuje postać:

$$\ddot{\varphi}_s = -\frac{g}{l} \sin(\varphi_s) - \frac{1}{2} \left(\frac{A\omega}{l} \right)^2 \sin(\varphi_s) \cos(\varphi_s). \quad (2)$$

Tę zależność można wyrazić w alternatywnej formie:

$$ml^2 \ddot{\varphi}_s = -\frac{\partial U}{\partial \varphi_s}, \quad (3)$$

gdzie U reprezentuje potencjał efektywny, zdefiniowany jako:

$$U = -mgl \cos(\varphi_s) + \frac{mA^2\omega^2}{4} \sin^2(\varphi_s). \quad (4)$$

Badając kształt potencjału U w zależności od φ_s , możemy ustalić punkty równowagi. Stabilne położenie w pozycji odwróconej ($\varphi_s = 180^\circ$) występuje, gdy spełniona jest nierówność:

$$A^2\omega^2 > 2gl. \quad (5)$$

Przekształcając tę relację, wyznaczamy minimalną częstotliwość drgań potrzebną do stabilizacji:

$$f_{\text{gr}} = \frac{1}{2\pi A} \sqrt{2gl}. \quad (6)$$

Gdy częstotliwość f przekracza f_{gr} , wahadło może utrzymywać się w górnej pozycji. Szczegółowe informacje dostępne są w referencjach [1].

4. Symulacja numeryczna

Proces symulacji polega na rozwiązaniu równania (1) przy użyciu zadanych wartości:

- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$,
 - $l = 0.045 \text{ m}$,
 - $A = 0.016 \text{ m}$,
 - Początkowa pulsacja $\omega = 2\pi \times 10.5 \text{ rad/s}$ (odpowiadająca $f = 10.5 \text{ Hz}$).
- Ustalono warunki początkowe: $\varphi_0 = 178^\circ$ (blisko pozycji odwróconej) oraz $\dot{\varphi}_0 = 0 \text{ rad/s}$, z czasem symulacji wynoszącym 5 sekund.

Weryfikacja stabilności:

$$\sqrt{2gl} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.045} \approx 0.94 \text{ m/s},$$

$$f_{\text{gr}} = \frac{0.94}{2\pi \times 0.016} \approx 9.36 \text{ Hz}.$$

Skoro $f = 10.5 \text{ Hz} > f_{\text{gr}} = 9.36 \text{ Hz}$, warunki stabilności są spełnione, co pozwala na utrzymanie wahadła w pozycji odwróconej.

Referencje

- [1] <https://ruj.uj.edu.pl/server/api/core/bitstreams/43a9c744-317e-4f1d-b49d-35a2122a4e60/content>