Numerikus módszerek

Vizsgatételek 2017

1. I. Parciális anyaga

1. Hiba. Relatív hiba. Számítási hibák terjedése.
2. Lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldása. Hibaanalízis. (Kondíciószámok)
3. Gauss-elimináció.
4. LU felbontás.
5. Jacobi- és Gauss-Seidel-iteráció (Konvergenica tétel,bizonyítás).
6. Legjobb négyzetes közelítés (diszkrét, folytonos eset).
7. Ortogonális polinomok(általános tulajdonságok).
8. Legendre-, Elsőfajú Csebisev- polinomok.Tulajdonságok.
9. Peano-tétel (kijelentés, bizonyítás).
10. Lagrange-interpoláció.
11. Lagrange-interpoláció maradéktagja (kijelentés, bizonyítás-egy a három közül).
12. Lagrange-interpolációs polinom Newton alakja.
13. Aitken-módszer.
14. Kétszeres csomópontú Hermite polinom.
15. Birkhoff-interpoláció

Home Page

Title Page

Contents

Page 3 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. II. Parciális anyaga

16. Lineáris és köbös spline polinomok.
17. Bernstein polinom (alakja, egyenletes konvergenciája-kijelentés, bizonyítás).
18. Egyenletes megközelítések. Remez algoritmus.
19. Interpolációs numerikus deriválási formulák.
20. Interpolációs numerikus integrálási formulák.
21. Newton Cotes formulák.
22. Gauss típusú kvadratúraformulák.
23. Gauss kvadratúraformulák maradéktagja (kijelentés, bizonyítás)
24. Ismételt numerikus integrálási formulák
25. Romberg integráció.
26. Newton-féle érintő módszer.(konvergenciatétel, kijelentés, bizonyítás)
27. Húrmódszer.
28. Szukcesszív approximáció módszere nemlineáris algebrai egyenletek megoldására.

Feladatok az I parciális anyagához

1. **Példa.** *Oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval, részleges főelemkiválasztással és határozzuk meg a mátrix determinánsát.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -8 \\ 2 & 4 & -5 \\ -4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

1 lépés Mivel $\max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = \max\{0, 2, 4\} = 4$, ezért fel kell cserélni az 1 és 3 sort, illetve a 2. sorhoz hozzádjuk az első sor 2/4-ét

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & -5/2 & 11/2 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

2.lépés Folytatva a részleges főelemkiválasztást, mivel

$$\max\{|a_{22}|, |a_{23}|\} = \max\{1, 7\} = 7$$

a 3. és 2. sort fel kell cserélni és a 3. sorhoz hozzádjuk a 2. sor -1/7-szeresét.

$$\begin{bmatrix} -4 & -6 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & -5/2 & 11/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -4 & -6 & -5 & 9 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -19/14 & 71/14 \end{bmatrix}$$

Figyelembe véve, hogy két sorcsere volt, így a determináns értéke

$$det(A) = (-4) \cdot 7 \cdot (-19/14) \cdot (-1)^2 = 38.$$

Az utolsó egyenletből $x_3 = -71/19$, illetve fokozatos visszahelyettesítéssel a többi ismeretlen $x_2 = -73/19, x_1 = -22/19$.

Home Page

Title Page

Contents

Page 5 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. Példa. *Oldjuk meg az $Ax_1 = b_1$ és $Ax_2 = b_2$ lineáris egyenletrendszereket Gauss-elimináció segítségével főelemkiválasztás nélkül.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. lépés
2.sor$-2 \cdot 1.$ sor
3.sor$-3 \cdot 1.$sor
4.sor$-1.$sor

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

2.lépés:
3.sor$-2.$sor
4.sor$-2.$sor

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Az $Ax_1 = b_1$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, mert ez kompatibilis és határozatlan, a másik egyenletrendszer inkompatibilis.

3. Példa. *Számítsd ki az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ *mátrix kondíciószámát 1 és* ∞ *mátrixnorma esetén, tudva, hogy* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\|A\|_1 = \max\{4, 9\} = 9, \left\|A^{-1}\right\|_1 = \max\{10, 3\} = 10$$

ahonnan, $cond_1(A) = 9 \cdot 10 = 90$, *illetve*

$$\|A\|_\infty = \max\{3, 10\} = 10, \left\|A^{-1}\right\|_\infty = \max\{9, 4\} = 9$$

és így $cond_\infty(A) = 90$.

4. Példa. *Határozzuk meg a következő mátrix LUP felbontását*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Főelemkiválasztás után az első két sort ki kell cserélni illetve a Gauss eliminációhoz az első sor 1/3-szorosát ki kell vonni a második egyenletből:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 5/3 & 10/3 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

A második lépésben nem kell sorcserét végezni, a második sor 3/5-ét kell kivonni a harmadik egyenletből, közben a főátló alá helyezzük az L *mátrix elemeit:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 5/3 & 10/3 \\ 0 & 3/5 & 6 \end{bmatrix}$$

ahonan következik, hogy

$$U=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 5/3 & 10/3\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/3 & 1 & 0\\ 0 & 3/5 & 1\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5. Példa. *Határozd meg az alábbi pontokra négyzetesen legjobban illeszkedő egyenest:*

$$(-1,0),(0,1),(1,0),(2,2).$$

Ekkor $g(x)=Ax+B$ *és így*

$$F(A,B)=\sum_{i=1}^{4}(f(x)-Ax-B)^2=(0+A-B)^2+(1-B)^2+(0-A-B)^2+(2-2A-B)^2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial A} &= 2(A-B)-2(-A-B)-4(2-2A-B)=12A+4B-8=0\\ \frac{\partial F}{\partial B} &= -2(A-B)-2(1-B)-2(-A-B)-2(2-2A-B)=4A+8B-6=0\end{aligned}$$

ahonnan $A=1/2$ *és* $B=1/2$, *tehát* $g(x)=1/2x+1/2$.

6. Példa. *Adjuk meg azt a legfeljebb harmadfokú polinomot (vagy azt a minimális fokú polinomot), amely áthalad a következő pontokon:*

$$(-1,1),(0,-1),(1,-1),(2,1).$$

Lagrange interpolációt alkalmazunk:

$$(L_3f)(x)=l_0(x)f(x_0)+\ldots+l_3(x)f(x_3)$$

ahol

$$
\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} \\
l_1(x) &= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)} = \frac{(x^2-1)(x-2)}{2} \\
l_2(x) &= \frac{(x+1)x(x-2)}{2(-1)} = \frac{x(x+1)(x-2)}{-2} \\
l_3(x) &= \frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2} = \frac{x(x^2-1)}{6}
\end{aligned}
$$

és így

$$
(L_3f)(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} - \frac{(x^2-1)(x-2)}{2} - \frac{x(x+1)(x-2)}{2} + \frac{x(x^2-1)}{6}
$$

7. Példa. *Szerkesszünk egy másodfokú interpolációs közelítést a $\sqrt{110}$ értékének a kiszámítására, majd becsüljük meg a közelítés hibáját.*
Ekkor $f(x) = \sqrt{x}$, a csomópontok legyenek $x_0 = 100, x_1 = 121, x_2 = 144$.
Az osztott differenciatáblázat :

$$
\begin{array}{llll}
100 & 10 & & \\
121 & 11 & \frac{1}{21} & \\
144 & 12 & \frac{1}{23} & -\frac{1}{23\cdot 22\cdot 21}
\end{array}
$$

ahonnan

$$
(L_2f)(x) = 10 + \frac{1}{21}(x-100) - \frac{1}{23\cdot 22\cdot 21}(x-100)(x-121),
$$

$$
(L_2f)(110) = 10 + \frac{1}{21}\cdot 10 - \frac{1}{23\cdot 22\cdot 21}\cdot 10\cdot 11 = 10(1 + \frac{1}{21} + \frac{1}{2\cdot 21\cdot 23}),
$$

A maradéktag:

$$(R_2 f)(x) = \frac{u(x)}{3!} f^{(3)}(\xi), \quad \textit{ahol} \quad u(x) = (x-100)(x-121)(x-144),$$

és így

$$|(R_2 f)(110)| \leq \frac{10 \cdot 11 \cdot 34}{6} \left\| f^{(3)} \right\|_\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}, f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}, f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2},$$

mivel a harmadrendű derivált csökkenő függvény, így $\|f'''\| = \frac{3}{8} \cdot 100^{-5/2} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}$.
A hibára a következő becslés adható meg:

$$(R_2 f)(x) \leq \frac{10 \cdot 11 \cdot 34}{6} \cdot \frac{3}{8} 10^{-5}$$

8. Példa. *Legyen* $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $T_n f$ *az n-ed fokú Taylor polinom az* $x_0 = 0$ *pontra. Határozzuk meg az* α *paramétert úgy, hogy ha az* f *függvényt* $T_3 f$ *harmadfokú Taylor polinommal közelítjük a* $[0, \alpha]$ *intervallumon, az abszolút hiba* $\leq 10^{-6}$.
Ha az alappont $x_0 = 0$, *akkor a Taylor polinom:*

$$(T_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0),$$

illetve a maradéktag:

$$(R_n f)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Ha harmadfokú Taylor polinommal közelítünk, akkor a maradéktag

$$(R_3 f)(x) = \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\xi),$$

ahol viszont

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5},$$

és így

$$|(R_3 f)(x)| \leq \frac{x^4}{4!} \frac{24}{1} = x^4,$$

tehát $x^4 \leq 10^{-6} \Rightarrow x \leq 10^{-3/2} \Rightarrow \alpha = 10^{-3/2}$.

9. Példa. *Ha tudjuk, hogy* $f(0) = 1, f(2) = 1/3$ *és* $f'(0) = -1$, *határozd meg a függvény értékének egy közelítését az* $x = 1/2$ *pontban, megfelelő interpolációs polinomot használva.*
$x_0 = 0, x_1 = 1,\ r_0 = 1, r_1 = 0,$ *tehát* $n = 2$.
Hermite interpolációt kell használni.

$$H_2 f(x) = h_0(x) f(0) + h_1(x) f'(0) + h_2(x) f(1)$$

Hermite polinom osztott differenciás alakját használva:

$$H_2 f(x) = f(z_0) + (x - z_0)[z_0, z_1; f] + (x - z_0)(x - z_1)[z_0, z_1, z_2; f]$$

ahol $z_0 = x_0, z_1 = x_0, z_2 = x_1$ *Az osztott differenciatáblázat :*

$$\begin{array}{lllll} z_0 = x_0 & 0 & 1 & & \\ z_1 = x_0 & 0 & 1 & -1 & \\ z_2 = x_1 & 2 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}$$

$$H_2f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{3}$$

vagyis $f(1/2) \approx H_2f(1/2) = 1 - 1/2 + 1/12 = 0.58$

10. Példa. *Határozzuk meg az* $f : [0, h] \to \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}_+$ *függvénynek és az* $f(0), f'(h)$ *információknak megfelelő interpolációs képletet.*
Birkhoff interpolációt kell alkalmazni:

$$f = B_1f + R_1f, I_0 = \{0\}, I_1 = \{1\}$$

$$(B_1f)(x) = b_{00}(x)f(0) + b_{11}(x)f'(h).$$

Mivel $(B_1f)(0) = f(0)$ *és* $(B_1f)'(h) = f'(h)$ *következnek a fundamentális Bernstein polinomokra a következő összefüggések:*

$$\begin{aligned} b_{00}(0) &= 1, \quad b_{11}(0) = 0 \\ b'_{00}(h) &= 0, \quad b'_{11}(h) = 1 \end{aligned}$$

ahonnan, mivel $b_{00}(x) = ax + b, \Rightarrow b = 1, a = 0$*, vagyis* $b_{00}(x) = 1$.
Hasonlóan $b_{11}(x) = cx + d, \Rightarrow c = 1, d = 0$*, tehát* $b_{11}(x) = x$.

$$(B_1f)(x) = f(0) + xf'(h),$$

a maradéktag

$$(R_1f)(x) = \int_0^h \varphi(x,t)f''(t)dt,$$

ahol

$$\varphi(x,t) = R_1^x[(x-t)_+] = (x-t)_+ - (0-t)_+ - x(h-t)'_+ = (x-t)_+ - x,$$

ahonnan $\varphi(x,t) = -t$*, ha* $t \le x$*, illetve* $\varphi(x,t) = -x$*, ha* $t > x$.

Feladatok a II parciális anyagához

11. Példa. *Tekintjük az $f(x) = sin(\Pi/2x)$ függvényt és a -1,0,1 alappontrendszert. Határozzuk meg az f-et interpoláló*

- *köbös másodrendű természetes spline-t*
- *köbös spline-t Hermite-féle peremfeltétellel, vagyis $f'(-1) = f'(1) = 0$.*

a.) A spline függvényünk legyen

$$\begin{aligned} P_1(x) &= a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1, x \in [-1, 0] \\ P_2(x) &= a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2, x \in [0, 1] \end{aligned}$$

Írjuk fel a polinomokra az interpolációs feltételeket:

$$\begin{aligned} P_1(-1) &= f(-1) = -1 \Rightarrow -a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = -1 \\ P_1(0) &= f(0) = 0 \Rightarrow d_1 = 0 \\ P_2(0) &= f(0) = 0 \Rightarrow d_2 = 0 \\ P_2(1) &= f(1) = 1 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 1 \end{aligned}$$

A polinom első és másodrendű deriváltjai:

$$P_1'(x) = 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1$$

$$P_1''(x) = 6a_1x + 2b_1.$$

A belső alappontokban a spline első és másoderndű deriváltja is folytonos:

$$\begin{aligned} P_1'(0) &= P_2'(0) \Rightarrow c_1 = c_2 \\ P_1''(0) &= P_2''(0) \Rightarrow 2b_1 = 2b_2 \end{aligned}$$

A természetes peremfeltélből mely szerint $S''(-1) = 0, S''(1) = 0$ következik

$$\begin{aligned} P_1''(-1) &= 0 \Rightarrow -6a_1 + 2b_1 = 0 \\ P_2''(1) &= 0 \Rightarrow 6a_2 + 2b_2 = 0 \end{aligned}$$

Ahonnan a következőket kapjuk: $a_1 = a_2 = 0, b_1 = b_2 = 0, c_1 = c_2 = 1$
vagyis $S(x) = x, x \in [-1, 1]$.
b.) Az interpolációs feltételek nem változnak, csak a két peremfeltétel:

$$S'(-1) = f'(-1) = 0, S'(1) = f'(1) = 0$$

ahonnan

$$\begin{aligned} P_1'(-1) &= 0 \Rightarrow 3a_1 - 2b_1 + c_1 = 0 \\ P_2'(1) &= 0 \Rightarrow 3a_2 + 2b_2 + c_2 = 0 \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy: $a_1 = -\frac{1}{2} = a_2, b_1 = b_2 = 0, c_1 = -3a_1 = \frac{3}{2} = c_2$, *vagyis*

$$S(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x, x \in [-1, 1].$$

12. Példa. *Határozzuk meg a következő alakú numerikus deriválási képletet úgy, hogy pontossági foka 2 legyen.*

$$f'(x) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + (R_2 f)(x), x \in [x_0, x_1]$$

a pontosági fok 2, vagyis mivel $R_2(e_0) = R_2(e_1) = R_2(e_2) = 0$ *következik, hogy*

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 &= 0 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 &= 1 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 &= 2x. \end{aligned}$$

Legyen $x_0 = \lambda$, ekkor $x_1 = 2x - \lambda$, és következik, hogy

$$A_1 = \frac{1}{2(x-\lambda)}, A_0 = -\frac{1}{2(x-\lambda)},$$

ahonnan egy numerikus deriválási család származtatható:

$$f'(x) = \frac{-1}{2(x-\lambda)} f(\lambda) + \frac{1}{2(x-\lambda)} f(2x-\lambda) + (R_2 f)(x),$$

$$(R_2 f)(x) = \int_{x_0}^{x_1} K_2(t) f'''(t) dt,$$

$$\begin{aligned} K_2(t) &= R_2^x \left[\frac{(x-t)_+^2}{2} \right] \\ &= (x-t)_+ - \frac{1}{4(x-\lambda)} (2x-\lambda-t)_+^2 \end{aligned}$$

$$K_2(t) = \begin{cases} -\frac{(2x-\lambda-t)^2}{4(x-\lambda)} & ha\ x \leq t \\ -\frac{(\lambda-t)^2}{4(x-\lambda)} & ha\ x > t \end{cases}$$

13. Példa. Legyen $x_0 = \frac{a+b}{2}$ egy kétszeres csomópont. Határozzuk meg a megfelelő interpolációs kvadratúraképletet.

$$f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2}) f'(\frac{a+b}{2}) + \frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{2!} f''(\xi),$$

integrálva

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= f(\frac{a+b}{2})(b-a) + \int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) f'(\frac{a+b}{2}) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{2x-a-b}{2} \right)^2 f''(\xi) dx = (b-a) f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi), \end{aligned}$$

amely a középpont formula.

14. Példa. *Legyen* $f(x) = \frac{1}{1+x}$. *Számítsuk ki az* f *függvény határozott integrálját a* $[0,1]$*-en* $\epsilon = 10^{-2}$ *hibakorláttal.*
Az összetett trapézformulával:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{x_k - x_{k-1}}{2}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] - \frac{(x_k - x_{k-1})^3}{12} f''(\xi_k) \right\}, x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi),\ \ a < \xi < b$$

abszolút hibabecslés:

$$|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} |f''(\xi)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty < 10^{-2},$$

de $\|f''\|_\infty = 2$, *következik, hogy*

$$\frac{1}{6n^2} \leq 10^{-2},$$

ahonnan $n = 5$.
Összetett Simpson formulával:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{x_k - x_{k-1}}{6}[f(x_{k-1}) + 4f(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}) + f(x_k)] - \frac{(x_k - x_{k-1})^5}{2880} f^{(4)}(\xi_k) \right\},$$

$x_{k-1} < \xi_k < x_k$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}[f(a)+4\sum_{k=1}^{n} f(\frac{x_{k-1}+x_k}{2})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]-\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\xi), a < \xi < b$$

abszolút hibabecslés:

$$|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4}|f^{(4)}(\xi)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\left\|f^{(4)]}\right\|_\infty < 10^{-2},$$

de $\left\|f^{(4)}\right\|_\infty = 24$*, következik, hogy*

$$\frac{24}{2880n^4} \leq 10^{-2},$$

ahonnan $n = 1$.

15. Példa. *Szukcsesszív approximáció módszerével mutassuk meg, hogy a*

$$\sin x - 3x + 1 = 0, \;\; x \in \mathbb{R}$$

egyenletnek egyetlen zérushelye van, az $x_{n+1} = \frac{\sin(x_n)+1}{3}$*,* $n = 0, 1, \ldots$ *sorozat konvergens bármely* $x_0 \in \mathbb{R}$ *kezdőérték esetén, és* $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$*. Hány iterációra van szükség ahhoz, hogy* $|x_n - x^*| \leq 10^{-5}$ *teljesüljön?*
Ekkor $F(x) = \frac{\sin(x)+1}{3}$ *és* $F'(x) = \frac{1}{3}\cos(x)$*, ahonnan*

$$\alpha = \max_{x\in\mathbb{R}} |F'(x)| = 1/3 < 1,$$

tehát F *kontrakció* $\mathbb{R}$*-en.*
Mivel

$$|x_n - x^*| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_0 - x_1|$$

következik,hogy

$$|x_n - x^*| \leq \frac{1}{2\cdot 3^n}, n = 1, 2, \ldots$$

ahonnan a lépésszám kiszámításához $\frac{1}{2\cdot 3^n} < 10^{-5}$ *kell teljesüljön, tehát* $n = 10$.

16. Példa. *Határozzuk meg a* $\ln 3x - \frac{1}{x} = 0$ *gyökét Newton módszerrel* $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ *hibakorláttal.*
1. A gyököt tartalmazó intervallum meghatározása
-grafikusan
-értéktáblázattal
$f_1(x) = \ln 3x$, $f_2(x) = 1/x$ *ekkor mivel* $f_1(1/3) = 0, f_2(1/3) = 3$, $f_1(2/3) = 0.69, f_2(2/3) = 1.5$ *és* $f_1(1) = 1.1, f_2(1) = 1$ *következik, hogy* $x^* \in [2/3, 1]$.
2. Konvergenciavizsgálat. Kezdeti pont meghatározása.
Mivel $f'(x) = \frac{x+1}{x^2} \neq 0$ *és* $f''(x) = -\frac{x+2}{x^3} \neq 0, x \in [2/3, 1]$ *de*
$f'(x) > 0, f''(x) < 0$ *következik, hogy* $x_0 = a = 2/3$, *mert ekkor* $f(x_0)f''(x_0) > 0$.
3. Iterációk kiszámítása, hibabecslés

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1}|x_1 - x_0|^2.$$

Mivel $M_2 = 9$ *és* $m_1 = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{\ln 3x_0 - 1/x_0}{\frac{x_0+1}{x_0^2}} = 0.881827$$

$$|x_1 - x^*| \leq \frac{9}{2 \cdot 2}|x_1 - x_0|^2 = 0.10416.$$

$$x_2 = 0.948421, |x_2 - x^*| \leq 0.009978,$$

$$x_3 = 0.952451, |x_3 - x^*| \leq 0.0000372 < 5 \cdot 10^{-5}, x^3 \approx x^*.$$

17. Példa. *Interpolációs típusú-e az alábbi zárt kvadratúraformula:*

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \frac{9}{4}f(0) + \frac{3}{4}f(2) + R(f)$$

Hányadfokú polinomokra pontos a formula?

18. Példa. *Hányadfokú polinomokra pontos az alábbi nyílt kvadratúraformula*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) + R(f) \ ?$$

Interpolációs-e?