2021－2022微积分(1)－1参考答案

一、填空题(每小题3分，共15分)

1. 矢量$a=(1,\sqrt{2},1)$与z轴正向的夹角$\theta=$ $\underline{\ \pi/3\ }$.

2.已知$f(x)=x^2\sin x$，则$f^{(2021)}(0)=$ $\underline{\ -2C_{2021}^2\ }$.

3. $\int_{-1}^{1}[x\ln(x^{2022}+2021)+\sqrt{1-x^2}]dx=$ $\underline{\ \pi/2\ }$.

4. 过原点(0，0，0)且与矢量(1，2，3)和(1，−1，0)都平行的平面方程为 $\underline{\ x+y-z=0\ }$.

5. 函数$f(x)=\dfrac{\sin x-e^{\frac{1}{x-1}}}{x(x-1)}$有$\underline{\ 2\ }$个无穷间断点

二、解答题(每小题8分，共48分)

1. 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-x}{(x-1)^2}$.

解1 由洛必达法则，

$$原式=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{2}=1$$

解2 由等价无穷小量，

$$原式=\lim_{x\to1}\frac{x(x^{x-1}-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x(e^{(x-1)\ln x}-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\ln x}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln(1+x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

2. 若函数 $f(x)=\begin{cases}e^{2x}\sin x, & x>0\\ ax^2+bx+c, & x\le0\end{cases}$在$x=0$处二阶可导，求$a$，$b$，$c$的值.

解1 因为$f(0-0)=c$，$f(0+0)=0$，所以$c=0$.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+0}\frac{ax^2+bx}{x}=b，f'_+(0)=\lim_{x\to0+0}\frac{e^{2x}\sin x}{x}=1，\therefore b=1.$$

$$同时\ f'(x)=\begin{cases}e^{2x}(2\sin x+\cos x), & x>0\\ 1, & x=0\\ 2ax+1, & x<0\end{cases}$$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to0-0}\frac{f'(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+0}\frac{2ax+1-1}{x}=2a，$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to0+0}\frac{e^{2x}(2\sin x+\cos x)-1}{x}=4，\therefore a=2.$$

因此 $a=2,b=1,c=0$.

解2 因为 $e^{2x}=1+2x+2x^2+o(x^2)$，$\sin x=x+o(x^2)$，所以

$$e^{2x}\sin x=x+2x^2+o(x^2).$$

因此 $a=2,b=1,c=0.$

3. 求不定积分 $\int\frac{2}{(x+1)(x^2+1)}dx.$

$$\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)+\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+C$$

4.若连续函数 $f(x)$满足 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}+\int_0^1 xf(x)\,dx$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 设 $\int_0^1 xf(x)\,dx=A$，两边同时乘以 x，在区间 $[0,1]$ 上积分，有

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_0^1 Ax\,dx$$

而 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos t\cdot\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t-\sin^4 t)dt$

$$=\mathrm{I}_2-\mathrm{I}_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$$

$$\int_0^1 Ax\,dx=\frac{A}{2}.$$

从而 $A=\frac{\pi}{16}+\frac{A}{2}$，故 $A=\frac{\pi}{8}$，所以

$$f(x)=x\sqrt{1-x^2}+\frac{\pi}{8}.$$

5. 求广义积分 $\int_0^1(\ln x)^2dx.$

解1 由分部积分法，

原式 $=x(\ln x)^2\big|_0^1-2\int_0^1\ln x\,dx=-2\int_0^1\ln x\,dx=-2x\ln x\big|_0^1+2\int_0^1 1\,dx=2.$

解2 令 $\ln x=-t$，$x=e^{-t}$，$dx=-e^{-t}dt$，

原式 $=\int_{+\infty}^0 t^2\cdot(-e^{-t})dt=\int_0^{+\infty}t^{3-1}e^{-t}\,dt=\Gamma(3)=2.$

6. 当$x\to 0$时，判断函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x} x(e^{\tan x}-1)\,dx$ 是x 的几阶无穷小

解1　由洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x} x(e^{\tan x}-1)\,dx}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(e^{\tan(1-\cos x)}-1)\cdot\sin x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan(1-\cos x)}-1}{2nx^{n-4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(1-\cos x)}{2nx^{n-4}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{2nx^{n-4}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4nx^{n-6}}$$

故当$n=6$时，$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{1-\cos x} x(e^{\tan x}-1)\,dx}{x^6}=\frac{1}{24}$，所以当$x\to 0$ 时，$f(x)$ 是x 的6阶无穷小

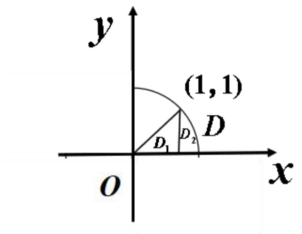
解2　当$x\to 0$时，由等价无穷小性质，有 $x(e^{\tan x}-1)\sim x\tan x\sim x^2$，故

$$\int_0^{1-\cos x} x(e^{\tan x}-1)\,dx\sim\int_0^{1-\cos x} x^2\,dx=\frac{1}{3}(1-\cos x)^3\sim\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^2)^3=\frac{1}{24}x^6$$

所以函数 $f(x)$ 是x的6 阶无穷小.

三、应用题(每小题11分，共22分)

1. 设在xoy平面上的区域D是由直线$y=x$，x 轴以及平面曲线$x=\sqrt{2-y^2}$围成的封闭区域，若D绕x轴旋转一周所成的旋转体为Ω，求:
(1)立体Ω的体积；(2)立体Ω表面曲面的方程.



解 (1)如图所示，立体Ω的体积为D_1与D_2 绕x轴旋转一周所成的旋转体之和，

$$V=V_1+V_2=\pi\int_0^1 x^2\,dx+\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)\,\pi$$

(2) D_1 绕x轴旋转一周所成的旋转体表面曲面的方程

$$x^2=y^2+z^2\ ,(0\le x\le 1)$$

D_2 绕x轴旋转一周所成的旋转体表面曲面的方程

$$x^2+y^2+z^2=2\ ,(1\le x\le\sqrt{2})$$

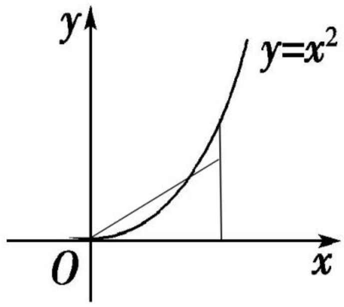
2.设直线$L_1: y=kx(0<k<1)$与抛物线$L_2: y=x^2$所围图形的面积为S_1,同时L_1, L_2与$L_3: x=1$所围成图形的面积为S_2. 求k的值，使得S_1+S_2达到最小值，并求出最小值.

解 $S=S_1+S_2=\int_0^k (kx-x^2)\,dx+\int_k^1 (x^2-kx)\,dx=\frac{1}{3}k^3-\frac{k}{2}+\frac{1}{3}$.

令$S'=k^2-\frac{1}{2}=0$, 得$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$. $S''(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2}{\sqrt{2}}>0$.

所以当$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，S取得最小值，且

$$S_{\min}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}}.$$



四、证明题(第一小题7分，第二小题8分 ，共15分)

1. 设函数$f(x)\in C[0,1]$, 且$\int_0^1 f(x)\,dx=0$, 证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^{\xi} f(t)dt=f(\xi).$$

证明 令$g(x)=e^{-x}\int_0^x f(t)dt$, 则$g(0)=g(1)=0$. 由罗尔定理知存在$\xi\in(0,1)$, 使得

$g'(\xi)=0$, 即$-e^{-\xi}\int_0^{\xi} f(t)dt+e^{-\xi}f(\xi)=0$, 故有$\int_0^{\xi} f(t)dt=f(\xi)$.

2.证明不等式$\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x^2\,dx<1-\frac{\pi}{4}$.

证： $\because u\in(0,\frac{\pi}{2})$时， $\tan u>u$; 当$x\in(0,\frac{\pi}{4})$时， $x^2\in(0,\frac{\pi^2}{16})\subset(0,\frac{\pi}{2})$,

于是$\tan x^2>x^2$; 因此， $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x^2\,dx>\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\,dx=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$.

另一方面, $x\in(0,\frac{\pi}{4})\subset(0,1)$, $\tan x^2<\tan^2 x$. 因此，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x^2\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}.$$

注：左边不等式证明3分；右边不等式证明5分.