2019-2020 学年第 1 学期微积分 1-1 参考答案

一、填空题(每小题3分，共15分)

1. $\frac{4}{3}$；2. $x=0$；3. $C_n^2 2^{n-1} e^4$；，4. $-\frac{1}{3}(e-1)$；5. $(1,+\infty)$

二、计算题(每小题8分，共32分)

1.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}$.

解 由等价无穷小，

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+x)}-1}{\ln(1-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-x^2}=-1.$$

2.设方程 $e^{xy}+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^y\sqrt{4-t^2}dt=1$ 可确定函数 $y=y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$，$\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

解 易知当 $x=0$ 时，$y=1$. 方程两边同时对 x 求导，得

$$e^{xy}(y+xy')+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-y^2}\,y'=0. \qquad (1)$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入(1)式，解之得 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}=-1$.

再对(1)式两边同时对 x 求导，得

$$e^{xy}(y+xy')^2+e^{xy}(y'+y'+xy'')+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{-y}{\sqrt{4-y^2}}(y')^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-y^2}\,y''=0.$$

将 $x=0$，$y=1$，$y'(0)=-1$ 代入上式，解之得 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=\frac{4}{3}$.

3.计算不定积分 $\int\frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}\mathrm{d}x$.

解 $$原式=-\frac{1}{2}\int\ln x\,\mathrm{d}(x^2-1)^{-1}=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1}\ln x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2-1)x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1}\ln x+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1}\ln x+\frac{1}{4}(\ln(x-1)-2\ln x+\ln(x+1))+C$$

4.计算定积分$\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

解 原式$=\int_0^2 x^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \overset{x=t+1}{=} \int_{-1}^1 (t+1)^2\sqrt{1-t^2}\,dt$ (奇偶性)

$$=2\int_0^1 (t^2+1)\sqrt{1-t^2}\,dt \overset{t=\sin\theta}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta+1)\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^4\theta)\,d\theta = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5\pi}{8}.$$

三、解答题(每小题10分，共20分)

1.设函数$g(x)$二阶可导且$g(0)=1$，$g'(0)=2$，$g''(0)=1$，并设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{2x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

求$f'(0)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.

解 由定义，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-e^{2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)-2e^{2x}}{2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-2+2-2e^{2x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-2}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{2-2e^{2x}}{2x}=-\frac{3}{2}$$ ………6分

所以$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x(g'(x)-2e^{2x})-(g(x)-e^{2x})}{x^2}, & x\neq 0\\ -3/2, & x=0\end{cases}$. 因为

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(g'(x)-2e^{2x})-(g(x)-e^{2x})}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-2e^{2x}}{x}-\lim_{x\to0}\frac{g(x)-e^{2x}}{x^2}=-\frac{3}{2}$$

所以$f'(x)$在$x=0$处连续. ………………………………10分

注：若直接使用$\lim\limits_{x\to0}g''(x)=1$，(1)(2)小问各扣1分.

2.若方程$x^2=ae^x(a\neq 0)$有唯一解，试求a的取值范围.

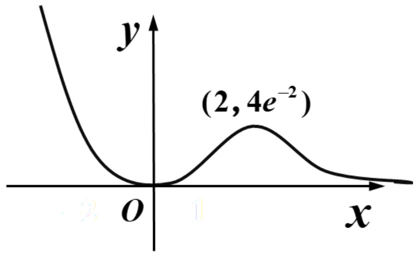
解 由$x^2=ae^x$得，$a=x^2e^{-x}$. 令$f(x)=x^2e^{-x}$，

则当$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}=0$时，$x=0$或$x=2$.

列表如下：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$

且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.



故当$4e^{-2}<a<+\infty$时，有唯一解.

四、应用题(每小题10分，共20分)

1.设空间中有点$M(1,1,1)$及直线l: $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$.

(1)求经过点M与直线l的平面方程；

(2)求直线l绕z轴旋转一周所成的旋转曲面方程.

解 (1)设平面上任意点$P(x,y,z)$，则$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，故平面方程为

$x-z=0$ ……………5 分

(2)由$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$得$x=z$，$y=2z+1$，故直线$l$绕$z$轴旋转一周所成的旋转曲面方程为

$x^2+y^2=z^2+(2z+1)^2=5z^2+4z+1$ ……………10 分

2.设曲线 $y=\sin^4 x\,(0\le x\le\pi)$ 与 x 轴围成的图形为 S，(1)求 S 的面积A；(2)若 S 绕 y 轴旋转一周，求旋转体的体积V.

解(1) $A=\int_0^{\pi}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=2I_4=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi.$ ……………5 分

(2) $V=2\pi\int_0^{\pi}x\sin^4 x\,\mathrm{d}x=2\pi\cdot\pi\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\,\mathrm{d}x=2I_4=2\pi^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi^3.$ ……………10 分

五、证明题(第一小题6分，第二小题7分，共13分)

1.设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}x f(x)\,\mathrm{d}x$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

证明 由积分中值定理知，$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}x f(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)(\xi\in[0,\frac{1}{3}])$.

作函数 $g(x)=x f(x)$，则 $g(\eta)=\eta f(\eta)=f(1)=g(1)$，由罗尔定理知存在 $\xi\in(\eta,1)$，使得 $g'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

2.设有方程 $e^x+x^{2n+1}=0$，证明：

(1)对任意正整数 n，方程有唯一实根 x_n；

(2)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

证明 (1)令 $f_n(x)=e^x+x^{2n+1}$，则 $f_n'(x)=e^x+(2n+1)x^{2n}>0$，故 $f_n(x)$ 严格单增. 且

$$f_n(-1)=e^{-1}-1<0,\quad f_n(0)=1>0$$

故由零点存在定理知存在唯一 x_n，使得 $f_n(x_n)=0$，即方程有唯一实根 $x_n\in(-1,0)$. ……3 分

(2)若 $x_{n+1}\ge x_n$，则 $0=e^{x_{n+1}}+{x_{n+1}}^{2n+3}\ge e^{x_n}+{x_n}^{2n+3}=e^{x_n}+{x_n}^{2n+1}\cdot x_n^2>e^{x_n}+{x_n}^{2n+1}=0$，矛盾.

所以 $x_{n+1}<x_n$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

由 $e^{x_n}+{x_n}^{2n+1}=0$ 得 $e^{x_n}=(-x_n)^{2n+1}$，取对数 $x_n=(2n+1)\ln(-x_n)$，即 $\frac{1}{2n+1}=\frac{\ln(-x_n)}{x_n}$.

两边同时取极限，有 $0=\frac{\ln(-a)}{a}$，所以 $a=-1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$. …………7 分