微积分基本公式

一、求下列积分变限函数的导数.

1. $y=\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t$；

$y'=\sin^2 x$

2. $y=\int_x^2 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$；

$y'=-\sqrt{1+x^2}$

3. $y=\int_1^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$；

$y'=3x^2\frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$

4. $y=\int_{\cos x}^{\sin^2 x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

$y'=e^{-\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos x+e^{-\cos^2 x}\sin x$

二、设 $F(x)=\int_1^x\left(\int_1^{y^2}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y$，求 $F'(x)$，$F''(x)$.

令 $g(y)=\int_1^{y^2}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt$. $F(x)=\int_1^x g(y)\,dy$

$F'(x)=g(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt$

$F''(x)=g'(x)=\frac{\sqrt{1+x^8}}{x^2}\cdot 2x=\frac{2\sqrt{1+x^8}}{x}$

学院＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　教师＿＿＿＿

三、求由参数方程 $x=\int_0^t \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u, y=\int_t^{t^2}\cos u^2\mathrm{d}u$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t^4\cdot 2t-\cos t^2}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{2t^2\cos t^4-t\cos t^2}{\sin t}$$

四、设方程 $\int_0^x \sin t^3\mathrm{d}t+\int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 确定了函数 $y=y(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

两端对 x 求导

$$\sin x^3+e^{-y^2}\frac{dy}{dx}-e^{-x^2}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-x^2}-\sin x^3}{e^{-y^2}}$$

五、求下列极限.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}$;

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1+2x^2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int_0^x t e^{2t^2}\,dt}$;

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{x e^{\cancel{2}x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{x e^{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1+2x^2} = 2$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2}{x-a}\int_a^x f^2(t)\,dt$，其中 $f(x)$ 连续.

$\Rightarrow f^2(x)$ 连续 $\Rightarrow \int_a^x f^2(t)dt$ 关于x可导

$= \lim\limits_{x\to a}\left(2x\int_a^x f^2(t)dt + x^2 f^2(x)\right)$

$= a^2 f^2(a)$

六、计算下列定积分.

1. $\int_1^2 \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 dx$;

$= \int_1^2 \left(x^2+2+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$

$= \dfrac{x^3}{3}\Big|_1^2 + 2x\Big|_1^2 - \dfrac{1}{x}\Big|_1^2$

$= \dfrac{29}{6}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x^2}{1+x^2}dx$;

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \arctan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \dfrac{\pi}{4} - \arctan\dfrac{\pi}{4}$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

3. $\int_4^9 \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)\mathrm{d}x$；

$= \int_4^9 (x+\sqrt{x})dx$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_4^9 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9$

$= \frac{271}{6}$

4. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$；

$= \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}$

$= \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1$

$= \frac{\pi}{6}$

5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2\theta \mathrm{d}\theta$；

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2\theta - 1)d\theta$

$= -\cot\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 1-\frac{\pi}{4}$

6. $\int_{-e}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$；

$= \ln|1+x|\Big|_{-e}^{-2}$

$= -\ln(e-1)$

7. $\int_0^{\pi} |\cos x| \mathrm{d}x$；

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx$

$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= 1+1 = 2$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

8. $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases} x^2+x, & x \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0. \end{cases}$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_0^2 e^{-x}dx + \int_{-2}^{0}(x^2+x)dx = \frac{5}{3} - e^{-2}$$

七、设 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x \leqslant 1, \\ 2x, & x>1, \end{cases}$ 求 $\Phi(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式，并讨论 $\Phi(x)$ 的连续性和可导性.

当 $x \geq 1$ 时　$\Phi(x) = \int_1^x 2t\,dt = x^2-1$

当 $x<1$ 时　$\Phi(x) = \int_1^x (t^2-1)dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} - x + 1 = \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$

$\Phi(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \geq 1 \\ \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}, & x<1 \end{cases}$. $\Phi(1^+) = \Phi(1^-) = 0 = \Phi(0)$. $\Phi(x)$ 连续

当 $x \geq 1$ 时 $\Phi'(x) = 2x$，当 $x<1$ 时 $\Phi'(x) = x^2-1$. $\Phi'(1^+) = 2$

$\Phi'(1^-) = 0$.

$\Phi'(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

八、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，设

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a<x<b),$$

证明：在 (a,b) 内有 $F'(x) \geqslant 0$.

$$F'(x) = \frac{f(x)(x-a) - \int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{f(x) - f(\xi)}{x-a} \geq 0$$

九、设 $f(x)=\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$，求 $f'(0)$.

$f'(0)=\left.\frac{1-\cos x}{x^2}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}$

十、利用定积分计算下列极限.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[3]{1+\frac{i}{n}}$；

$=\int_0^1 \sqrt[3]{1+x}\,dx$

$=\frac{3}{4}\left(\sqrt[4]{16}-1\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})}=e^{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})}}$

$=e^{\int_1^2 \ln x\,dx}=e^{2\ln 2-1}$

十一、当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)<0$，证明：$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$.

$f(x^2)=f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3})+\frac{f''(\xi)}{2}(x^2-\frac{1}{3})^2$

$f(x^2)\leqslant f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3})$. 在 $x^2=\frac{1}{3}$ 的小邻域内成立.

要继续在 $[0,1]$ 上成立. 令 $g(x)=f(x^2)-f(\frac{1}{3})-f'(\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3})$

$g'(x)=2xf'(x^2)-f'(\frac{1}{3})\cdot 2x=2x[f'(x^2)-f'(\frac{1}{3})]$

当 $x^2>\frac{1}{3}$ 时 $f'(x^2)<f'(\frac{1}{3})$，当 $x^2<\frac{1}{3}$ 时，$f'(x^2)>f'(\frac{1}{3})$

$g'(x)<0$　　$g'(x)>0$

$g(x)\leqslant g(\frac{\sqrt{3}}{3})=0$

$\int_0^1 f(x^2)dx\leqslant f(\frac{1}{3})+f'(\frac{1}{3})\int_0^1(x^2-\frac{1}{3})dx$

十二、设 $F(x)=-2a+\int_0^x(t^2-a^2)\mathrm{d}t$.

1. 求 $F(x)$ 的极大值 M；

2. 若视 M 为 a 的函数，即 $M=M(a)$，问 a 为何值时，M 取极小值.

1. $M(a)=\begin{cases}\frac{2}{3}a^3-2a, & a>0\\ -\frac{2}{3}a^3-2a, & a<0\end{cases}$

2、$a=1$ 处取极小值

十三、求曲线 $y=F(x)=\int_0^1(1-t)|x-t|\mathrm{d}t\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的凹凸区间.

$$y=F(x)=\int_0^x(1-t)(x-t)dt-\int_x^1(1-t)(x-t)dt$$

$$=-\int_0^x(1-t)t\,dt+x\int_0^x(1-t)\,dt+\int_x^1(1-t)t\,dt-x\int_x^1(1-t)\,dt$$

于是 $F'(x)=-(1-x)x+\int_0^x(1-t)\,dt+x(1-x)$

$$-(1-x)x-\int_x^1(1-t)\,dt+x(1-x)$$

$$=\int_0^x(1-t)dt-\int_x^1(1-t)dt$$

$$F''(x)=(1-x)+(1-x)=2-2x>0$$

$\Rightarrow$ 凹区间为 $[0,1)$.