参考解答及评分标准

一、填空题（每题3分，共18分）

1、$(-1,1]$；

2、$y=x-1$；

3、$(2,0)$；

4、$\dfrac{\pi}{2}$；

5、2017；

6、$\dfrac{e+e^{-1}}{2}$.

二、解答题（每题8分，共48分）

1、计算不定积分 $\int(x\sqrt{1-x^2}+\dfrac{e^x}{1+e^{2x}})dx$；

解：（以下解题步骤每行2分）

原式$=-\dfrac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}d(1-x^2)$

$+\int\dfrac{de^x}{1+(e^x)^2}$

$=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+\arctan e^x+C$

$=-\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+\arctan e^x+C=\dfrac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\arctan e^x+C$

2、计算定积分 $\int_0^{\pi}x\sin^2 xdx$；

解：（以下解题步骤每行2分）

由公式$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$，原式$=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 xdx$

因为π是函数$\sin^2 x$的周期，原式$=\dfrac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$

再由定积分的对称性，原式$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$

根据$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$的积分公式，原式$=\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi^2}{4}$

另解：原式$=\int_0^{\pi}x\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx$

$=\int_0^{\pi}\dfrac{x}{2}dx-\dfrac{1}{4}\int_0^{\pi}xd\sin 2x$

$=\dfrac{1}{4}x^2\Big|_0^{\pi}-\dfrac{1}{4}x\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\dfrac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin 2xdx$

$=\dfrac{\pi^2}{4}-0-\dfrac{1}{8}\cos 4x\Big|_0^{\pi}=\dfrac{\pi^2}{4}$

3、把函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$展开为x的幂级数，并求$f^{(10)}(0)$；

解：（以下解题步骤每行2分）

因为 $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$，$|x|<1$

利用逐项积分，$\ln(1+x)=\int_0^x \dfrac{dt}{1+t}=\int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$

$\therefore f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，$x\in(-1,1]$

因此，$\dfrac{f^{(10)}(0)}{10!}=-\dfrac{1}{8}$，$f^{(10)}(0)=-\dfrac{10!}{8}=-453600$

4、判断广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$的敛散性；

解：（以下解题步骤每行1分）

原式$=\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}=\infty$，$x=0$是$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}$的瑕点

考虑极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^q\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}=1$，这里$q=\dfrac{1}{3}$

既然 $q<1$，由定理可知广义积分$\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$收敛（*）

考虑极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{p-4/3}}{(1+x^{-1})}$，

取$p=\dfrac{4}{3}$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}=1$

既然 $p>1$，由定理可知广义积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$收敛（**）

由（*）和（**），原式收敛。

5、设函数$y=y(x)$是由方程组$\begin{cases} x=\int_1^t e^{-u^2}du \\ y^3-\ln(x+t)=1 \end{cases}$ 确定的，求$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}$；

解：（以下解题步骤每行2分）

因为$e^{-u^2}>0$，当$x=0$时，必须$t=1$，于是$y^3=1$，$y=1$

$\dfrac{dx}{dt}=e^{-t^2}$，$3y^2\cdot\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{1}{x+t}\cdot(\dfrac{dx}{dt}+1)=0$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{3y^2(x+t)}\cdot(\dfrac{dx}{dt}+1)$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1+e^{t^2}}{3y^2(x+t)}$

$\dfrac{dy}{dx}|_{x=0}=\dfrac{1+e^{t^2}}{3y^2(x+t)}|_{x=0,y=1,t=1}=\dfrac{1+e}{3}$

6、设连续函数$f(x)$满足$f(0)=0$，$f'(0)=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^{2x} f(3x-t)dt}{(e^x-1)\tan x}$.

解：（以下解题步骤每行1分）

令$u=3x-t$，$du=-dt$

$g(x)=\int_x^{2x} f(3x-t)dt=\int_{2x}^{x} f(u)(-du)=\int_x^{2x} f(u)du$

$g'(x)=f(2x)\cdot(2x)'-f(x)\cdot(x)'=2f(2x)-f(x)$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}$，因为$g(0)=0$，可以使用洛必达法则得到：

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(2x)-f(x)}{2x}$（这里题设不支持洛必达法则）

因为$f(0)=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，

同理可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{2x}=1$

因此，原式$=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

三、应用题：(20分）

1、设曲线$y=\sqrt{x}$与$y=x^2$围成的平面区域为D，

（1）求区域D的面积（4分）；

（2）求区域D绕y轴旋转的旋转体体积（6分）.

解：（以下解题步骤每行2分）

（1）正确画出区域D的图像，区域D的面积$=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx$

$=(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{3}x^3)|_0^1=\dfrac{1}{3}$

（2）$y=x^2$、$y=1$与$x=0$围成区域绕y轴旋转的体积$V_1=\int_0^1 \pi y dy$；

$y=\sqrt{x}$、$y=1$与$x=0$围成区域绕y轴旋转的体积$V_2=\int_0^1 \pi(y^2)^2dy$

于是，区域D绕y轴旋转的旋转体体积$=V_1-V_2=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{3\pi}{10}$

另解：由元素法，$dV=2\pi x(\sqrt{x}-x^2)dx$

于是，区域D绕y轴旋转的旋转体体积$=\int_0^1 2\pi x(\sqrt{x}-x^2)dx$

$=2\pi(\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\dfrac{1}{4}x^4)\Big|_0^1=\dfrac{3\pi}{10}$

2、宽度分别为a和b的两条走廊相交成直角，打算将一根细棒经过这两条走廊水平运出，

（1）如果细棒长度为$a+b$，讨论能否水平运出该细棒（3分）；

（2）设细棒紧靠走廊拐角，并与一条走廊的夹角为$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，求细棒最大长度（2分）

（3）当$b = 3\sqrt{3}a$时，求能够水平运出的细棒的最大长度（5分）．

解：（以下解题步骤每行1分）

（1）正确画出走廊的图像，以及如下过程示意图：

将细棒紧贴一条走廊侧边并接触到另一条走廊侧边，

细棒绕走廊拐角旋转90度即可水平运出；

（2）细棒落在走廊内的两段，其长度分别不超过$\frac{a}{\sin\theta}$和$\frac{b}{\cos\theta}$

于是细棒最大长度 $l = l(\theta) = \frac{a}{\sin\theta} + \frac{b}{\cos\theta}$，$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

（3）计算 $l'(\theta) = -\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}a + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}b = b\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(\tan^3\theta - \frac{a}{b})$

由$l'(\theta) = 0$可得 $\tan^3\theta = \frac{a}{b} = (\frac{\sqrt{3}}{3})^3$，解得驻点 $\theta = \frac{\pi}{6}$

当$\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$时，$l'(\theta) < 0$；当$\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$时，$l'(\theta) > 0$；

$\therefore l(\frac{\pi}{6}) = 2a + \frac{2b}{\sqrt{3}} = 8a$是$l(\theta)$的极小值，由题意只要细棒长度

不超过$8a$就能通过走廊，故细棒最大长度为$8a$。

注：如果取 $l = l(\theta) = \frac{b}{\sin\theta} + \frac{a}{\cos\theta}$，$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$，

那么驻点为$\theta = \frac{\pi}{3}$，极小值为$l(\frac{\pi}{3}) = 8a$

四、证明题：（每题7分，共14分）

1、设$a_n=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)dx$，$b_n=(n+1)\dfrac{a_n}{2^n}$，$c_n=(-1)^n\sqrt{a_n}$，证明：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\ln 2$（4分）；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 条件收敛（3分）.

证：（以下证明步骤每行1分）

（1）$a_n=\int_0^1(x^{n-1}-x^n)dx=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

$b_n=2^{-n}(n+1)a_n=\dfrac{1}{n}\cdot 2^{-n}$，于是考虑$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\dfrac{dt}{1-t}=\ln\dfrac{1}{1-x}$，$|x|<1$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=s(\dfrac{1}{2})=\ln 2$

（2）显然$\sqrt{a_n}=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$单调减少并且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=0$，

由交错级数收敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{a_n}$收敛

但是，$\sqrt{a_n}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}n}$，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$发散，得证

2、设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，并且$\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2017}$，求证：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=\xi^{2016}$（3分）；

（2）对任意的正整数n，都存在$\xi_i\in(\dfrac{i}{n},\dfrac{i+1}{n})$，使得$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\xi_i^{2016}$（4分）.

证：（以下证明步骤每行1分）

（1）（对结论积分容易想到）构造辅助函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt-\dfrac{x^{2017}}{2017}$

因为$F(0)=0$，$F(1)=\int_0^1 f(t)dt-\dfrac{1}{2017}=0$，由罗尔定理，

存在$\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=f(\xi)-\xi^{2016}=0$，得证；

（2）对任意的正整数n，$F(x)$在$[\dfrac{i}{n},\dfrac{i+1}{n}]$上连续可导，$i=0,1,2,\cdots$

由中值定理，存在$\xi_i\in(\dfrac{i}{n},\dfrac{i+1}{n})$，使得$F(\dfrac{i+1}{n})-F(\dfrac{i}{n})=F'(\xi_i)\cdot\dfrac{1}{n}$

$\because \sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(F(\dfrac{i+1}{n})-F(\dfrac{i}{n})\right)=F(1)-F(0)=0$，

$\therefore \sum\limits_{i=0}^{n-1}F'(\xi_i)\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(f(\xi_i)-\xi_i^{2016})=0$，两边乘以$n$即可得证.