导数概念

一、设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，试按定义求 $f'(a)(a\neq 0)$.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a}=-\frac{1}{a^2}$$

二、证明：$(\cos x)'=-\sin x$.

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{\sin x\sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$=-\sin x$$

三、设 $f'(x_0)$ 存在，则：

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=$ $-f'(x_0)$；

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$ $2f'(x_0)$；

3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+ah)-f(x_0+bh)}{h}=$ $(a-b)f'(x_0)$.

四、设 $f'(0)$ 存在，则：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$ $f'(0)$；

2. 若 $f(0)=0$，则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}$ $\dfrac{f(x)}{x}$.

五、1. 已知 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=4$，求 $f'(x_0)$.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}\cdot\frac{1}{-2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-2}=-\frac{1}{8}$$

2. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\tan x-\sin x)}{x^3}=4$，求 $f'(0)$.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(\tan x-\sin x)}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{f(\tan x-\sin x)}{x^3}\cdot\frac{x^3}{\tan x-\sin x}$$
$$=4\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\tan x-\sin x}$$
$$=8$$

六、讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

1. $f(x)=|\sin x|$；

2. $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0,\\ \sin x, & x\leqslant0.\end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to0}|\sin x|=0=f(0)$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

又由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|\sin x|}{x}=1$

与 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|\sin x|}{x}=-1$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sin x=0$

$f(0)=0$. 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

与 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

七、讨论 α 取何值时，函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处①连续；②可导.

① 由于当 $\alpha>0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 此外当 $\alpha\le 0$ 时, 容易验证 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

② 当 $\alpha>1$ 时. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}=0$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 此外当 $\alpha\le 1$ 时, 容易验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在

八、设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$.

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}=\varphi(a)$

九、设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$，求 $f'(10)$.

令 $\varphi(x)=\prod\limits_{i=1}^{9}(x-i)=(x-1)(x-2)\cdots(x-9)$

故 $f(x)=(x-10)\varphi(x)$. 由八题结论

$f'(10)=\varphi(10)=9!$

十、已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\leqslant 0,\\ x, \quad x>0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leq 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

十一、求曲线 $y=\ln x$ 在点 $(e,1)$ 处的切线方程和法线方程.

$$y'\Big|_{x=e}=\frac{1}{e}$$

于是切线方程：$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$

法线方程：$y-1=-e(x-e)$

十二、求曲线 $y=e^x$ 经过原点的切线方程和对应的法线方程.

设过原点直线与 $y=e^x$ 相切于 (x_0,y_0)

则 $e^{x_0}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{e^{x_0}}{x_0} \Rightarrow x_0=1, y_0=e$，又 $y'\Big|_{x=1}=e$

故切线方程：$y-e=e(x-1)$

法线方程：$y-e=-\frac{1}{e}(x-1)$

十三、设 $f(x)$ 为偶函数，$f'(0)$ 存在，证明：$f'(0)=0$，并用函数图形解释其几何意义.

由于 $f'(0)$ 存在，故 $f_+'(0)=f_-'(0)$

又 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\cdot(-1)$

$=-\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=-f_-'(0)$，从而 $f'(0)=0$

学院________　姓名________　学号________　教师________

求导法则(1)　导数的四则运算

一、求下列函数的导数.

1. $y=x^a+a^x+ax^2$,a 为常数,$a>0$;

$y'=ax^{a-1}+a^x\ln a+2ax$

2. $y=3\sin x-4\cos x+\sin 1$;

$y'=3\cos x+4\sin x$

3. $y=\ln x-2\lg x+5\log_2 x$;

$y'=\frac{1}{x}-\frac{2}{x\ln 10}+\frac{5}{x\ln 2}$

4. $y=(\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)$;

$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

5. $y=\frac{x\ln x}{1+x^2}$；

$$y'=\frac{(\ln x+1)(1+x^2)-2x^2\ln x}{(1+x^2)^2}$$

6. $y=x^2\ln x\cdot\cos x$；

$$y'=2x\ln x\cos x+x\cos x-x^2\sin x\ln x$$

7. $y=x^2\arctan x$；

$$y'=2x\arctan x+\frac{x^2}{1+x^2}$$

8. $y=\frac{\arcsin x}{x}$.

$$y'=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x}{x^2}$$

$$=\frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

二、已知 $f(x)$ 的导函数为 $\frac{e^x}{1+x^2}$，且 $f(1)=2$. 设 $y=\frac{f^{-1}(x)}{1+x^2}$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=\frac{(f^{-1}(x))'(1+x^2)-f^{-1}(x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{\frac{2}{e}\cdot 5-4}{25}=\frac{2}{5e}-\frac{4}{25}$$

$$\left[(f^{-1}(x))'=\frac{1}{(f(y))'}=\frac{1+y^2}{e^y}\right]$$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

求导法则(2)　复合函数的导数

一、求下列函数的导数.

1. $y=(3x+6)^5$；
2. $y=\sin^3(2x)$；
3. $y=\sqrt{a^2-x^2}$；

$y'=5(3x+6)^4\cdot 3$

$=15(3x+6)^4$

$y'=3\sin^2(2x)\cdot\cos(2x)\cdot 2$

$=6\sin^2(2x)\cos(2x)$

$y'=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

4. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$；
5. $y=\arctan(x^3)$；
6. $y=e^{-\cos^2\frac{1}{x}}$.

$y'=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$y'=\dfrac{3x^2}{1+x^6}$

$y'=e^{-\cos^2\frac{1}{x}}\left(2\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$=\dfrac{-2}{x^2}e^{-\cos^2\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

二、设函数可导,证明:

1. 偶函数的导数是奇函数;
2. 奇函数的导数是偶函数;
3. 周期函数的导数是周期函数.

1、$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{-\Delta x}=-f'(-x)$

并且若 $f'(0)$ 存在,则由上一节习题十三,$f'(0)=0$,从而 $f'(x)$ 为奇函数

2、$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{-\Delta x}=f'(-x)$,从而 $f'(x)$ 为偶函数.

3、若 $f(x)$ 以 T 为周期,即 $f(x+T)=f(x)$,则

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x)}{\Delta x+T}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta x+T}$$

$$=f'(x+T)$$

三、设 $f(x)$ 可导,求下列函数的导数.

1. $y=f(e^{-x^2})$;

$y'=f'(e^{-x^2})e^{-x^2}\cdot(-2x)$

$=-2xe^{-x^2}f'(e^{-x^2})$

2. $y=f(\arcsin\frac{1}{x})$.

$y'=f'(\arcsin\frac{1}{x})\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}(-\frac{1}{x^2})$

$=-\frac{f'(\arcsin\frac{1}{x})}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

四、求下列函数的导数.

1. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+x^{\frac{3}{2}}}}$$

2. $y=\arcsin(1-2x)$;

$$y'=\frac{-2}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$$

3. $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;

$$y'=\left(\frac{2}{1-\sin 2x}-1\right)'$$

$$=\frac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$$

4. $y=\ln(\sec x+\tan x)$.

$$y'=\frac{\tan x\sec x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}$$

$$=\sec x$$

五、设 $g(x)=f(b+mx)+f(b-mx)$，其中 f 可导，求 $g'(0)$.

$$g'(0)=mf'(b)-mf'(b)=0$$

学院＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　教师＿＿＿＿

六、求 $y=\tan(\frac{\pi x^2}{4})$ 在点(1,1)处的切线方程.

$y'\big|_{x=1}=\frac{\pi x}{2}\sec^2\left(\frac{\pi x^2}{4}\right)\Big|_{x=1}=\frac{\pi}{2}\cdot 2=\pi$

故切线方程：$y-1=\pi(x-1)$

七、求 $y=\frac{1}{x}$ 的经过点(2,0)的切线方程.

设过原点的直线与 $\frac{1}{x}$ 相切于 (x_0,y_0).

则 $-\frac{1}{x_0^2}=\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{1}{x_0(x_0-2)}$，故 $x_0=1$，$y_0=1$

又 $y'\big|_{x=1}=-1$

故切线方程：$y-1=-(x-1)$

八、$y=f(x)$的反函数为 $y=g(x)$，$f(1)=2$，$f'(1)=4$，求 $y=g(1+x^2)$在 $x=1$ 处的导数.

$y'\big|_{x=1}=2g'(2)=2\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$