# 四川大学期末考试试题（闭卷）

(2022——2023学年第1 学期)　**A 卷**

课程号: **201137050**　课序号:　课程名称: **微积分(I)-1**　任课教师:　成绩:
适用专业年级:　学生人数:　印题份数:　学号:　姓名:

| 考 生 承 诺 |
|---|
| 我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：<br>1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；<br>2、不带手机进入考场；<br>3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。<br>考生签名： |

## 一 填空题(每题3分, 共18分)

1 .极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+2\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+n\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)=$ ________.

2 .曲线 $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=t^2+\ln(t-1) \end{cases}$ 在$x=0$处的法线方程为________.

3 .积分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left[x(\sin x)^3+x(2023)^{\cos x}+\sqrt{\pi^2-x^2}\right]dx=$ ________.

4 .已知 $f(x)=(x^2+x-2)\cos x$, 则 $f^{(2023)}(0)=$ ________.

5 .不定积分 $\displaystyle\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx=$ ________.

6 .设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导, 其反函数为 $y=\varphi(x)$, 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+x-2}{\sin x}=2$, 则$\varphi(1+x^2)$在$x=1$处的导数为 ________.

## 二 (8分) 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_1^{\cos x}e^{-t^2}dt}{\ln(\cos x)}$.

三 (10分) 设$a>0$. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(e^{x^a}-1), & x>0\\ x^b\arctan x, & x\le 0\end{cases}$. 试讨论

(1) 当$a,b$取何值时函数在$x=0$处连续.

(2) 当$a,b$取何值时函数在$x=0$处可导, 并求$f'(0)$.

四 (8分) 设函数 $y=y(x)$由方程$x^3+y^3-3xy=1$确定, 且二阶导函数$y''(x)$连续. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)y+1}{x^2}$.

五 (8分) 求曲线$y=\dfrac{x^3\arctan x}{x^2-1}$的渐近线.

六 (8分) 当$x\to 0$时, 无穷小量$\displaystyle\int_{\sin x}^{x} x(e^t-1)dt$与$ax^b$等价, 求$a,b$的值.

七 (10分) 设$a>0$, 求定积分$I=\displaystyle\int_0^a\left(|x^2-\frac{a}{2}x|+\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$.

八 (10分) 求曲线$y=\sqrt{x}$在区间$[1,2]$内的一条切线, 使得该切线与曲线$y=\sqrt{x}$及直线$x=1$, $x=2$所围图形$D$的面积最小; 并求此时$D$绕$y$轴旋转一周形成的旋转体体积$V_y$.

九 (10分) 求微分方程$y''-3y'+2y=(2x+4)e^{2x}$的通解.

十 (10分) 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶连续可导. 设$f(x)\ge 0, f''(x)<0$.
令$I_n=\displaystyle\int_0^1 f(x^n)dx$ ($n$是自然数).

(1) 若存在$c\in[0,1]$使得$f(c)\neq 0$. 证明: $I_n>0$.

(2) 证明: $I_n\le f(\dfrac{1}{n+1})$.

(3) 设$f(0)=0$, 求$\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.