

**四川大学期末考试试题（闭卷）**  
**（2021——2022 学年第 1 学期）      A 卷**

课程号：201137050    课序号：    课程名称：微积分（I）-1    任课教师：    成绩：  
适用专业年级：    学生人数：    印题份数：    学号：    姓名：

**考 生 承 诺**

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

- 1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
- 2、不带手机进入考场；
- 3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

**一、填空题(每小题3分，共15分)**

1. 矢量  $a = (1, \sqrt{2}, 1)$  与  $z$  轴正向的夹角  $\theta =$  \_\_\_\_\_.
2. 已知  $f(x) = x^2 \sin x$ , 则  $f^{(2021)}(0) =$  \_\_\_\_\_.
3.  $\int_{-1}^1 [x \ln(x^{2022} + 2021) + \sqrt{1-x^2}] dx =$  \_\_\_\_\_.
4. 过原点  $(0, 0, 0)$  且与矢量  $(1, 2, 3)$  和  $(1, -1, 0)$  都平行的平面方程为 \_\_\_\_\_.
5. 函数  $f(x) = \frac{\sin x - e^{\frac{1}{x-1}}}{x(x-1)}$  有 \_\_\_\_\_ 个无穷间断点.

**二、解答题(每小题8分，共48分)**

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{(x-1)^2}$ .
2. 若函数  $f(x) = \begin{cases} e^{2x} \sin x, & x > 0 \\ ax^2 + bx + c, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处二阶可导，求  $a, b, c$  的值.
3. 求不定积分  $\int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)} dx$ .

4. 若连续函数  $f(x)$  满足  $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \int_0^1 x f(x) dx$ , 求  $f(x)$  的表达式.

5. 求广义积分  $\int_0^1 (\ln x)^2 dx$ .

6. 当  $x \rightarrow 0$  时, 判断函数  $f(x) = \int_0^{1-\cos x} x(e^{\tan x} - 1) dx$  是  $x$  的几阶无穷小.

### 三、应用题(每小题11分, 共22分)

1. 设在  $xoy$  平面上的区域  $D$  是由直线  $y = x$ ,  $x$  轴以及平面曲线  $x = \sqrt{2-y^2}$  围成的封闭区域, 若  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所成的旋转体为  $\Omega$ , 求:

(1) 立体  $\Omega$  的体积; (2) 立体  $\Omega$  表面曲面的方程.

2. 设直线  $L_1: y = kx (0 < k < 1)$  与抛物线  $L_2: y = x^2$  所围图形的面积为  $S_1$ , 同时  $L_1, L_2$  与  $L_3: x = 1$  所围成图形的面积为  $S_2$ . 求  $k$  的值, 使得  $S_1 + S_2$  达到最小值, 并求出最小值.

### 四、证明题(第一小题7分, 第二小题8分, 共15分)

1. 设函数  $f(x) \in C[0, 1]$ , 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , 证明: 至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$\int_0^{\xi} f(t) dt = f(\xi).$$

2. 证明不等式  $\frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{4} \right)^3 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x^2 dx < 1 - \frac{\pi}{4}$ .