导数应用

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

导数的应用

一、确定下列函数的单调区间、极值以及曲线的凹凸区间和拐点.

1. $y=\frac{1}{1+x^2}$;　　　　2. $y=xe^{-x}$;

1. $y'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}=0\Rightarrow x=0$. $x<0, y'>0$. 函数单增; $x>0, y'<0$, 函数单减

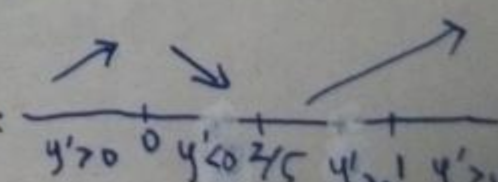
$y(0)=1$ 为极大值. $y''=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^4}=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt3}$.

$|x|<\frac{1}{\sqrt3}$ 时, $y''<0$, 曲线是凸的; $|x|>\frac{1}{\sqrt3}$ 时, $y''>0$, 曲线是凹的. 拐点 $(\pm\frac{1}{\sqrt3},\frac34)$ ✓

2. $y'=(1-x)e^{-x}$, $y''=(x-2)e^{-x}$. 令 $y'=0$, 得 $x=1$ (驻点). 在 $(-\infty,1)$ 内, $y'>0$, 函数单增; 在 $(1,+\infty)$ 内, $y'<0$, 函数单减. 令 $y''=0$, 得 $x=2$. 在 $(-\infty,2)$ 内, $y''<0$, 曲线凸; 在 $(2,+\infty)$ 内, $y''>0$, 曲线凹. 拐点 $(2, 2/e^2)$. 极大值 $y(1)=1/e$

3. $y=(x-1)^3x^2+4$;　　　　4. $y=\sqrt[3]{x-1}(x-1)^2$.

3. $y'=x(x-1)^2(5x-2)=0\Rightarrow x=0, x=1, x=\frac25$ 单调性:



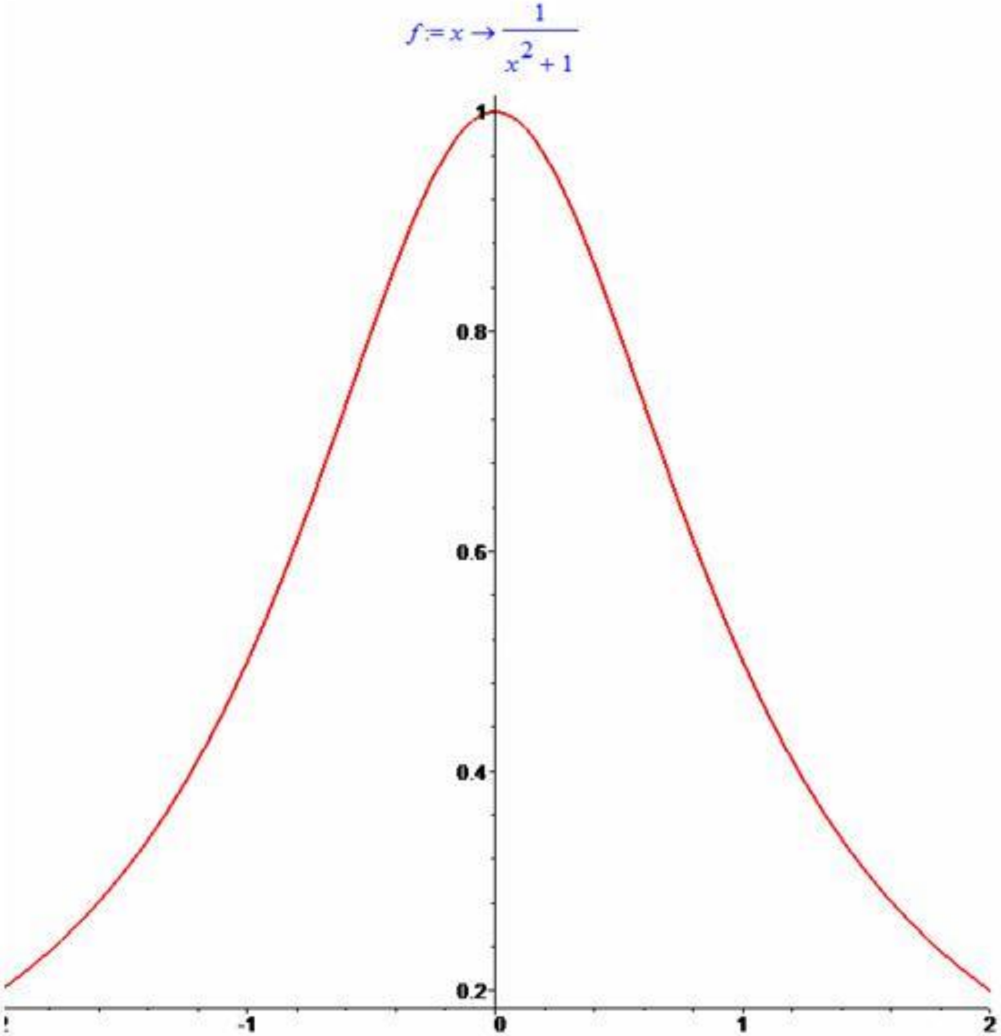
单增区间: $(-\infty,0)$, $(\frac25,+\infty)$. 单减区间: $(0,\frac25)$. 极大值 $y(0)=4$, 极小值 $y(\frac25)=4-\frac{28}{15}$

一、1　　　单调性与极值

$$0$$

$$Max := 1$$

```
f:=x->1/(1+x^2);
plot(f(x),x=-4..4,thickness=2);
solve(D(f)(x)=0,x);
Max:=f(0);
```

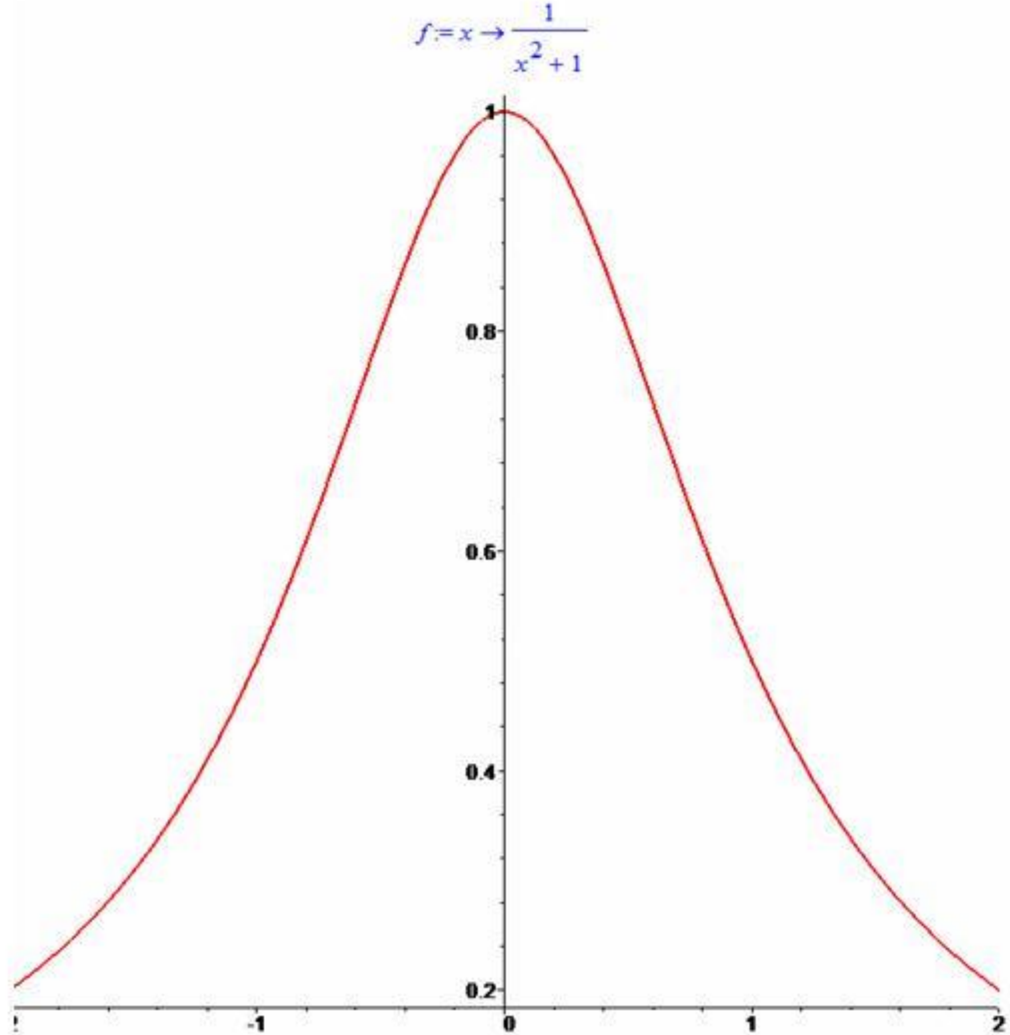


一、1　　凹凸性与拐点

$$\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

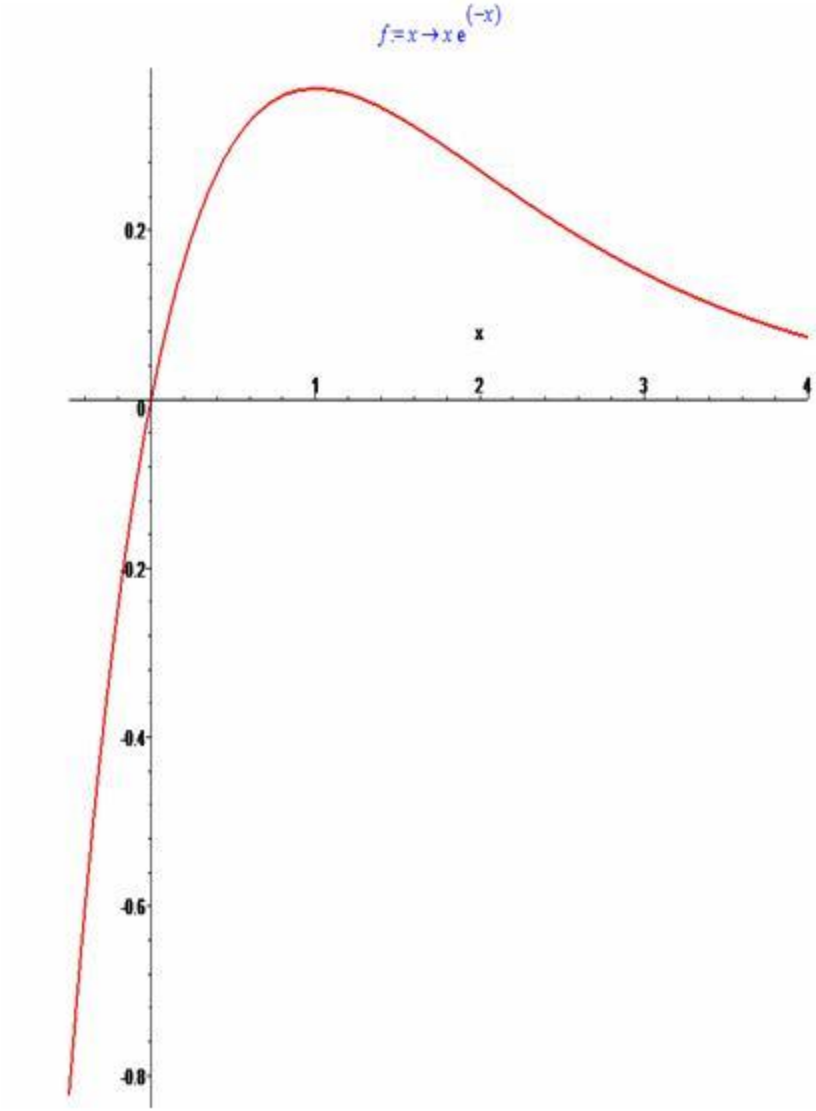
$$GD1 := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$GD2 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$




```
f:=x->1/(1+x^2);
plot(f(x),x=-2..2,thickness=2);
solve((D@@2)(f)(x)=0,x);
GD1:=<-1/sqrt(3),f(-1/sqrt(3))>;
GD2:=<1/sqrt(3),f(1/sqrt(3))>;
```

一、2　单调性与极值

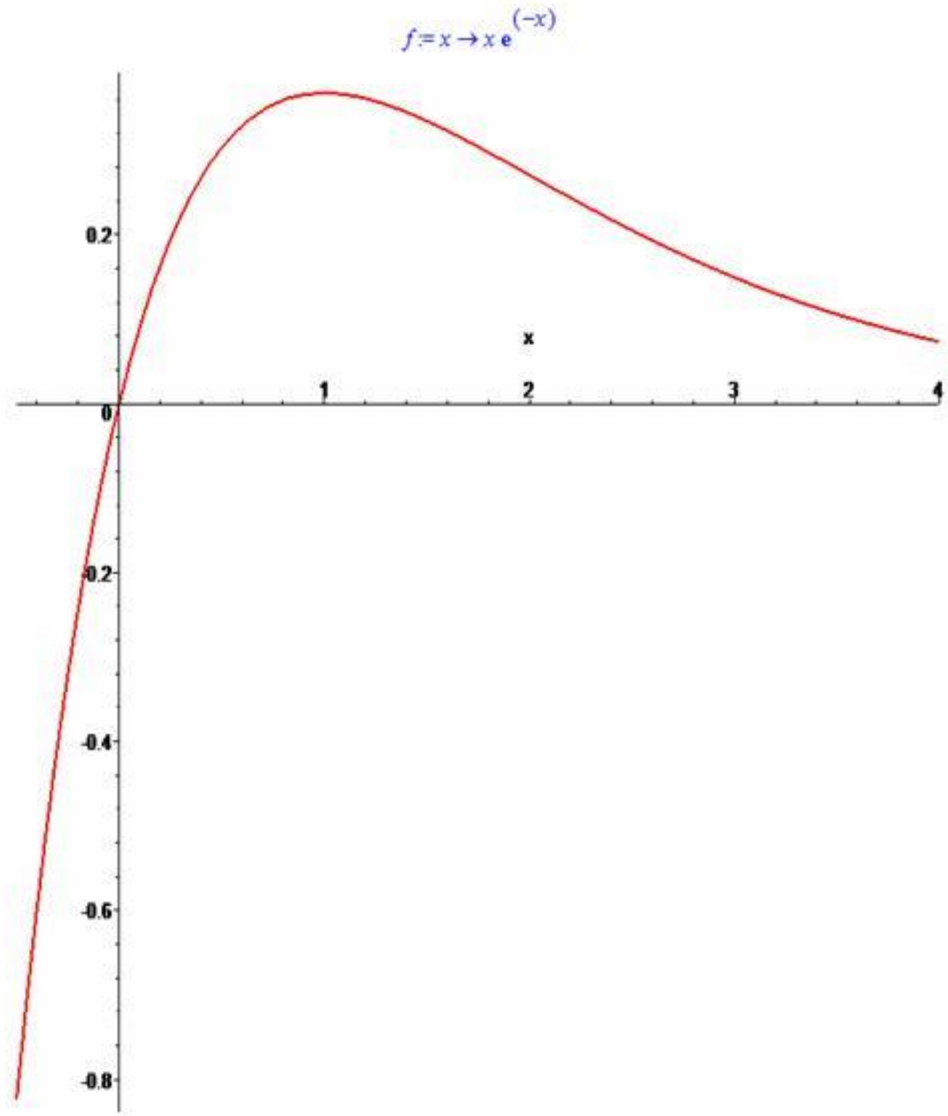


$$1$$

$$Max := e^{(-1)}$$

```
f:=x->x*exp(-x);
plot(f(x),x=-.5..4,thickness=2);
solve(D(f)(x)=0,x);
Max:=f(1);
```

一、2 凹凸性与拐点



$$2$$

$$GD := \begin{bmatrix} 2 \\ 2\,e^{(-2)} \end{bmatrix}$$

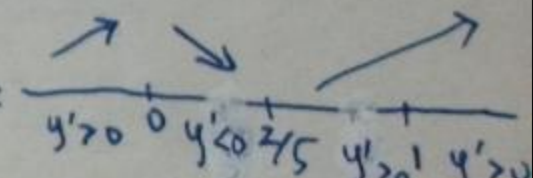
```
f:=x->x*exp(-x);
plot(f(x),x=-0.5..4,thickness=2);
solve((D@@2)(f)(x)=0,x);
GD:=<2,f(2)>;
```

$|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$y''<0$，曲线是凸的；$|x|>\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，$y''>0$，曲线是凹的. 拐点 $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ ✓

2. $y'=(1-x)e^{-x}$，$y''=(x-2)e^{-x}$. 令 $y'=0$，得 $x=1$（驻点）. 在 $(-\infty,1)$ 内，$y'>0$，函数单增；在 $(1,+\infty)$ 内，$y'<0$，函数单减. 令 $y''=0$，得 $x=2$. 在 $(-\infty,2)$ 内，$y''<0$，曲线凸；在 $(2,+\infty)$ 内，$y''>0$，曲线凹. 拐点 $(2, 2/e^2)$. 极大值 $y(1)=1/e$

3. $y=(x-1)^3x^2+4$；　　4. $y=\sqrt[3]{x-1}\,(x-1)^2$.

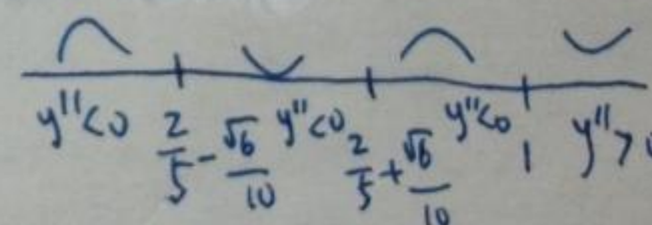
3. $y'=x(x-1)^2(5x-2)=0 \Rightarrow x=0, x=1, x=\frac{2}{5}$ 单调性：



单增区间：$(-\infty,0)$，$(\frac{2}{5},+\infty)$，单减区间：$(0,\frac{2}{5})$. 极大值 $y(0)=4$，极小值 $y(\frac{2}{5})=4-\frac{28}{55}$

$y''=2(x-1)(10x^2-8x+1)$

$y''=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}, x_3=\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}$



凹区间：$(\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}, \frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10})$，$(1,+\infty)$

凸区间：$(-\infty, \frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10})$，$(\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}, 1)$. 拐点 $(1,4)$，$(\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}, y(\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}))$，$(\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}, y(\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}))$.

、求下列函数曲线的渐近线.

$y=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}$；　　2. $y=\frac{x^3}{(x-1)(2-x)}$.

1. $\lim_{x\to0^+} y=-\infty$，而 $\lim_{x\to1} y=\infty$. ∴ $x=0$ 和 $x=1$ 为铅直渐近线

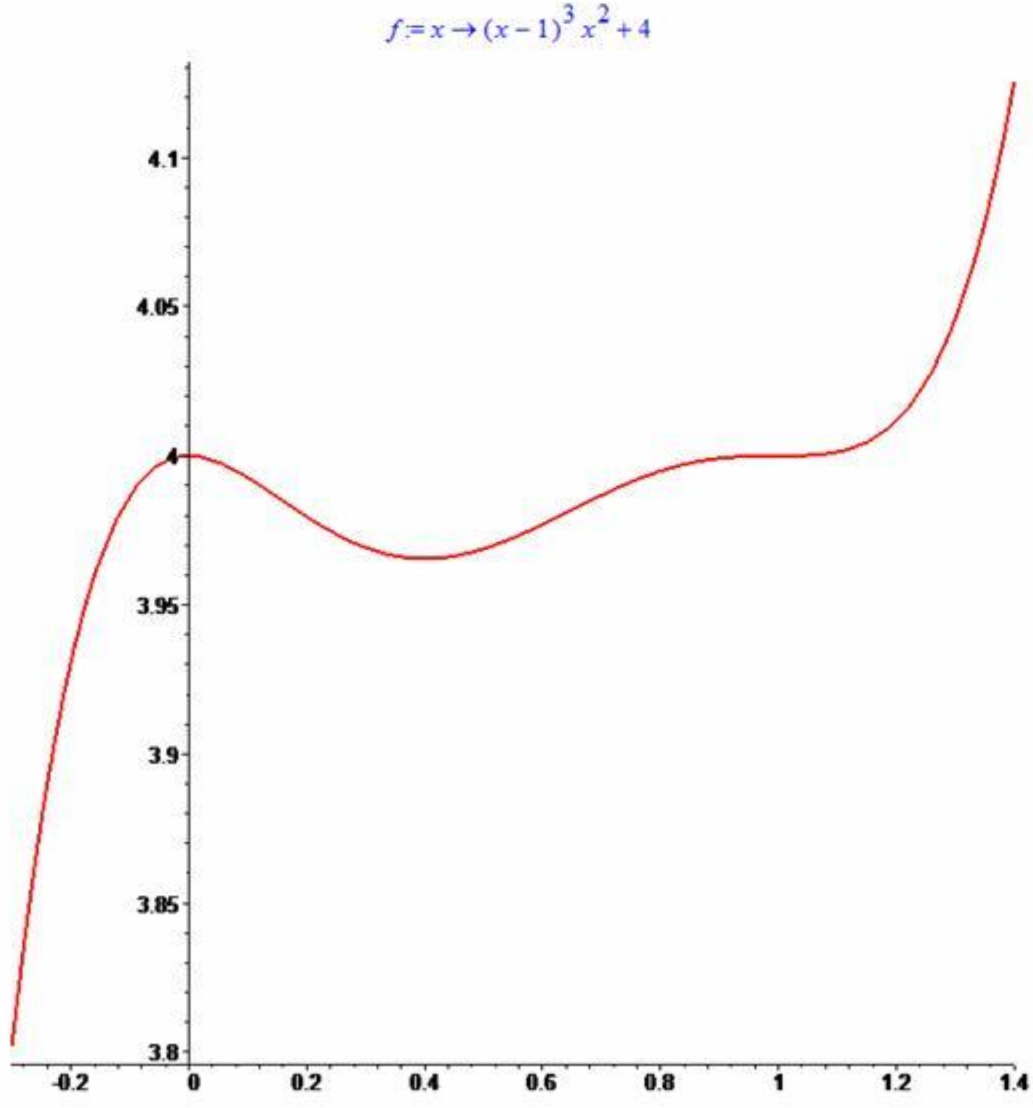
一、3　　单调性与极值

$$0, \frac{2}{5}, 1, 1$$

$$Max := 4$$

$$Min := \frac{12392}{3125}$$

```
f:=x->(x-1)^3*x^2+4;
plot(f(x),x=-.3..1.4,thickness=2);
solve(D(f)(x)=0,x);
Max:=f(0);
Min:=f(2/5);
```



一、3 凹凸性与拐点

$$f := x \to (x-1)^3 x^2 + 4$$

$$6\,(-1+x)\,x^2 + 12\,(-1+x)^2\,x + 2\,(-1+x)^3$$

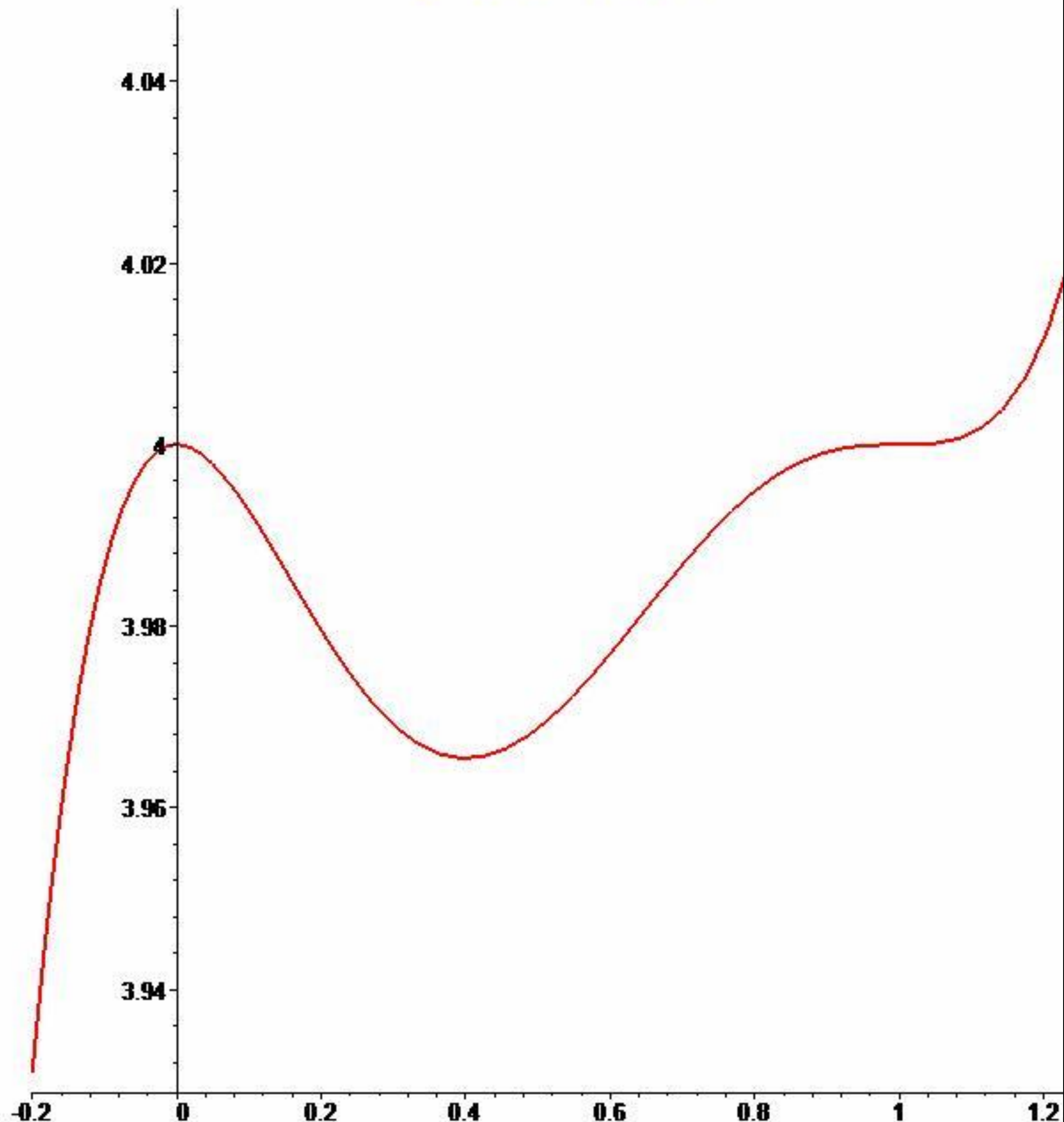
$$1,\ \frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10},\ \frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}$$

$$GD1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$GD2 := \begin{bmatrix} \frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10} \\ \left(-\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}\right)^3 \left(\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}\right)^2 + 4 \end{bmatrix}$$

$$GD3 := \begin{bmatrix} \frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10} \\ \left(-\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}\right)^3 \left(\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}\right)^2 + 4 \end{bmatrix}$$

```
f:=x->(x-1)^3*x^2+4;
plot(f(x),x=-0.2..1.3,thickness=2);
(D@@2)(f)(x);
solve((D@@2)(f)(x)=0,x);
GD1:=<1,f(1)>;
GD2:=<2/5+sqrt(6)/10,f(2/5+sqrt(6)/10)>;
GD3:=<2/5-sqrt(6)/10,f(2/5-sqrt(6)/10)>;
```



4. $y=(x-1)^{\frac{7}{3}}$, $y'=\frac{7}{3}(x-1)^{\frac{4}{3}}$, $y''=\frac{28}{9}(x-1)^{\frac{1}{3}}$

$y'=0 \Rightarrow$ 驻点 $x=1$, $y''=0 \Rightarrow x=1$

∵ $y' \geq 0 \ (-\infty < x < +\infty)$ ，函数单增

$y''<0 \ (x<1)$, $y''>0 \ (x>1)$

曲线在 $(-\infty,1)$ 上凸；在 $(1,+\infty)$ 上凹.

凸区间：$(-\infty, \frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10})$，$(\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}, 1)$. 拐点 $(1,4)$，$(\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}, y(\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}))$，$(\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}, y(\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}))$.

$\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{6}}{10}$ $\frac{2}{5}+\frac{\sqrt{6}}{10}$ 1 $y''>0$

二、求下列函数曲线的渐近线.

1. $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}$；

2. $y=\dfrac{x^3}{(x-1)(2-x)}$.

1. $\lim\limits_{x\to0^+} y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to1} y=\infty$. $\therefore x=0$ 和 $x=1$ 为铅直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty} y=0$，$\therefore y=0$ 为水平渐近线

2. $\lim\limits_{x\to1} y=\infty$，$\lim\limits_{x\to2} y=\infty$. $\therefore x=1$ 和 $x=2$ 为铅直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$，无水平渐近线. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=-1=k$，

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+(x-1)(2-x)x}{(x-1)(2-x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-2)x}{(x-1)(2-x)}=-3=b$

斜渐近线：$y=-x-3$.

$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{x}\sqrt{ax}} > 0$$

$\therefore$ ~~b~~ $> a$ 时, $f(b) > f(a) = 0$

即 $\frac{b-a}{\sqrt{ab}} > \ln b - \ln a$

四、求 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上任意点处的曲率.

星形线的参数方程: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \le t < 2\pi)$

求在 $t = t_0$ 处的曲率.

~~$x' = -3a\cos^2 t\sin t$, $y' = 3a\sin^2 t\cos t$~~

~~x''~~

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a}\sec^4 t\csc t$$

$$K\big|_{t=t_0} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \left|\frac{2}{3a\sin 2t_0}\right| \quad \left(t_0 \ne 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

五、证明下列不等式.

1. $\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}(0<x<1)$;

2. $\sin x+\cos x > 1+x-x^2(x>0)$;

1. 原不等式等价于 $(1-x)e^{2x}<(1+x)\ (0<x<1)$

令 $f(x)=1+x-(1-x)e^{2x}$，则 $f'(x)=1+e^{2x}(2x-1)$（符号不明显）

再求导：$f''(x)=4xe^{2x}>0\ (0<x<1)$. ∴ $f'(x)$单增.

∴ $0<x<1 \Rightarrow f'(x)>f'(0)=0$. ∴ $f(x)$单增 $\Rightarrow 0<x<1$ 有 $f(x)>f(0)=0$. 不等式成立.

2. 令 $f(x)=\sin x+\cos x-(1+x-x^2)$, $f'(x)=\cos x-\sin x-1+2x$（符号不明显）

再求导：$f''(x)=-\sin x-\cos x+2\geq 0$. ∴ $f'(x)$单增，$x>0\Rightarrow f'(x)>f'(0)=0$

∴ $f(x)$单增. $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$. 不等式成立.

3. $\sin x > x-\frac{x^3}{6}(x>0)$;

4. 设 $0<a<b$，则 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$. (2002

3. 令 $f(x)=\sin x-(x-\frac{x^3}{6})$. $f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$（符号不明显）.

再求导. $f''(x)=$ … $f'(x)$单增

$), f'(x) = \cos x - \sin x - 1 + 2x$（符号不明显）

再求导：$f''(x) = -\sin x - \cos x + 2 \geq 0$. $\therefore f'(x)$ 单增，$x>0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$

$\therefore f(x)$ 单增. $x>0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$. 不等式成立.

3. $\sin x > x - \frac{x^3}{6} (x>0)$；

4. 设 $0<a<b$，则 $\frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$.（2002

3. 令 $f(x) = \sin x - (x - \frac{x^3}{6})$. $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$（符号不明显）.

再求导：$f''(x) = -\sin x + x > 0$（$\because x > \sin x (x>0)$）. $\therefore f'(x)$ 单增.

$\therefore x>0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$. 于是 $f(x)$ 单增，$x>0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$. 不等式成立.

4. 由Lagrange中值定理. $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{\xi} > \frac{1}{b} \geq \frac{2a}{a^2+b^2}$ $(\because a^2+b^2 \geq 2a$

另一不等式等价于 $\sqrt{ab}(\ln b - \ln a) < b-a$. 令 $f(x) = x - a - \sqrt{ax}(\ln x - \ln a)$.

欲证 $f(b)>0$ $(b>a)$. $f'(x) = 1 - \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}(\ln x - \ln a) - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - \ln x + \ln a - 2)$

令 $g(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - \ln x + \ln a - 2$. $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{x}} > 0$ $(x>a) \Rightarrow g(x) > g(a) = 0$ $(x>a)$

$\therefore f'(x) > 0$. 有 $f(b) > f(a) = 0$ $(b>a)$. 不等式成立.

六、证明：$f(x)$ 在 $[0,c]$ 有严格单调递减的导函数 $f'(x)$，$f(0)=0$，则 $0<a<b<a+b<c$ 有 $f(a+b) < f(a) + f(b)$.

ξ η

在 $[0,a]$ 上用Lagrange中值定理

也可令 $f(x)=\dfrac{x-a}{\sqrt{ax}}-\ln x+\ln a \quad (x>a)$

则 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\right)-\dfrac{1}{x}$

$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{x}\sqrt{ax}}>0$$

∴ $b>a$ 时，$f(b)>f(a)=0$

即 $\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}>\ln b-\ln a$

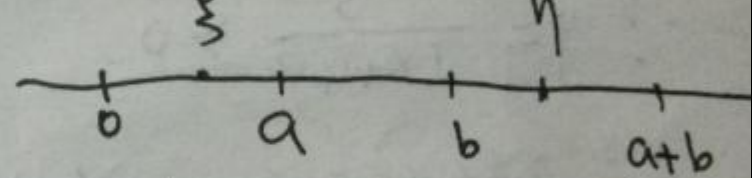
分析法证明 $\sqrt{ab}(\ln b-\ln a)<b-a$. 令 $f(x)=x-a-\sqrt{ax}(\ln x-\ln a)$. $a+b^2$ ($\because a+b\geq 2\sqrt{ab}$)

欲证 $f(b)>0$ ($b>a$). $f'(x)=1-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}(\ln x-\ln a)-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}}-\ln x+\ln a-2\right)$

令 $g(x)=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}}-\ln x+\ln a-2$. $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{x}}>0$ ($x>a$) $\Rightarrow g(x)>g(a)=0$ ($x>a$)

$\therefore f'(x)>0$. 有 $f(b)>f(a)=0$ ($b>a$). 不等式成立.

六、证明：$f(x)$ 在$[0,c]$有严格单调递减的导函数 $f'(x)$，$f(0)=0$，则 $0<a<b<a+b<c$ 有 $f(a+b)<f(a)+f(b)$.



在$[0,a]$上用Lagrange中值定理：

$f(a)-f(0)=f'(\xi)(a-0)$ $(0<\xi<a)$，即 $f(a)=f'(\xi)a$

在$[b,a+b]$上用Lagrange中值定理：

$f(a+b)-f(b)=f'(\eta)[(a+b)-b]=f'(\eta)a$ $(b<\eta<a+b)$

$\because f'(\xi)>f'(\eta)$ $\therefore$ $f(a+b)-f(b)=f'(\eta)a<f'(\xi)a=f(a)$

即 $f(a+b)<f(a)+f(b)$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

七、讨论方程 $\ln x = ax(a>0)$ 有几个实根.

令 $f(x)=\ln x-ax$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=0 \Rightarrow x=\frac{1}{a}$ (驻点)

当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增；当 $\frac{1}{a}<x$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减

$f(\frac{1}{a})=-\ln a-1$ 为最大值.

(1) 当 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1<0$ 即 $a>\frac{1}{e}$ 时，方程无实根.

(2) 当 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1=0$ 即 $a=\frac{1}{e}$ 时，方程有唯一实根.

(3) 当 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1>0$，即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时. 因 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

由零点定理 $f(x)=0$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 分别至少有一实根，再由单调性，方程在这两个区间各有一实根.

八、$x>0$ 时方程 $ax+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根，求 a 的取值范围.

原方程等价于 $ax^3+1=x^2$. 令 $f(x)=ax^3-x^2+1$.

当 $a=0$ 时，$f(x)=-x^2+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内仅有一个根：$x=1$.

由零点定理 $f(x)=0$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 分别至少有一实根，再由单调性，方程在这两个区间各有一实根.

八、$x>0$ 时方程 $ax+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根，求 a 的取值范围.

原方程等价于 $ax^3+1=x^2$. 令 $f(x)=ax^3-x^2+1$.

当 $a=0$ 时，$f(x)=-x^2+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内仅有一个根：$x=1$.

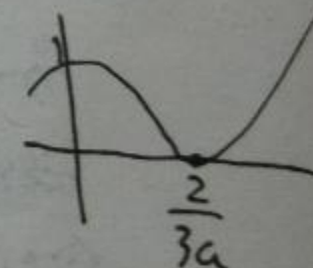
当 $a\neq 0$ 时，求 $f(x)$ 的极值. $f'(x)=3ax^2-2x=0 \Rightarrow$ 驻点：$x=0$，$x=\frac{2}{3a}$

$f''(x)=6ax-2$. $f''(0)=-2<0$，$f''(\frac{2}{3a})=2>0$. $\therefore f(0)=1$ 为极大值，

$f(\frac{2}{3a})=1-\frac{4}{27a^2}$ 为极小值.

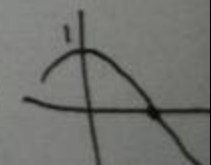
讨论：(1) 当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 必有 $f(\frac{2}{3a})=0$ (如图)

得 $1-\frac{4}{27a^2}=0$，$a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$



(2) 当 $a<0$ 时，$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单减 ($\because f'(x)<0\ (x>0)$)

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. $\therefore f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内仅有一根. (如图)



综上所述，当 $a\leq 0$ 或 $a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 时，方程在 $(0,+\infty)$ 内仅有一个根.

求 $y=\frac{x-1}{x+4}$ 在 $[0,4]$ 上的最大值和最小值.

$y'=\frac{5}{(x+4)^2}>0$

(2) 当 $a<0$ 时，$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减（$\because f'(x)$

且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. $\therefore f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内

综上所述

方程在

九、求 $y=\dfrac{x-1}{x+4}$ 在 $[0,4]$ 上的最大值和最小值.

$\because y'=\dfrac{5}{(x+4)^2}>0$

$\therefore$ 函数在 $[0,4]$ 上单增.

∴ 最小值 $y(0)=-\dfrac{1}{4}$，最大值 $y(4)=\dfrac{3}{8}$

学院________ 姓名________ 学号________

十、$y=mt^2+\frac{1}{t}$在$t\in[1,4]$上满足$y\leqslant 100$,求m的取值范围.

暂缺

十一、已知 $0 \leqslant x \leqslant 1, p > 1$，证明：$2^{1-p} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1$.

令 $f(x) = x^p + (1-x)^p$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

令 $f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1} = 0 \Rightarrow$ 驻点 $x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = 2^{1-p}$，$f(0) = 1$，$f(1) = 1$

最大值为 1，最小值为 2^{1-p}

所以 $2^{1-p} \leq f(x) \leq 1$，不等式成立.

十二、求 $f(x)=\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$ 的最大值和最小值.

$$f'(x)=-2\frac{x(x+4)}{(2x^2+3x+6)^2}=0 \Rightarrow \text{驻点：} x=-4,\ x=0.$$

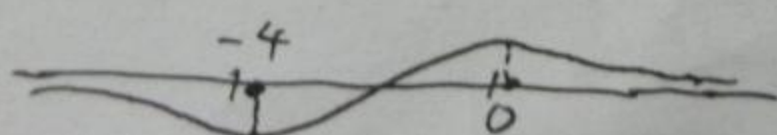
当 $x<-4$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减；

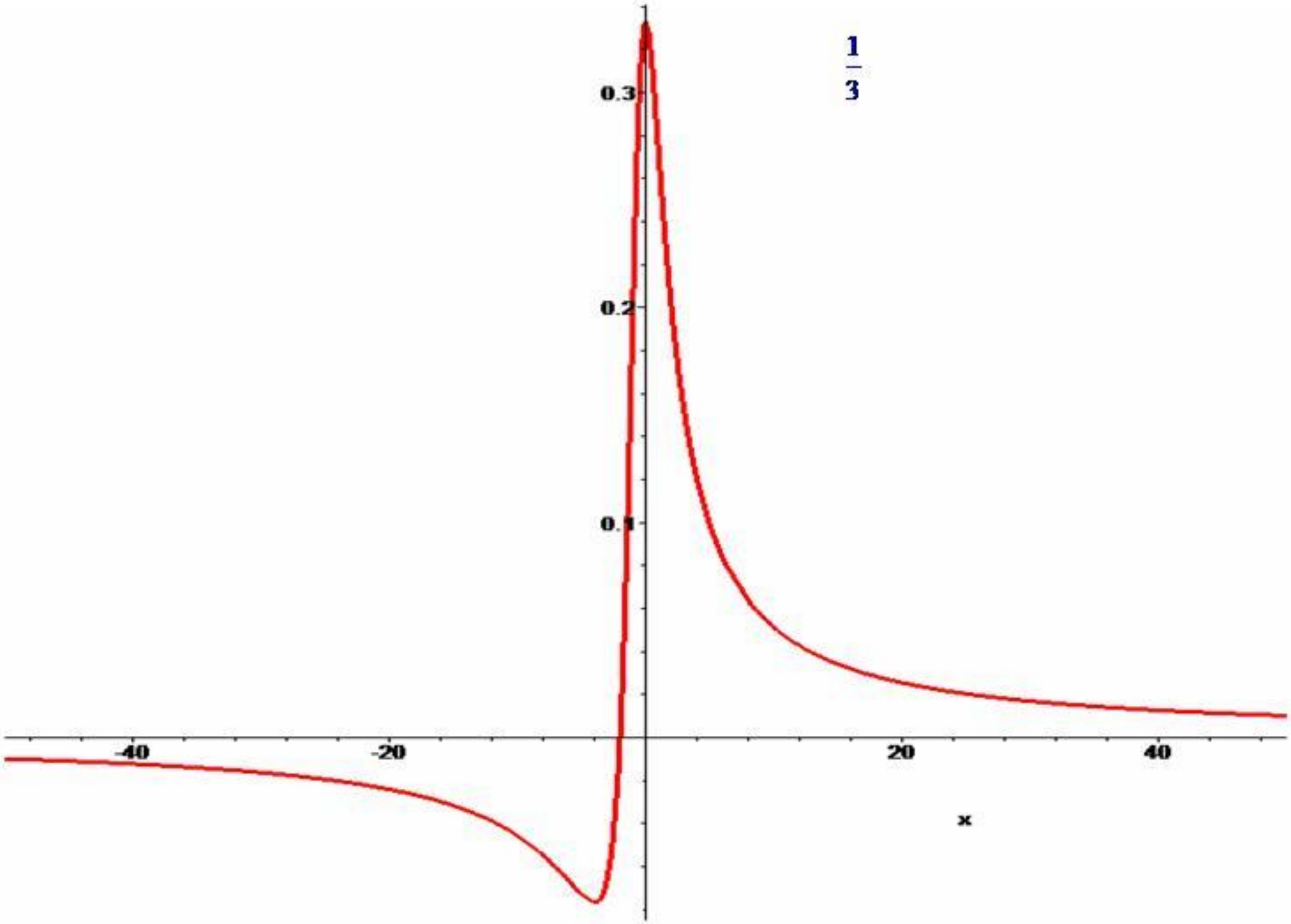
$-4<x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增，

$x>0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 所以 $y=0$ 为 $y=f(x)$ 的水平渐近线（如图）

$\therefore f(-4)=-\dfrac{1}{13}$ 为最小值，$f(0)=\dfrac{1}{3}$ 为最大值.






```
with(plots):
f:=x->(x+2)/(2*x^2+3*x+6):
tuxing:=plot(f(x),x=-
50..50,thickness=3,color=red,discont=true):
display(tuxing,scaling=unconstrained);
f(-4);f(0);
```

$$\frac{-1}{13}$$

$$\frac{1}{3}$$

学院________　姓名________　学号________　教师________

十三、已知 $t,m>0$，$\frac{1}{t}+\frac{1}{m}=1$. 求证：$t^{\frac{1}{t}}\cdot m^{\frac{1}{m}}\leq 2$.

$\because \frac{1}{m}=1-\frac{1}{t}$ $(m>0\Rightarrow t>1)$. $\therefore$ 原不等式等价于 $t^{\frac{1}{t}}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{1-\frac{1}{t}}\leq 2$

或 $t(t-1)^{\frac{1}{t}-1}\leq 2$ $(t>1)$ 或 $\ln t+(\frac{1}{t}-1)\ln(t-1)\leq\ln 2$ $(t>1)$

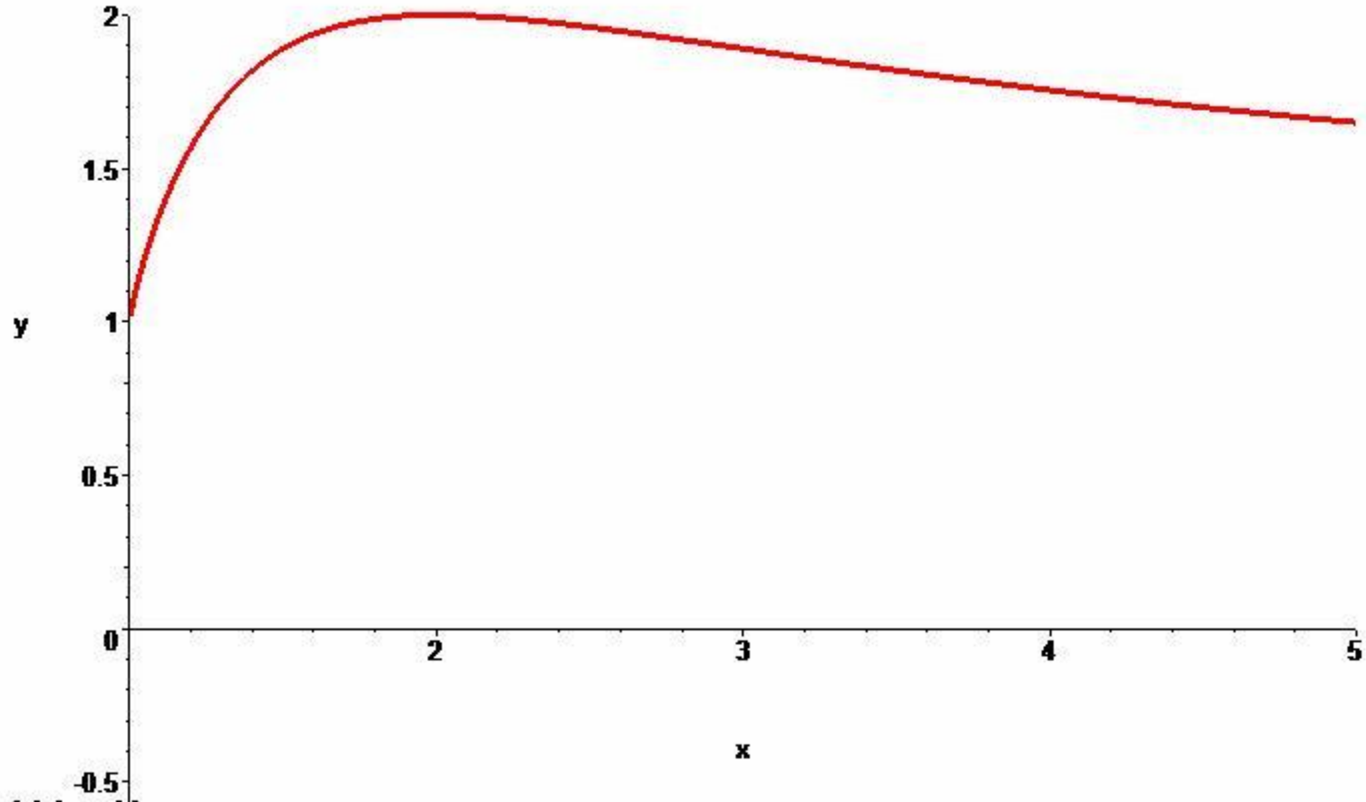
令 $f(t)=\ln t+(\frac{1}{t}-1)\ln(t-1)$. $f'(t)=-\frac{1}{t^2}\ln(t-1)$

令 $f'(t)=0$，得 $t=2$. 当 $1<t<2$ 时，$f'(t)>0$，当 $t>2$ 时，$f'(t)<0$. $\therefore f(2)=\ln 2$ 为 $f(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 内的最大值.

故 $f(t)\leq\ln 2$ $(t>1)$. 不等式得证.

附加题：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：对任意给

$$f := x \to x\,(x-1)^{\left(\frac{1}{x}-1\right)}$$




```
with(plots):
f:=x->x*(x-1)^(1/x-1);
tuxing:=plot(f(x),x=1..5,y=-
1..2,thickness=3,color=red,discont=true):
display(tuxing,scaling=constrained);
```

此题不批改

附加题：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：对任意给定的正数 a 和 b，在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ 和 η，使 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$．

$\because 0<\dfrac{a}{a+b}<1$，由介值定理，$\exists\, c\in(0,1)$，使 $f(c)=\dfrac{a}{a+b}$.

在 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 上分别用 Lagrange 中值定理，

$f(c)-f(0)=f'(\xi)c$ ， $f(c)-f(1)=f'(\eta)(c-1)$

~~其中~~ $0<\xi<c<\eta<1$.

所以 $f'(\xi)c=f(c)=f'(\eta)(c-1)+1$

得 $f'(\xi)=\dfrac{f(c)}{c}=\dfrac{a}{c(a+b)}$， $f'(\eta)=\dfrac{f(c)-1}{c-1}=\dfrac{-b}{(c-1)(a+b)}$

所以 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=c(a+b)-(c-1)(a+b)=a+b$