高阶导数

一、求下列函数的二阶导数.

1. $y = x\ln x$；

$y' = \ln x + 1$

$y'' = \frac{1}{x}$

2. $y = (1 + x^2)\arctan x$；

$y' = 1 + 2x\arctan x$

$y'' = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}$

3. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$；

$y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$

$+ x[\frac{\cos(\ln x)}{x} + \frac{-\sin(\ln x)}{x}]$

$= 2\cos(\ln x)$

$y'' = \frac{-2\sin(\ln x)}{x}$

4. $y = x^x$.

$\ln y = x\ln x$

$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$

$y' = x^x(\ln x + 1)$

$y'' = (x^x)'(\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x}$

$= x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}$

二、求下列函数的 n 阶导数.

1. $y = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ；

$y^{(n)} = (x^n)^{(n)} + (a_1x^{n-1})^{(n)} + \cdots + (a_n)^{(n)}$

$= n!$

2. $y=\sin(ax+b)$；

$$y^{(n)}=a^n\sin^{(n)}(ax+b)=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)\quad\left[\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

3. $y=\dfrac{1}{ax+b}$；

$$y'=-a(ax+b)^{-2},\quad y''=2a^2(ax+b)^{-3},$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\,a^n(ax+b)^{-n-1}$$

4. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

$$y=-1+\frac{2}{1+x}$$

$$y'=-2(1+x)^{-2}.\quad y''=4(1+x)^{-3}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n 2n!\,(x+1)^{-n-1}$$

三、设 $f(x)$ 二阶可导,求下列函数的二阶导数 y''.

1. $y=f(\sin x)$；

$$y'=f'(\sin x)\cos x$$

$$y''=f''(\sin x)\cos^2 x-\sin x f'(\sin x)$$

2. $y=e^{f(x)}$.

$$y'=f'(x)e^{f(x)}$$

$$y''=f''(x)e^{f(x)}+(f'(x))^2e^{f(x)}$$

四、求函数 $y=x^3e^x$ 的 15 阶导数.

C_{15}^2

$$y^{(15)}=e^x\cdot x^3+C_{15}^1e^x\cdot 3x^2+C_{15}^2e^x\cdot(6x)+C_{15}^3e^x\cdot 6$$
$$=x^3e^x+45x^2e^x+630xe^x+2730e^x$$
$$=e^x(x^3+45x^2+630x+2730)$$

五、已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求 a,并问此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导?求出导函数 $f'(x)$.

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0=f(0)=a$, 从而 $a=0$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

当 $x\neq 0$ 时, $f'(x)=\dfrac{x\sin x-(1-\cos x)}{x^2}=\dfrac{x\sin x-1+\cos x}{x^2}$

故 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x-1+\cos x}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

六、试从公式 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 导出下列反函数的高阶导数公式.

1. $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$；

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\frac{dx}{dy}$$
$$=\frac{-y''}{(y')^2}\,\frac{1}{y'}$$
$$=-\frac{y''}{(y')^3}$$

2. $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

$$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{-y''}{(y')^3}\right)\frac{dx}{dy}$$
$$=\frac{-y'''(y')^3+3(y')^2(y'')^2}{(y')^6}\cdot\frac{1}{y'}$$
$$=\frac{3(y'')^2-y'''y'}{(y')^5}$$