

四川大学期末考试试题（闭卷）A 卷

（2019——2020 学年第 1 学期）

课程号：201137050 课序号： 课程名称：微积分-1 任课教师： 成绩：
适用专业年级： 学生人数： 印题份数： 学号： 姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

- 1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
- 2、不带手机进入考场；
- 3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间是120分钟.

一、填空题(每小题3分, 共15分)

1. 设向量 $a = 2i + j, b = i + 2j + 2k$, 则 $\text{Pr } j_b a = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 函数 $f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{x-1}{x}}$ 的跳跃间断点是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $f(x) = (x-2)^2 e^{2x}$, 当 $n > 2$ 时, $f^{(n)}(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $f(x) = \int_1^x e^{t^3} dt$, 则 $\int_0^1 2x f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 若广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ 收敛, 则实数 p 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算题(每小题8分, 共32分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{\ln(1+x) + \ln(1-x)}$.

2. 设方程 $e^{xy} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 1$ 可确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx} \big|_{x=0}, \frac{d^2y}{dx^2} \big|_{x=0}$.

3. 计算不定积分 $\int \frac{x \ln x}{(x^2-1)^2} dx$.

4. 计算定积分 $\int_0^2 x^2 \sqrt{2x-x^2} dx$.

三、解答题(每小题10分,共20分)

1. 设函数 $g(x)$ 二阶可导且 $g(0)=1$, $g'(0)=2$, $g''(0)=1$, 并设 $f(x)=\begin{cases} \frac{g(x)-e^{2x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.
求 $f'(0)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

2. 若方程 $x^2 = ae^x$ ($a \neq 0$) 有唯一解, 试求 a 的取值范围.

四、应用题(每小题10分,共20分)

1. 设空间中有点 $M(1,1,1)$ 及直线 $l: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.

(1) 求经过点 M 与直线 l 的平面方程;

(2) 求直线 l 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程.

2. 设曲线 $y = \sin^4 x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴围成的图形为 S , (1) 求 S 的面积 A ; (2) 若 S 绕 y 轴旋转一周, 求旋转体的体积 V .

五、证明题(第一小题6分,第二小题7分,共13分)

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(1) = 3 \int_0^{\frac{1}{3}} x f(x) dx$, 证明存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

2. 设有方程 $e^x + x^{2n+1} = 0$, 证明:

(1) 对任意正整数 n , 方程有唯一实根 x_n ;

(2) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.