

四川大学期末考试试题（闭卷）
(2020——2021 学年第 1 学期) A 卷

课程号: 201137050 课序号: 课程名称: 微积分 (I) -1 任课教师: 成绩:
适用专业年级: 学生人数: 印题份数: 学号: 姓名:

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

- 1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
- 2、不带手机进入考场；
- 3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

一、填空题(每小题3分, 共15分)

1. 设向量 a, b 满足 $|a+b|=|a-b|$, 若 $a=(1, 2, 3), b=(1, 4, \lambda)$, 则 $\lambda=$ _____.

2. 广义积分 $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^2} dx =$ _____.

3. 若方程组 $\begin{cases} x = te^{-t} \\ \int_1^{y-t} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}u\right) du = t \end{cases}$ 可确定 y 是 x 的函数 $y = y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{t=0} =$ _____.

4. 不定积分 $\int x^2 \arctan x dx =$ _____.

5. 曲线 $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ 的渐近线为 _____.

二、计算题(每小题8分, 共32分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2})\cos x^2}{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}.$

2. 设 $f(x) = (x^3 e^{x^2} + 1)\sin^3 x + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin^3 x dx$, 求 $f(x)$.

3. 已知 $f''(x)$ 连续, 且 $f(0) = f(\pi) = 1$, 求积分 $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)]\sin x dx$ 的值.

4. 设 $f(x) = x^2 \cos^2 x$, 求 $f^{(12)}(0)$.

三、解答题(每小题10分,共20分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt}{x^a} = b (b \neq 0)$, 求 a, b 的值.

2. 讨论方程 $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} = 0$ (n 为正整数) 有几个实根.

四、应用题(每小题10分,共20分)

1. 求由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 x 轴所围成区域的面积.

2. 设直角坐标空间中有两点 $A(1, 1, 0), B(0, 2, 1)$.

(1) 求经过 AB 且与坐标面 $z=0$ 垂直的平面方程;

(2) 求经过 AB 的直线方程;

(3) 将直线 AB 绕 z 轴旋转一周, 求介于面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的旋转体体积.

五、证明题(第1小题6分,第2小题7分,共13分)

1. 设函数 $f(x) \in C[0, \pi]$, 满足 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $f(\xi) = 0$;

(2) 若同时还满足 $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$, 则在 $(0, \pi)$ 内存在不同的 η_1, η_2 , 使得 $f(\eta_1) = f(\eta_2) = 0$.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n(a_{n-1} + 1)}, n \geq 2$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} n! a_n = \frac{1}{e}$.