学院＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　教师＿＿＿＿

泰勒公式

一、$f(x)=x\arctan x$ 在 $x_0=1$ 处展开为二阶 Taylor 公式.

由于 $f(1)=\frac{\pi}{4}$，$f'(1)=\left(\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)\Big|_{x=1}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

$f''(1)=\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}\right)\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$

故 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)(x-1)+\frac{1}{4}(x-1)^2+o((x-1)^3)$

二、$f(x)=x^4-5x^3+5x^2+x+2$ 展开为 $x-1$ 的多项式.

由于 $f(1)=4$、$f'(1)=(4x^3-15x^2+10x+1)\big|_{x=1}=0$

$f''(1)=(12x^2-30x+10)\big|_{x=1}=-8$、$f'''(1)=(24x-30)\big|_{x=1}=-6$.

$f^{(4)}(1)=24$. 当 $n\geq5$ 时 $f^{(n)}(x)\equiv0$. 故

$f(x)=4-2(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4$

三、求 $x\to0$ 时，无穷小量 $e^x-1-x+x\sin x$ 关于 x 的阶.

$e^x-1-x+x\sin x=x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)-x+x(x-o(x^3))$

$=\frac{3}{2}x^2+o(x^3)$

故关于 x 为2阶无穷小

四、求 a,b，使 $x\to0$ 时 $f(x)=\sin2x+ax+bx^3$ 为 x 的尽可能高阶无穷小，并求此时的阶.

$f(x)=2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+ax+bx^3+o(x^7)$

$=(2+a)x+\left(b-\frac{4}{3}\right)x^3+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^7)$

于是 $a=-2$、$b=\frac{4}{3}$ 时 $f(x)$ 为 x 的5阶无穷小

学院______　姓名______　学号______　教师______

五、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2+2\cos x-2}{x^4}$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^6)+2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^6)-2\right)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{12}+o(x^6)}{x^4}=\frac{1}{12}$$

六、已知 $0<x<\dfrac{1}{2}$，证明：$e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 的绝对误差不超过 0.01，并求 $\sqrt{e}$ 的误差不超过 0.01 的近似值.

由 $e^x-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}=\frac{e^t}{4!}x^4$，$t\in(0,\frac{1}{2})$

又 $\frac{e^t}{4!}x^4<\frac{\sqrt{e}}{4!}(\frac{1}{2})^4<0.01$. 故误差不超过 0.01

$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}+\frac{(\frac{1}{2})^3}{6}=\frac{79}{48}$

附加题：1. $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$. 试证明：(a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $|f''(\xi)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$；

2. $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处二阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2}{x^2}=3$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$.

1. 由 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2$

$=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2$

与 $f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2$

$=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2$

知 $f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}$

从而 $|f(b)-f(a)|=\frac{(b-a)^2}{4}\left|\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\right|\le\frac{(b-a)^2}{4}\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}$

不妨令 $|f''(\xi_1)|\le|f''(\xi_2)|$ 从而取 $\xi=\xi_2$. 则 $|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+2}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+2+o(x^2)}{x^2}$

$=3\Rightarrow f(0)=-2$. $f'(0)=0$

$f''(0)=6$.