学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

反常积分

一、判定下列各反常积分的收敛性，如果收敛，计算反常积分的值.

1. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$；

收敛.

原积分 $= -2\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty} = 2$

2. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}}$；

发散

3. $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$；

收敛

原积分 $= \frac{1}{a}e^{ax}\Big|_{-\infty}^{0}$

$= \frac{1}{a}$

4. $\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$；

收敛

原积分 $= \frac{-1}{2a}e^{-ax^2}\Big|_0^{+\infty}$

$= \frac{1}{2a}$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$；

收敛

原积分 $= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt2}\frac{d(\frac{1+x}{\sqrt2})}{1+(\frac{1+x}{\sqrt2})^2}$

$= \frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{1+x}{\sqrt2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt2}$

6. $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)}$；

收敛

原积分 $= \frac{1}{3}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$= -\frac{1}{3}\ln\frac{x+2}{x-1}\Big|_2^{+\infty}$

$= \frac{2\ln2}{3}$

7. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\sin\omega t\,\mathrm{d}t\,(p>0,\omega>0)$；

$= \left(-\frac{p}{p^2+t^2}e^{-pt}\sin\omega t - \frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{-pt}\cos\omega t\right)\Big|_0^{+\infty}$

$= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

8. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；

收敛

$$\text{原积分}=\int_0^1 \frac{t+1}{\sqrt{t}}dt \quad (t=x-1)$$

$$=\int_0^1\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$=\frac{8}{3}$$

9. $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}$；

发散

10. $\int_0^1 (\ln x)^2\mathrm{d}x$；

收敛

$$\text{原积分}=\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{e^u}du \quad (u=\ln x)$$

$$=e^{-u}(-u^2-2u-2)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=2$$

11. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$；

收敛

$$\text{原积分}=\int_0^{+\infty}\frac{2d\sqrt{x}}{1+x}$$

$$=2\arctan\sqrt{x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\pi$$

12. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{x+1}+e^{3-x}}\mathrm{d}x$；

收敛

$$\text{原积分}=\int_1^{+\infty}\frac{e^{x+1}}{e^4+e^{2x+2}}dx$$

$$=\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dt}{e^4+t^2} \quad (t=e^{x+1})$$

$$=\frac{\pi}{4e^2}$$

13. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

收敛

$$\text{原积分}=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\ln x\Big|_1^{+\infty}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\ln 2}{2}$$

二、当 p 为何值时，反常积分 $I_p=\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ 收敛？在收敛时，求其积分值.

当 $P=1$ 时 $I_p=\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_e^{+\infty}=+\infty$，故 I_1 发散

当 $P\neq1$ 时 $I_p=\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$

$$=\int_e^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^p}=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_e^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & P<1\\ \frac{1}{P-1}, & P>1\end{cases}$$

故 I_p 在 $P\leq1$ 时发散，$P>1$ 时收敛.

三、计算反常积分 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}\,dx$（$n$ 为正整数）.

$$I_n=-\int_0^{+\infty}x^n\,de^{-x}$$

$$=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}\,dx=nI_{n-1}$$

又 $I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx=-e^{x}\Big|_0^{+\infty}=1$

故 $I_n=n!$

四、当 p 为何值时，积分 $\int_0^1 x^p\ln x\,dx$ 收敛？在收敛时，求其积分值.

$$\int_0^1 x^p\ln x\,dx=\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln x-\frac{1}{(p+1)^2}x^{p+1}\right)\Big|_0^1$$

$$=\begin{cases}\infty, & p\le -1\\ -\dfrac{1}{(p+1)^2}, & p>-1\end{cases}$$

故原积分在 $p\le -1$ 时发散，在 $p>-1$ 时收敛

五、设 $f(t)\,(t\geqslant 0)$ 是连续函数，$f(t)$ 的拉普拉斯变换定义为

$$L(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\,dt,$$

$L(s)$ 的定义域是使以上反常积分收敛的那些 s 的集合，求以下函数的拉普拉斯变换：

1. $f(t)=1$；　　2. $f(t)=t$；　　3. $f(t)=e^{at}$.

1、$L(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}\,dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}$

2、$L(s)=\int_0^{+\infty}te^{-st}\,dt=-\frac{1}{s}\left(te^{-st}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-st}\,dt\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s^2}$

3、$L(s)=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{(a-s)t}\,dt$

$$=\begin{cases}+\infty, & s\le a\\ \dfrac{1}{s-a}, & s>a\end{cases}$$

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

六、在概率论中一个正的连续函数 $p(x)$ 称为概率密度函数,如果它满足条件 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1$. 以 $p(x)$ 为密度函数的连续型随机变量的均值 μ 和方差 σ^2 分别定义为

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\mathrm{d}x, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x)\mathrm{d}x,$$

已知标准正态分布的密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

求标准正态分布的均值与方差.

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{奇函数}} dx = 0$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \, d e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=1}$$

$$= 1$$