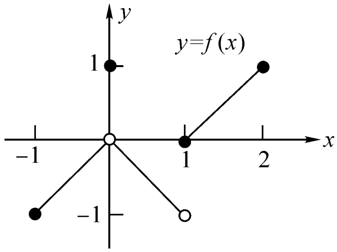
学院________　姓名________　学号________　教师________

函数的极限

一、关于下图的函数 $y=f(x)$，下列命题中哪些是对的？哪些是不对的？



1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在；

对

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$；

对

3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$；

错

4. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$；

错

5. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$；

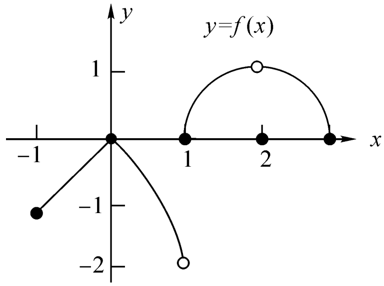
错

6. 在$(-1,1)$中每一点 x_0 处 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在.

对

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

二、关于下图的函数 $y=f(x)$，下列命题中哪些是对的？哪些是不对的？



1. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$不存在；　　2. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2$；　　3. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在；

错　　错　　对

4. 在$(-1,1)$中每一点 x_0 处$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；

对

5. 在$(1,3)$中每一点 x_0 处$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在.

对

学院______　姓名______　学号______　教师______

三、设 $f(x)=\begin{cases} 3-x, & x<2, \\ \dfrac{x}{2}+1, & x>2. \end{cases}$

1. 求 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$；

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{x}{2}+1\right) = 2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3-x) = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 存在吗？如果存在，极限值等于什么？如果不存在，为什么？

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 不存在

因为 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$；

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \left(\frac{x}{2}+1\right) = 3$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \left(\frac{x}{2}+1\right) = 3$

4. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ 存在吗？如果存在，极限值等于什么？如果不存在，为什么？

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ 存在 且 $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 3$

学院＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿＿　教师＿＿＿＿＿＿

四、设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$存在吗？如果存在，极限值等于什么？如果不存在，为什么？

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 不存在

取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$x_n'=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，容易验证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n'=$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=1$，故由 Heine 定理知

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 不存在

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$存在吗？如果存在，极限值等于什么？如果不存在，为什么？

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 存在 且 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在吗？如果存在，极限值等于什么？如果不存在，为什么？

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，事实上，由第1问知 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 不存在

学院＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　教师＿＿＿＿

五、以下解题方法对不对？为什么？若不对，应如何纠正？

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-1}{5x^3+x^2+2}=\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}=1;}$　×

原极根 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}}{5+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}=\dfrac{2}{5}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan^2 x-\sec^2 x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan^2 x-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sec^2 x=\boxed{\infty-\infty=0.}$　×

原极限 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x-1}{\cos^2 x}=-1$

六、利用函数极限运算法则求下列函数的极限.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x$

$=0$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$($m,n$ 为自然数，$n\neq0$)；

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}$

$=\dfrac{m}{n}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$;

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+x+3x+O(x^2)}{x}$

$=6$

4. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$;

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x+4-12}{x^3+8}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^3+8}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=-\dfrac{1}{2}$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$ (m,n 为正整数,$a_0\neq0,b_0\neq0$);

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1\frac{1}{x}+\cdots+a_{n-1}\frac{1}{x^{m-1}}+a_n\frac{1}{x^m}}{b_0+b_1\frac{1}{x}+\cdots+b_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+a_n\frac{1}{x^n}}$$

$$=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=n\\ \infty(\text{不存在}), & m>n\\ 0, & m<n\end{cases}$$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$;

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+x^{-\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}-7x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=0$$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$;

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}{\frac{2}{\sqrt{x}}-1}$$

$$=-1$$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$;

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^{-\frac{2}{15}}}{1+x^{-\frac{2}{15}}}$$

$$=1$$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+7}{x^{\frac{8}{5}}+3x+\sqrt{x}}$.

不存在

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

七、利用重要极限结果求下列函数的极限.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}\ (a\neq 0, b\neq 0)$;

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}\cdot\frac{bx}{ax}\cdot\frac{a}{b}$$

$$=\frac{a}{b}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$;

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

4. $\lim\limits_{t\to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^{\sqrt{t}}$;

$$=\lim_{t\to +\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

$$=1$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$;

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$$

$$=e^2$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}$;

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot 5}$$

$$=e^5$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$;

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a-a+a}{x-a}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}$$

$$=e^{2a}$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{\cot x}\right)^{\frac{\cot x}{2}\cdot\frac{2}{\cot x}\cdot\frac{1}{x}}\cdot(\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=e^2\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x}}$$

$$=e^2\cdot e^0=e^2$$

八、说明下列各无穷小量之间的关系（$x\to0$）.

1. $\sqrt{x}\sin x$ 与 x（$x\to0$）；

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-\sqrt{\frac{\sin x}{x}}=-1$

故 $\sqrt{x\sin x}=O(x)$

2. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ 与 x^2；

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\infty$

故 $x^2=o(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$

3. $\tan x-\sin x$ 与 $\sin x$；

由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=0$

故 $\tan x-\sin x=o(\sin x)$

4. $4x^2+6x^3-x^5$ 与 x^2.

由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^2+6x^3-x^5}{x^2}=4$

故 $4x^2+6x^3-x^5=O(x^2)$

九. 证明:函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间$(0,1]$上无界,但该函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

取 $x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$,于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 且 $f(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

故对 $\forall M>0$, $\exists N>0$, 使 $f(x_N)\geq M$. 故原函数无界

另一方面, 取 $x_n'=\frac{1}{2n\pi}$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=0$ 且 $f(x_n')=0$

从而原函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

十. 当 $x\to0$ 时,求下列$\boxed{\text{无穷小量的阶数.}}$ → 即找与 x 的多少次方同阶

1. $e^{x^4-2x^2}-1$;

由于 $e^{x^4-2x^2}-1\sim x^4-2x^2$, $x\to0$

故 $e^{x^4-2x^2}=O(x^2)$

从而 $e^{x^4-2x^2}-1$ 的阶数为2, $x\to0$

2. $(1+\tan^2x)^{\sin x}-1$;

由于 $e^{\sin x\ln(1+\tan^2x)}-1\sim\sin x\ln(1+\tan^2x)$

$\sim x\tan^2x\sim x^3$, $x\to0$

从而 $(1+\tan^2x)^{\sin x}-1$ 的阶数为3. $x\to0$

3. $\frac{x^8}{1-\sqrt{\cos x^2}}$.

由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^8}{1-\sqrt{\cos x^2}}}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^8(1+\sqrt{\cos x^2})}{(1-\cos x^2)x^4}$

$=4$

故 $\frac{x^8}{1-\sqrt{\cos x^2}}=O(x^4)$

从而 $\frac{x^8}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 的阶数为4, $x\to0$.

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

十一. 利用等价无穷小的性质求下列极限.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^4}-1}{1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})}$;

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4[1+\cos(x\sqrt{1-\cos x})]}{\sin^2(x\sqrt{1-\cos x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4}{x^2(1-\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4}{\frac{1}{2}x^4}$

$=4$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ （n,m 为正整数）;

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}$

$=\begin{cases}1, & n=m\\ \infty(不存在), & n<m\\ 0, & n>m\end{cases}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^3)}$;

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\ln\frac{1+\cos x+1-1}{2}}{2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2x^2}$

$=-\frac{1}{4}$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$;

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x\cdot 2}$

$=\frac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$;

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\frac{1}{6}x^2}$

$=-3$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[x\ln\dfrac{2+\cos x+1-1}{3}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\cos x-1}{3}$

$=-\frac{1}{6}$

学院__________ 姓名__________ 学号__________ 教师__________

十二、若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,求 a,b 的值.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-ax(x+1)-b(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$$

故 $\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$

十三、设 $f(x)=\frac{ax^2-2}{x^2+1}+3bx+5$,当 $x\to\infty$ 时,a,b 取何值提取 $f(x)$为无穷大量?a,b 取何值$f(x)$为无穷小量?

$$f(x)=\frac{ax^2-2+3bx(x^2+1)+5(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{3bx^3+(5+a)x^2+3bx+3}{x^2+1}$$

故当 $b\neq0$ 时. $f(x)$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷大量.

当 $\begin{cases}b=0\\ 5+a=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}a=-5\\ b=0\end{cases}$ 时. $f(x)$为 $x\to\infty$ 时的无穷小量

十四、求下列函数的垂直渐近线或水平渐近线.

1. $y=-\frac{x^2-4}{x+1}$;

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+4}{x+1}$ 不存在

故无水平渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{-x^2+4}{x+1}=\infty$

故有垂直渐近线 $x=-1$

2. $y=\frac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$;

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$ 不存在

故无水平渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=\infty$ 与

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2+1}{x^2-1}=\infty$

故有垂直渐近线 $x=\pm1$

3. $y=2\sin x+\dfrac{1}{x}$;

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\sin x+\frac{1}{x}\right)$ 不存在

故无水平渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin x+\frac{1}{x}\right)=\infty$

故有垂直渐近线 $x=0$

4. $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$

故有水平渐近线 $y=0$

显然无垂直渐近线

5. $y=e^{-(x-1)^2}$;

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-(x-1)^2}=0$

故有水平渐近线 $y=0$

显然无垂直渐近线

6. $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{36x}{(x+3)^2}\right)=1$

故有水平渐近线 $y=1$

由于 $\lim\limits_{x\to -3}\left(1+\frac{36x}{(x+3)^2}\right)=\infty$

故有垂直渐近线 $x=-3$