2023-2024微积分(1)-1期中试题参考答案

1.(10分)求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解 $\because \frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$

$<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}$ (6分)

同时$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n+n}+\frac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$. (10分)

2.(12分)设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x\cos x+a\sin x}{e^x-1-x^2-\ln(1+x)}, & x\neq 0\\ b, & x=0\end{cases}$ 在$x=0$处连续，求a、b的值.

解 $\frac{x\cos x+a\sin x}{e^x-1-x^2-\ln(1+x)}=\frac{x(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))+a(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-1-x^2-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))}$ (8分)

$=\frac{(1+a)x-(\frac{1}{2}+\frac{a}{6})x^3+o(x^3))}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$ $\therefore a=-1, b=2$. (12分)

3.(12分)设$y=(1+x^2)\cos^2 x$，求$y^{(n)}(0)(n>2)$.

解 $y^{(n)}(x)=[(1+x^2)\frac{1+\cos 2x}{2}]^{(n)}=\frac{1}{2}[(1+x^2)\cos 2x]^{(n)}$ (5分)

$=\frac{1}{2}(\cos^{(n)}2x\cdot(1+x^2)+C_n^1\cos^{(n-1)}2x\cdot 2x+C_n^2\cos^{(n-2)}2x\cdot 2+0)$

$=\frac{1}{2}(2^n\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)\cdot(1+x^2)+C_n^1\cos^{(n-1)}2x\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}\cos(2x+\frac{n-2}{2}\pi)\cdot 2)$ (10分)

$\therefore y^{(n)}(0)=\frac{1}{2}(2^n\cos\frac{n}{2}\pi-n(n-1)2^{n-2}\cos\frac{n}{2}\pi)=(2^{n-1}-n(n-1)2^{n-3})\cos\frac{n}{2}\pi$. (12分)

4.(10分)设函数$f'(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arctan f(\frac{1}{n})-\arctan f(\frac{1}{n+1}))$.

解 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$得，$f(0)=0$，$f'(0)=2$. 由拉格朗日中值定理，得 (5分)

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\arctan' f(x)|_{x=\xi}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\frac{f'(\xi)}{1+f^2(\xi)}\frac{1}{n(n+1)}=2.$ (10分)

5.(12分)求曲线 $y=\sqrt{x^2-4x+12}+x$ 的渐近线.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+12}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x+12}{\sqrt{x^2-4x+12}-x}$ (4分)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4+\frac{12}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}}-1}=2.$$

同时$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+12}+x}{x}=2.$ (8分)

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+12}-x)=-2.$$

所以水平渐近线$y=2$，斜渐近线$y=2x-2$. (12分)

6.(12分)设$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x})=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在$x=0$处的切线方程.

解 由函数的无穷小表示，$\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}=1+\alpha$，则 (4分)

$$f(x)=\frac{x^2-\ln(1+x)+o(x^2)}{x}=\frac{x^2-(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))+o(x^2)}{x}=\frac{-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x}$$

$=-1+\frac{3}{2}x+o(x)$ (8分)

$\therefore f(0)=-1$，$f'(0)=\frac{3}{2}$，故切线方程为 $y=\frac{3}{2}x-1$. (12分)

7.(12分)设方程$e^y+6xy+x^2=1$可确定隐函数$y=y(x)$，判断$y(x)$在$x=0$处是否取得极值，若取得极值是极大值还是极小值.

解 易知当$x=0$时，$y=0$. 方程两边同时对x求导，有

$$e^y y'+6y+6xy'+2x=0(1), \text{即} y'=-\frac{6y+2x}{e^y+6x}, \therefore y'(0)=0. \qquad (6分)$$

在(1)式两边同时再对x求导，有

$$e^y(y')^2+e^y y''+6y'+6y'+6xy''+2=0, \text{解之得} y''(0)=-2<0 \qquad (10分)$$

所以$y=0$为极大值. (12分)

8.(10分)设 $0<a<b$，证明 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}>\dfrac{2}{a+b}$.

证明令 $f(x)=(x+a)(\ln x-\ln a)-2(x-a)(x>a)$，则 $f(a)=0$. (4分)

$$f'(x)=(\ln x-\ln a)+\frac{(x+a)}{x}-2, \quad f'(a)=0$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}>0 \qquad (8分)$$

因此 $f(x)$严格单增，所以原不等式成立. (10分)

9.(10分)设 $f(x)$在$[-1,1]$上三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：存在$\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

证明 将函数 $f(x)$在$x=0$处展开，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3=f(0)+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3, \text{则} \qquad (4分)$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-1)^3, (\xi_1\in(-1,0)) \qquad (1)$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}, (\xi_2\in(0,1)) \qquad (2) \qquad (8分)$$

由(1)(2)两式得，$\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$. 设$M$，$m$为$f'''(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上最大值与最小值，

则$m\le\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\le M$，由介值定理知存在$\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$. (10分)