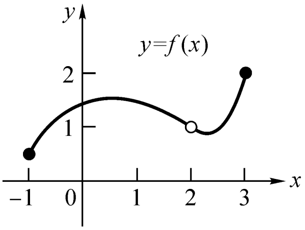
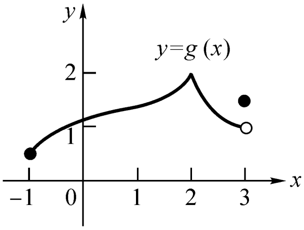
# 函数的连续性

一、在下图(1)～(4)中,说明在[－1,3]上图示的函数是否是连续的,如果不是,何处不连续以及为什么?



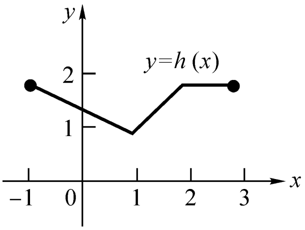

(1)



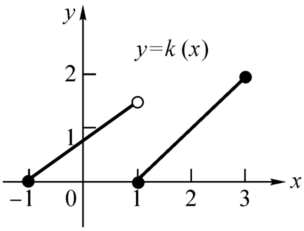

(2)

不是。
在$x=2$处不连续

不是
在$x=3$处不连续




(3)




(4)

是

不是。$x=1$处不连续

学院＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　教师＿＿＿＿

二、设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & -1\leqslant x<0, \\ 2x, & 0<x<1, \\ 1, & x=1, \\ -2x+4, & 1<x<2, \\ 0, & 2<x<3. \end{cases}$$

请绘出该函数的图象,并依据函数图象回答下面 1～13 问题.

1. $f(-1)$是否存在?

是

2. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$是否存在?

是

3. 是否 $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$?

是

4. $f(x)$是否在 $x=-1$ 处连续?

是

5. $f(1)$是否存在?

是

6. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$是否存在?

是

7. 是否 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$？

否

8. $f(x)$是否在 $x=1$ 处连续？

否

9. $f(x)$在 $x=2$ 处有定义吗？

无

10. $f(x)$是否在 $x=2$ 处连续？

否

11. 在什么点处 $f(x)$是连续的？

$[-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,3)$

学院____________　姓名____________　学号____________　教师____________

12. 在 $x=2$ 处定义 $f(2)$ 为何值时使 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续?

0

13. $f(1)$ 取什么新值就能避免间断?

2

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

三、若 $f_1(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 问 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？

由于 $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = 1$，故 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 处连续

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|} = 1$

与 $\lim\limits_{x\to 0^-} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|} = -1$

故 $f_2(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

四、$f(x)=\begin{cases}e^x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ a+x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 式中 $a$ 为何值时函数连续？

显然 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 与 $(1,2]$ 上连续.

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} e^x = e$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(a+x) = 1+a$

且 $f(1)=e$

故当 $a=e-1$ 时 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续

五、求下列函数的间断点，并指出间断点的类别.

1. $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$；

$f(x)$在$x\neq1$处连续

又 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{|x-1|}=1$ 与 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1}{|x-1|}=-1$

从而 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点

2. $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+x^2}$；

显然 $f(x)$ 在 $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 处连续

由于 $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-}f(x)=\infty$

故 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点

3. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{nx^2+1}(-1\leqslant x\leqslant1)$；

当 $x\neq0$ 时

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{nx^2+1}=\dfrac{1}{x}$

从而 $f(x)$ 连续

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点

4. $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$；

$f(x)=\dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}$　当 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$ 时连续

由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

又 $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\infty$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点。

5. $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ -x^2+4x-2, & 1\leqslant x<3,\\ 4x, & x\geqslant 3;\end{cases}$

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$ 上连续

又 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ 与 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处连续

由于 $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=12$，故 $x=3$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点。

6. $f(x)=(1+x)\arctan\dfrac{1}{1-x^2}$；

$f(x)$ 在 $x=\pm 1$ 处连续

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\pi$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\pi$，故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点

又 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$，故 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

7. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0, \\ \ln(1+x), & -1<x\leqslant 0; \end{cases}$

显然当 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$ 时 $f(x)$ 连续

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \ln(1+x)=0$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点

又 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点

8. $y=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$, $x\in(0,2\pi)$.

$y$ 可能在 $\tan(x-\frac{\pi}{4})=0$ 与 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 处间断.

由于 $x\in(0,2\pi)$, 下面考察 $y$ 在 $x=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 处的连续性.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}=\infty$ 与 $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}=\infty$

故 $x=\frac{\pi}{4}$ 与 $x=\frac{5}{4}\pi$ 为 $y$ 的无穷间断点

又 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}=1$ 与 $\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}\pi}(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}=1$

故 $x=\frac{3}{4}\pi$ 与 $x=\frac{7}{4}\pi$ 为 $y$ 的可去间断点

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

六、证明:若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内连续,又 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,则必有 $\xi\in[x_1,x_n]$,使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

令 $M=\max\limits_{x\in[x_1,x_n]} f(x)$ , $m=\min\limits_{x\in[x_1,x_n]} f(x)$

于是 $m\le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M$

由 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上的连续性,$\exists\,\xi\in[x_1,x_n]$

使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ [介值定理]

七、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)<a$,$f(b)>b$,试证:在 $(a,b)$ 内至少有一点 $C$,使得 $f(C)=C$.

令 $g(x)=f(x)-x$,显然 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

由于 $g(a)=f(a)-a<0$ , $g(b)=f(b)-b>0$

故 $\exists\, c\in(a,b)$ 使 $g(c)=f(c)-c=0$ [零点存在定理]

即 $f(c)=c$

学院________　姓名________　学号________　教师________

八、试证：方程 $x=a\sin x+b$ $(a>0,b>0)$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

令 $f(x)=x-a\sin x-b$，显然其在 R 上连续

由于 $f(0)=-b<0$

与 $f(a+b)=a+b-a\sin(a+b)-b$

$=a[1-\sin(a+b)]\geq 0$

故由零点存在定理，$\exists\xi\in[0,a+b]$ 使

$f(\xi)=\xi-a\sin\xi-b=0$

即 $\xi=a\sin\xi+b$