

高等数学(同济第七版)上册-知识点总结

第一章 函数与极限

一. 函数的概念

1. 两个无穷小的比较

设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$ 且 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = l$

(1) $l = 0$, 称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小, 记以 $f(x) = o[g(x)]$, 称 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶的无穷小。

(2) $l \neq 0$, 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小。

(3) $l = 1$, 称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小, 记以 $f(x) \sim g(x)$

2. 常见的等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arccos x \sim x, 1 - \cos^a x \sim \frac{a}{2} x^2$$

$$1 - \cos x \sim x^2/2, e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, (1+x)^a - 1 \sim ax$$

二. 求极限的方法

1. 两个准则

准则 1. 单调有界数列极限一定存在

准则 2. (夹逼定理) 设 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

若 $\lim g(x) = A, \lim h(x) = A$, 则 $\lim f(x) = A$

更多大一期末资料+ Q: 33684151

2. 两个重要公式

$$\text{公式 1 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{公式 2 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

3. 用无穷小重要性质和等价无穷小代换

4. 用泰勒公式

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有以下公式, 可当做等价无穷小更深层次

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

...

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

5. 洛必达法则

定理 1 设函数 $f(x)$ 、 $F(x)$ 满足下列条件:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = 0$;
- (2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内可导, 且 $F'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为无穷大), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

这个定理说明: 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)}$ 也存在且等于 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$; 当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 为无穷大时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)}$ 也是无穷大.

这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的极限值的方法称为洛必达 (L'Hospital) 法则.

$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 2 设函数 $f(x)$ 、 $F(x)$ 满足下列条件:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \infty$;
- (2) $f(x)$ 与 $F(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内可导, 且 $F'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在 (或为无穷大), 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

注: 上述关于 $x \rightarrow x_0$ 时未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的洛必达法则, 对于 $x \rightarrow \infty$ 时未定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 型同样适用.

使用洛必达法则时必须注意以下几点:

- (1) 洛必达法则只能适用于 “ $\frac{0}{0}$ ” 和 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型的未定式, 其它的未定式须先化简变形成 “ $\frac{0}{0}$ ” 或 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型才能运用该法则;
- (2) 只要条件具备, 可以连续应用洛必达法则;
- (3) 洛必达法则的条件是充分的, 但不必要. 因此, 在该法则失效时并不能断定原极限不存在.

6. 利用导数定义求极限

...

$$\text{基本公式 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ (如果存在)}$$

7. 利用定积分定义求极限

$$\text{基本格式 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx \text{ (如果存在)}$$

三. 函数的间断点的分类

函数的间断点分为两类:

(1) 第一类间断点

设 x_0 是函数 $y = f(x)$ 的间断点。如果 $f(x)$ 在间断点 x_0 处的左、右极限都存在,

则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点。左右极限存在且相同但不等于该点的函数值为

可去间断点。左右极限不存在为跳跃间断点。第一类间断点包括可去间断点和跳跃间断点。

(2) 第二类间断点

第一类间断点以外的其他间断点统称为第二类间断点。常见的第二类间断点有无穷间断点和振荡间断点。

四. 闭区间上连续函数的性质

在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$, 有以下几个基本性质。这些性质以后都要用到。

定理1. (有界定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 必在 $[a, b]$ 上有界。

定理2. (最大值和最小值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在这个区间上一定存在最大值 M 和最小值 m 。

定理3. (介值定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且其最大值和最小值分别为 M 和 m , 则对于介于 m 和 M 之间的任何实数 c , 在 $[a, b]$ 上至少存在一个 ξ , 使得 $f(\xi) = c$ 。

推论: 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则在 (a, b) 内至少存在一个点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$ 这个推论也称为零点定理

第二章 导数与微分

一. 基本概念

1. 可微和可导等价，都可以推出连续，但是连续不能推出可微和可导。

二. 求导公式

$$(1) \quad (C)' = 0$$

$$(2) \quad (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(3) \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$(4) \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(5) \quad (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(6) \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(7) \quad (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(8) \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(9) \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(10) \quad (e^x)' = e^x$$

$$(11) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(12) \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(13) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(14) \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(15) \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(16) \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 都可导, 则

$$(1) \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2) \quad (Cu)' = Cu' \quad (C \text{ 是常数})$$

$$(3) \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$(4) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

三. 常见求导

...

1. 复合函数运算法则

2. 由参数方程确定函数的运算法则

设 $x = \phi(t)$, $y = \varphi(t)$ 确定函数 $y = y(x)$, 其中 $\phi'(t), \varphi'(t)$ 存在, 且 $\phi'(t) \neq 0$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}$

3. 反函数求导法则

设 $y = f(x)$ 的反函数 $x = g(y)$, 两者皆可导, 且 $f'(x) \neq 0$

$$\text{则 } g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))} \quad (f'(x) \neq 0)$$

4. 隐函数运算法则

设 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定, 求 y' 的方法如下:

把 $F(x, y) = 0$ 两边的各项对 x 求导, 把 y 看作中间变量, 用复合函数求导公式计算, 然后再解出 y' 的表达式 (允许出现 y 变量)

5. 对数求导法则 (指数类型 如 $y = x^{\sin x}$)

先两边取对数, 然后再用隐函数求导方法得出导数 y' 。

对数求导法主要用于: ①幂指函数求导数②多个函数连乘除或开方求导数 (注意

定义域。关于幂指函数 $y = [f(x)]g(x)$ 常用的一种方法, $y = e^{g(x)\ln f(x)}$ 这样

就可以直接用复合函数运算法则进行。

6. 求 n 阶导数 ($n \geq 2$, 正整数)

先求出 y' , y'' , y''' , \dots , 总结出规律性, 然后写出 $y^{(n)}$, 最后用归纳法证明。

有一些常用的初等函数的 n 阶导数公式

$$(1) \quad y = e^x, y^{(n)} = e^x$$

$$(2) \quad y = a^x, y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$$

$$(3) \quad y = \sin x, y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(4) \quad y = \cos x, y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(5) \quad y = \ln x, y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}$$

两个函数乘积的 n 阶导数有莱布尼兹公式

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)$$

$$\text{其中 } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad u^{(0)}(x) = u(x),$$

$$v^{(0)}(x) = v(x)$$

假设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是 n 阶可导。

第三章 微分中值定理与导数应用

一. 罗尔定理

设函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 内可导; (3) $f(a) = f(b)$
则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$

二. 拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$ 满足 (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a, b) 内可导;

则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

推论1. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) \equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内为常数。

推论2. 若 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内皆可导, 且 $f'(x) \equiv g'(x)$, 则在 (a, b) 内 $f(x) = g(x) + c$, 其中 c 为一个常数。

三. 柯西中值定理

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上皆连续; (2) 在开区间 (a, b) 内皆可

导; 且 $g'(x) \neq 0$ 则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (a < \xi < b)$

(注: 柯西中值定理为拉格朗日中值定理的推广, 特殊情形 $g(x) = x$ 时, 柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。)

四. 泰勒公式 (① 估值 ② 求极限 (麦克劳林))

定理 1. (皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 0 处有 n 阶导数, 则有公式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = o[(x-x_0)^n]$, 称为皮亚诺余项

定理2 (拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式)

设 $f(x)$ 在包含 0 的区间 (a, b) 内有 $n+1$ 阶导数, 在 $[a, b]$ 上有 n 阶连续导数, 则对 x

$\in [a, b]$, 有公式 $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$,

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, 称为拉格朗日余项

上面展开式称为以 $0(x)$ 为中心的 n 阶泰勒公式。当 $x_0=0$ 时, 也称为 n 阶麦克劳林

...

公式。

常用公式(前8个)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + \cdots, x \in (-1, 1]$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots, x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \frac{35}{1152} x^9 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + \cdots, x \in (-1, 1)$$

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} (-4)^n (1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \frac{1382}{155925} x^{11} + \frac{21844}{6081075} x^{13} + \frac{929569}{638512875} x^{15} + \cdots, x \in (-1, 1)$$

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n} x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \cdots, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\csc x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(2^{2n-1}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6} x + \frac{7}{360} x^3 + \frac{31}{15120} x^5 + \frac{127}{604800} x^7 + \frac{73}{3421440} x^9 + \frac{1414477}{65383718400} x^{11} + \cdots, x \in (0, \pi)$$

$$\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \frac{2}{945} x^5 - \cdots, x \in (0, \pi)$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\operatorname{th} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n} x^{2n-1}}{(2n)!} = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 - \frac{1382}{155925} x^{11} + \cdots, |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arsh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 - \frac{5}{112} x^7 + \frac{35}{1152} x^9 - \cdots + \left(\frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots, |x| < 1$$

$$\operatorname{arch} x = \ln 2x - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right) \frac{x^{-2n}}{2n} = \ln 2x - \left(\frac{1}{4} x^{-2} + \frac{3}{32} x^{-4} + \frac{15}{288} x^{-6} + \cdots + \left(\frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right) \frac{x^{-2n}}{2n} + \cdots \right), |x| > 1$$

$$\operatorname{arth} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, |x| < 1$$

...

五. 导数的应用

一. 基本知识

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点, 则 $f'(x_0)=0$ 。

我们称 x 满足 $f'(x_0)=0$ 的 x_0 称为 $f(x)$ 的驻点, 可导函数的极值点一定是驻点, 反之不然。极值点只能是驻点或不可导点, 所以只要从这两种点中进一步去判断。

极值点判断方法

1. 第一充分条件

$f(x)$ 在 x_0 的邻域内可导, 且 $f'(x_0)=0$, 则①若当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 x_0 为极大值点; ②若当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 x_0 为极小值点; ③若在 x_0 的两侧 $f'(x)$ 不变号, 则 x_0 不是极值点。

2. 第二充分条件

$f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则①若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大值点; ②若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小值点。

3. 泰勒公式判别法 (用的比较少, 可以自行百度)

二. 凹凸性与拐点

1. 凹凸的定义

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 若对任意不同的两点 x_1, x_2 , 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] \right)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凸 (凹) 的。

在几何上, 曲线 $y = f(x)$ 上任意两点的割线在曲线下 (上) 面, 则 $y = f(x)$ 是凸 (凹) 的。如果曲线 $y = f(x)$ 有切线的话, 每一点的切线都在曲线之上 (下) 则 $y = f(x)$ 是凸 (凹) 的。

2. 拐点的定义

曲线上凹与凸的分界点, 称为曲线的拐点。

3. 凹凸性的判别和拐点的求法

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数 $f''(x)$,

如果在 (a,b) 内的每一点 x , 恒有 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的;

...

如果在 (a,b) 内的每一点 x , 恒有 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的。

求曲线 $y = f(x)$ 的拐点的方法步骤是:

第一步: 求出二阶导数 $f''(x)$;

第二步: 求出使二阶导数等于零或二阶导数不存在的点 x_1, x_2, \dots, x_k ;

第三步: 对于以上的连续点, 检验各点两边二阶导数的符号, 如果符号不同, 该点就是拐点的横坐标;

第四步: 求出拐点的纵坐标。

三. 渐近线的求法

1. 垂直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$

则 $x = a$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线。

2. 水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

则 $y = b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线。

3. 斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$

或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$

则 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线。

四. 曲率

设曲线 $y=f(x)$ ，它在点 $M(x,y)$ 处的曲率

$$k = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}, \text{ 若 } k \neq 0, \text{ 则称 } R = \frac{1}{k} \text{ 为点 } M(x,y) \text{ 处}$$

的曲率半径，在 M 点的法线上，凹向这一边取一点 D ，

使 $|MD|=R$ ，则称 D 为曲率中心，以 D 为圆心， R 为半

径的圆周称为曲率圆。

第四章 不定积分

一. 基本积分表:

$$\int \lg x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot \operatorname{ctg} x dx = -\csc x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$