四川大学期末考试试题（闭卷）

（2016——2017 学年第 1 学期）　　A 卷

课程号：201137050　　课序号：　　课程名称：微积分（I）-1　任课教师：　　成绩：
适用专业年级：　　学生人数：　　印题份数：　　学号：　　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注：考试时间 120 分钟。请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}x^n$ 的收敛域是__________.

2. 函数 $y=\frac{x^3}{x^2+x+1}$ 的斜渐近线是____________________.

3. 函数 $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ 的拐点是__________.

4. 计算积分 $\int_{-1}^{1}(\tan x\sin x^2+\sqrt{1-x^2})dx=$__________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}a\ln(1+x)+b, x>0\\ 2016+\sin x, x<0\end{cases}$ 处处可导，则 $a+b=$__________.

6. 设 $f(x+2\pi)=f(x)$，$f(x)=e^{\frac{x}{\pi}}$ $(-\pi<x<\pi)$，将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数，$s(x)$ 是该级数的和函数，则 $s(2017\pi)=$__________.

二、解答题 (每小题 8 分，共 48 分)

1. 计算不定积分 $\int(x\sqrt{1-x^2}+\frac{e^x}{1+e^{2x}})dx$.

2. 计算定积分 $\int_0^{\pi}x\sin^2 x dx$.

3. 把函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数，并求 $f^{(10)}(0)$.

4．判断广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}dx$的敛散性.

5．设函数$y=y(x)$是由方程组$\begin{cases}x=\int_1^t e^{-u^2}du\\ y^3-\ln(x+t)=1\end{cases}$确定的，求$\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

6．设连续函数$f(x)$满足$f(0)=0$，$f'(0)=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x}f(3x-t)dt}{(e^x-1)\tan x}$.

三、应用题 (每小题 10 分，共 20 分)

1．设曲线$y=\sqrt{x}$与$y=x^2$围成的平面区域为D，（1）求区域D的面积（4 分）;

（2）求区域D绕y轴旋转的旋转体体积（6 分）.

2．宽度分别为a和b的两条走廊相交成直角，打算将一根细棒经过这两条走廊水平运出，

（1）如果细棒长度为$a+b$，不通过计算讨论能否水平运出该细棒（3 分）;

（2）设细棒紧靠走廊拐角，并与一条走廊的夹角为$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，求细棒的最大长度（2 分）;

（3）当$b=3\sqrt{3}a$时，求能够水平运出的细棒的最大长度（5 分）.

四、证明题 (每小题 7 分，共 14 分)

1．设$a_n=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)dx$，$b_n=2^{-n}(n+1)a_n$，$c_n=(-1)^n\sqrt{a_n}$，证明：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\ln 2$（4 分）;　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$条件收敛（3 分）.

2．设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，并且$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2017}$，求证：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=\xi^{2016}$（3 分）;

（2）对任意的正整数n，都存在$\xi_i\in(\frac{i}{n},\frac{i+1}{n})$，使得$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\xi_i^{2016}$（4 分）.