四川大学2020－2021学年微积分(I)-1期末试题参考答案

一、填空题(每小题3分，共15分)

1. $\underline{-3}$；2. $\underline{1}$；3. $\underline{3}$；4. $\underline{\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C}$；

5. $\underline{y=x+1;\ y=3x-1}$.

二、计算题(每小题8分，共32分)

1.求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2})\cos x^2}{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}$.

解 因为$\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)$，$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{2!}(-\dfrac{x^2}{2})^2+o(x^4)$，

$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)$ ………………….. 3 分

所以当$x\to 0$时，$1+\dfrac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}\sim\dfrac{1}{8}x^4$，$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}\sim-\dfrac{1}{12}x^4$ ………………….. 6 分

因此，原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{8}x^4}{-\frac{1}{12}x^4}=-\dfrac{3}{2}$. ………………….. 8 分

2.设 $f(x)=(x^3e^{x^2}+1)\sin^3 x+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin^3 x\,\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解 设$A=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin^3 x\,\mathrm{d}x$，两边同乘$\sin^3 x$并在区间$-\pi,\pi]$上积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin^3 x\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}(x^3e^{x^2}+1)\sin^6 x\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}A\sin^3 x\,\mathrm{d}x$$ ……….. 4 分

由奇偶性得

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^6 x\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,\mathrm{d}x=4\mathrm{I}_6=4\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{8}.$$

所以 $f(x)=(x^3e^{x^2}+1)\sin^3 x+\dfrac{5\pi}{8}$. ……………... 8 分

3.已知 $f''(x)$ 连续，且 $f(0)= f(\pi)=1$，求积分 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x$ 的值.

解 由分部积分公式

$$原式=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}f'(x)$$

$$=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+[f'(x)\sin x|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x]$$

$$=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x$$ …………….. 4 分

$$=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}\ f(x)$$

$$=\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x-[\cos x\ f(x)|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x]$$ …………….. 6 分

$$=2$$ …………….. 8 分

4. 设 $f(x)=x^2\cos^2 x$，求 $f^{(12)}(0)$.

解 首先 $f(x)=x^2\cos^2 x=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2x$， …………….. 2 分

由莱布尼茨公式

$$f^{(12)}(x)=(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2x)^{(12)}=\frac{1}{2}(\cos 2x\cdot x^2)^{(12)}$$

$$=\frac{1}{2}[(\cos 2x)^{(12)}\cdot x^2+C_{12}^1(\cos 2x)^{(11)}\cdot 2x+C_{12}^2(\cos 2x)^{(10)}\cdot 2+0]$$ ……….. 6 分

所以 $$f^{(12)}(0)=\frac{1}{2}\cdot C_{12}^2(\cos 2x)^{(10)}\cdot 2|_{x=0}$$

$$=66\cdot 2^{10}\cdot\cos(2x+10\cdot\frac{\pi}{2})|_{x=0}=-66\cdot 2^{10}.$$ …………….. 8 分

三、解答题(每小题10分，共20分)

1.设函数 $f(x)$在 $x=0$处可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x^2-t^2)dt}{x^a}=b(b\neq 0)$，求$a,b$的值.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$知，当$x\to 0$时，$f(x)\sim x$. 因此

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du \quad \text{………. 4 分}$$

所以，当$x\to 0$时，$\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du\sim\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2}u\,du=\dfrac{1}{4}x^4$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)dt}{x^4}=\frac{1}{4}$$

$\therefore a=4,b=\dfrac{1}{4}$. ……………. 10 分

2.讨论方程 $f(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}=0$($n$为正整数)有几个实根.

解 易知当$x\leq 0$时，$f(x)>0$，无实根. 故就$x>0$讨论即可.

(1) 当$n=2k-1$时，$f'(x)=-1+x-x^2+\cdots-x^{2k-2}=-\dfrac{1+x^{2k-1}}{1+x}<0$.

$f(x)$严格单减，$f(0)=1$，$f(+\infty)=-\infty$，

由零点存在定理知原方程有唯一实根. ……………. 6 分

(2) 当$n=2k$时，令 $f'(x)=-1+x-x^2+\cdots x^{2k-1}=-\dfrac{1-x^{2k}}{1+x}=0$，得$x=1$.

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$严格单减；当$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$严格单增.

而 $f(1)=(1-1)+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{2k-2}-\dfrac{1}{2k-1})+\dfrac{1}{2k}>0$，

因此当$n=2k$时原方程无实根. ……………. 10 分

四、应用题(每小题10分，共20分)

1.求由曲线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$与 x轴所围成区域的面积.

解 区域的面积 $A=\int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}x$ …………….. 2 分

$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\,\mathrm{d}(t-\sin t)$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t=4\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\mathrm{d}t=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,\mathrm{d}u$$ ………….. 8 分

$$=16\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi$$ …………….. 10 分

2.设空间有两点$A(1,1,0)$，$B(0,2,1)$.

(1)求经过AB且与坐标面$z=0$ 垂直的平面方程；

(2)求经过AB的直线方程；

(3)将直线 AB绕z轴旋转一周，求介于面$z=0$与$z=2$ 之间的旋转体体积.

解 (1)平面的法矢量$n=(0,0,1)$. 设所求平面上任意一点为$M(x,y,z)$，则

$[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},n]=\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，即平面方程为$x+y-2=0$. …………….. 3 分

(2)由两点式知经过AB的直线方程为$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$. …………….. 6 分

(3)由直线 AB的方程知: $x=1-z$，$y=1+z$. 故在区间$[0,2]$上任取一点z，做垂直于 z轴的截面，面积为

$$A(z)=\pi(x^2+y^2)=\pi((1-z)^2+(1+z)^2)=2\pi(1+z^2).$$

因此旋转体的体积为

$$V=\int_0^2 A(z)\,\mathrm{d}z=\int_0^2 2\pi(1+z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{28}{3}\pi.$$ …………….. 10 分

五、证明题(第1小题6分，第2小题7分，共13分)

1.设函数 $f(x)\in C[0,\pi]$，满足 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

(1)存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f(\xi)=0$;

(2)若同时还满足 $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$，则存在不同的 $\eta_1,\eta_2\in(0,\pi)$，使得 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$.

证明 (1)令 $F(x)=\int_0^{x} f(t)dt$，则 $F(0)=0, F(\pi)=0$，由罗尔定理知，在 $(0,\pi)$ 内至少存在 ξ，

使得 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$. …………….. 3 分

(2)同时

$$0=\int_0^{\pi} f(x)\cos x d x=\int_0^{\pi}\cos x dF(x)=[\cos xF(x)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin xF(x)dx=\int_0^{\pi}\sin xF(x)dx$$

由(1)知存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $F(\xi)\sin\xi=0$，即 $F(\xi)=0$.

在区间 $[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$ 上分别由罗尔定理即得：在 $(0,\pi)$ 内存在两个不同的点 η_1,η_2，

使得 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=0$. …………….. 6 分

2. 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1, a_n=\dfrac{a_{n-1}}{n(a_{n-1}+1)}, n\geq 2$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n=\dfrac{1}{e}$.

证明 $$\frac{1}{n!a_n}=\frac{1}{(n-1)!}\frac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!a_{n-1}}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-2)!a_{n-2}}$$

$$=\cdots=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\cdots+\frac{1}{1!}+1$$ …………….. 3 分

由泰勒公式知 $\dfrac{1}{(n-1)!}+\dfrac{1}{(n-2)!}+\cdots+\dfrac{1}{1!}+1=e-\dfrac{e^{\xi}}{n!}\to e(n\to\infty)$， …………….. 5 分

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n!a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\cdots+\frac{1}{1!}+1}=\frac{1}{e}.$$ …………….. 7 分