# 四川大学期末考试试卷（A 卷）

（2015—2016 年第一学期）

科目：微积分（I）-1　　课程号：201138040　　考试时间：120 分钟

**注**：请将答案写在答题纸规定的方框内，否则记 0 分。

**一、填空题(每小题 3 分，共 21 分)**

**1．1;　　2．4;　　3．$(1,2)$；　4．$x-\arctan x+C$；5．$\frac{\pi}{2}$；　　6．0;　　7．$a\ge e$**

**二、计算题 (每小题 9 分，共 45 分)**

**1．计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$．**

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\cos x-1}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=e\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=e$

**2．由方程 $ye^{xy}=1-x$ 确定函数 $y=y(x)$，计算 $y''(0)$．**

解：方程 $ye^{xy}=1-x$ 两边对 $x$ 求导：

$$y'e^{xy}+ye^{xy}(xy'+y)=-1$$

$$(y'+xyy'+y^2)e^{xy}=-1 \qquad (1)$$

令 $x=0$，由原方程得 $y(0)=1$，代入上式，得到　　$y'(0)=-2$

(1)式两边再对 $x$ 求导：

$$(y''+yy'+xy'^2+xyy''+2yy')e^{xy}+(y'+xyy'+y^2)e^{xy}(xy'+y)=0$$

将 $x=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=-2$ 代入上式，得到：　$y''(0)=7$

**3．计算不定积分 $\int\ln(1+\sqrt{x})dx$．**

解：令 $t=\ln(1+\sqrt{x})\to x=(e^t-1)^2\to dx=2(e^t-1)e^t dt$

$$\int\ln(1+\sqrt{x})dx=2\int t(e^{2t}-e^t)dt=2\int td(\frac{1}{2}e^{2t}-e^t)$$

$$=2t(\frac{1}{2}e^{2t}-e^t)-2\int(\frac{1}{2}e^{2t}-e^t)dt=t(e^{2t}-2e^t)-\int(e^{2t}-2e^t)dt$$

$$=t(e^{2t}-2e^{t})-(\frac{1}{2}e^{2t}-2e^{t})+C=(t-\frac{1}{2})e^{2t}+2(1-t)e^{t}+C$$

$$=[\ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}](1+\sqrt{x})^{2}+2[1-\ln(1+\sqrt{x})](1+\sqrt{x})+C$$

**4**．计算定积分$\int_0^1\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}dx$．

解：$\int_0^1\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}d\,(1+x^2)+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-1$$

**5**．求曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的所有渐近线.

解：(1) 当$x\to 0$时，$y\to\infty$，所以$x=0$($y$轴)是函数的垂直渐近线；

(2) 当$x\to-\infty$时，$y\to 0$，所以$y=0$($x$轴)是函数的水平渐近线；

(3) 当$x\to+\infty$时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{e^x}=0$$

所以$y=x$是函数的斜渐近线.

三、解答题 (每小题 10 分，共 20 分)

**1**．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$的收敛域与和函数.

解：幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$的收敛半径$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$的收敛域为$(-1,1)$．当$x\in(-1,1)$时，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{2n-1}dx=2\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1})dx$$

$$=2\int_0^x\frac{x}{1-x^2}dx=-\int_0^x\frac{1}{1-x^2}d(1-x^2)=-\ln(1-x^2)$$

**2**．已知曲线$y=x^2$与$y=ax\quad(0<a<1)$所围成图形的面积为$S_1$，曲线$y=x^2$，$y=ax$与$x=1$所围成图形的面积为$S_2$，确定$a$的值，使$S_1+S_2$达到最小，并求出$S_1+S_2$的最小值.

解：(1) 曲线 $y=x^2$ 与 $y=ax$ 所围成图形的面积为 $S_1$

$$S_1=\int_0^a (ax-x^2)dx=(\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^a=\frac{1}{6}a^3$$

(2) 曲线 $y=x^2$，$y=ax$ 与 $x=1$ 所围成图形的面积为 $S_2$

$$S_2=\int_a^1 (x^2-ax)dx=(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2)\Big|_a^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{6}a^3$$

所以 $T=S_1+S_2=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}a^3$

(3) 求最大值：两边对 $a$ 求导数： $T'=-\frac{1}{2}+a^2=0\to a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(0<a<1)$

由于 $T''=2a\big|_{a=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}>0$，$T$ 在 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极小值，由于只有一个极小值，故为最小值，这时 $(S_1+S_2)_{\max}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

四、证明题 (每小题 7 分，共 14 分)

1．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\ 2}$ 收敛，求证：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 也收敛.

证明： 根据不等式 $|\frac{a_n}{n}|\le\frac{1}{2}(a_n^{\ 2}+\frac{1}{n^2})$，

由已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\ 2}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{a_n}{n}|$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 绝对收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛.

2．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0$.

证明: 由已知 $f(0)=f(1)=0$,根据罗尔定理，存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=0$.

令 $\varphi(x)=x^2f'(x)$，根据条件有 $\varphi(0)=\varphi(\eta)=0$，再利用罗尔定理, 存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$.

即 $\xi^2f''(\xi)+2\xi f'(\xi)=0$ 或 $\xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0$