高数重点知识及典型例题归纳

重要知识点：

第一章：

夹逼定理（数列 8 页，函数 36 页），单调有界（10 页），左右极限（30 页），无穷小量（高阶、同阶、等价 42 页），函数连续性（48 页），间断点和渐近线（49 页）。

第二章：

导数定义（64 页），反函数求导（65 页），高阶导数（76 页），莱布尼茨公式（78 页），隐函数求导（81 页），参数方程求导（84 页）。

第三章：

罗尔（96 页）拉格朗日中值定理（98 页），柯西（99 页），洛必达法则（101 页），泰勒公式（109 页），单调性与凹凸性（114 页，拐点 116 页），渐近线（119 页）。

第四章：

积分法（3 种方法 149 页），有理函数的积分（160）。

第五章：

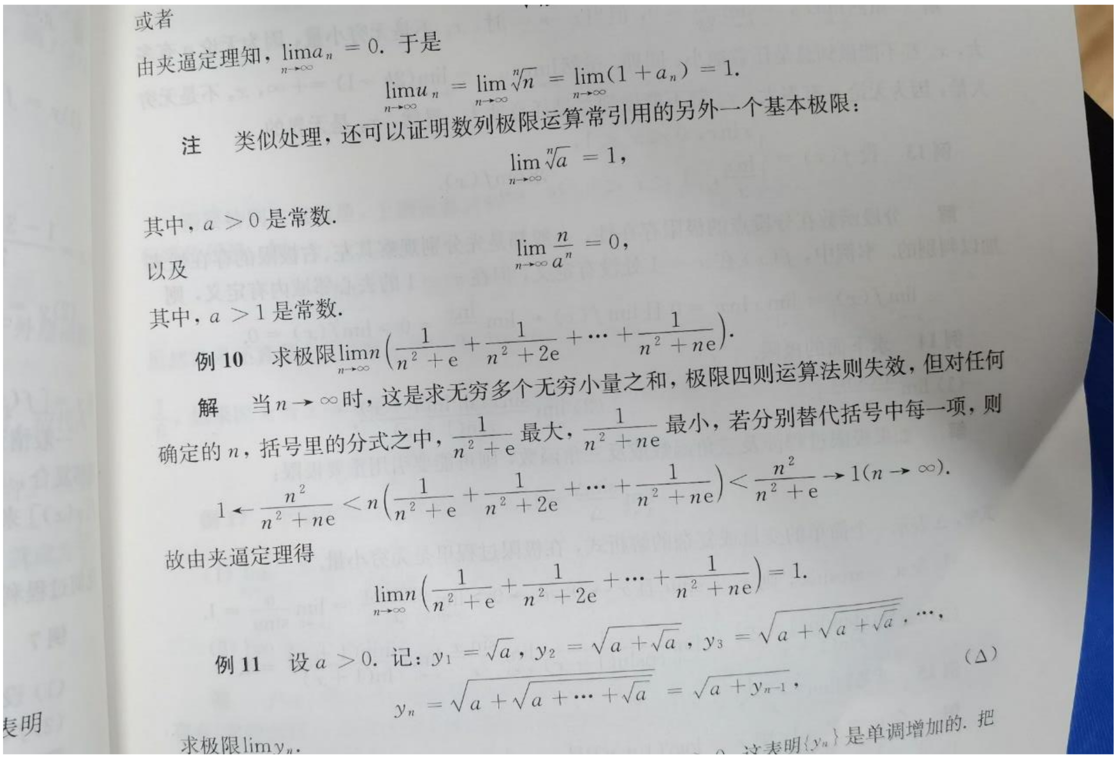
定积分定义（170），定积分中值定理（174 页），性质 6：估值定理（174 页），积分上限函数（176 页），定积分应用（面积，体积，弧长 194 页）。

第六章：

微分方程

典型例题归纳：

1、 夹逼定理


或者

由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}(1+a_n) = 1.$$

注　类似处理，还可以证明数列极限运算常引用的另外一个基本极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1,$$

其中，$a>0$ 是常数.

以及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n} = 0,$$

其中，$a>1$ 是常数.

例 10　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+e}+\frac{1}{n^2+2e}+\cdots+\frac{1}{n^2+ne}\right)$.

解　当 $n\to\infty$ 时，这是求无穷多个无穷小量之和，极限四则运算法则失效，但对任何确定的 n，括号里的分式之中，$\frac{1}{n^2+e}$ 最大，$\frac{1}{n^2+ne}$ 最小，若分别替代括号中每一项，则

$$1\leftarrow\frac{n^2}{n^2+ne} < n\left(\frac{1}{n^2+e}+\frac{1}{n^2+2e}+\cdots+\frac{1}{n^2+ne}\right) < \frac{n^2}{n^2+e}\to 1\ (n\to\infty).$$

故由夹逼定理得

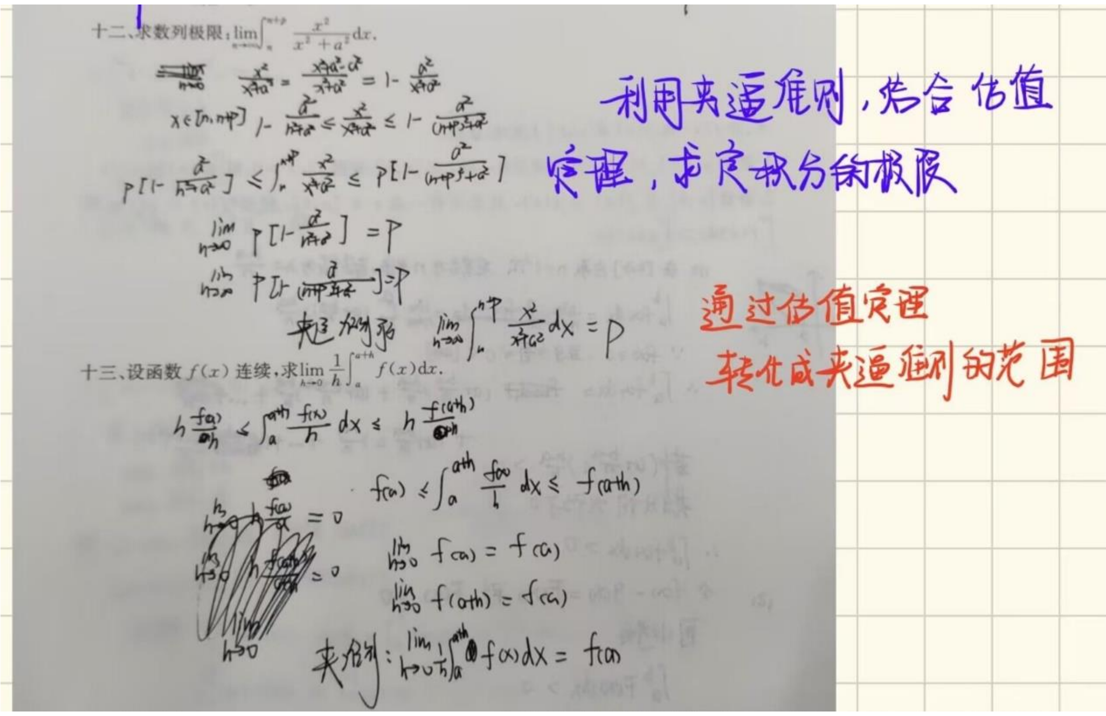
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+e}+\frac{1}{n^2+2e}+\cdots+\frac{1}{n^2+ne}\right) = 1.$$

例 11　设 $a>0$. 记：$y_1=\sqrt{a}$，$y_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$，$y_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$，…，

$$y_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}} = \sqrt{a+y_{n-1}},\qquad (\Delta)$$

求极限 $\lim y_n$.

这表明 $\{y_n\}$ 是单调增加的. 把


十二、求数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{x^2}{x^2+a^2}dx$.

$\frac{x^2}{x^2+a^2} = \frac{x^2+a^2-a^2}{x^2+a^2} = 1-\frac{a^2}{x^2+a^2}$

$x\in[n,n+p]$　$1-\frac{a^2}{n^2+a^2}\le\frac{x^2}{x^2+a^2}\le 1-\frac{a^2}{(n+p)^2+a^2}$

$p\left[1-\frac{a^2}{n^2+a^2}\right]\le\int_n^{n+p}\frac{x^2}{x^2+a^2}\le p\left[1-\frac{a^2}{(n+p)^2+a^2}\right]$

$\lim\limits_{n\to\infty}p\left[1-\frac{a^2}{n^2+a^2}\right]=p$

$\lim\limits_{n\to\infty}p\left[1-\frac{a^2}{(n+p)^2+a^2}\right]=p$

夹逼准则　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{x^2}{x^2+a^2}dx=p$

利用夹逼准则，结合估值定理，求定积分的极限

十三、设函数 $f(x)$ 连续，求 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(x)dx$.

$h\frac{f(a)}{h}\le\int_a^{a+h}\frac{f(x)}{h}dx\le h\frac{f(a+h)}{h}$

$f(a)\le\int_a^{a+h}\frac{f(x)}{h}dx\le f(a+h)$

$\lim\limits_{h\to0}f(a)=f(a)$

$\lim\limits_{h\to0}f(a+h)=f(a)$

夹逼：$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h}f(x)dx=f(a)$

通过估值定理转化成夹逼准则的范围

2、 单调有界

<3.

4.2）、$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ …… 证明极限存在，并求出值。

$\Rightarrow$ $x_1<x_2$，若 $x_n<x_{n+1}$ 即可 $\overset{\text{若可以则}}{\Longrightarrow}$ $x_{n+1}<x_{n+2}$

设 $x_k<2$，再证 $x_n<2$ 时，$x_{n+1}<2$，即可。

4.3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$ $(a>1)$.

令 $x_n=\frac{n}{a^n}$，则 $x_{n+1}=\frac{n+1}{a^{n+1}}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{a}\cdot x_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

$x_n=0$.

4.4）证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=e$

3.1）若 $\lim f(x)$ 存在、$\lim g(x)$ 不存在，那么 $\lim[f(x)+g(x)]$ 不存在.（V）.

若 $\lim[f(x)+g(x)]$ 存在，则

$\lim g(x)=\lim[f(x)+g(x)]-\lim[f(x)]$ 存在（×）

2）若 $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 不存在，那么 ~~…~~

$\lim f(x)\cdot g(x)$ 不存在.

若 …… 存在，则 $\lim g(x)=\frac{\lim f\cdot g}{\lim f}$

16、单调有界收敛准则 ①求极限 ②有界 ③单调

存在正数 M，使得 $\forall x_n$ 都有 $|x_n|\le M$ 则为有界

先界函数再单调

单调有界的数列一定有极限

适用于：①递推关系求出的数列 ②证明数列极限存在

17、例：设 $c>0$，$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)$ 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=A$

$\therefore A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{c}{A}\right)$ $A>0$

$\therefore A=\sqrt{c}$

又 $\because$ $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)\ge\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{c}=\sqrt{c}$

$\therefore$ 函数有下界

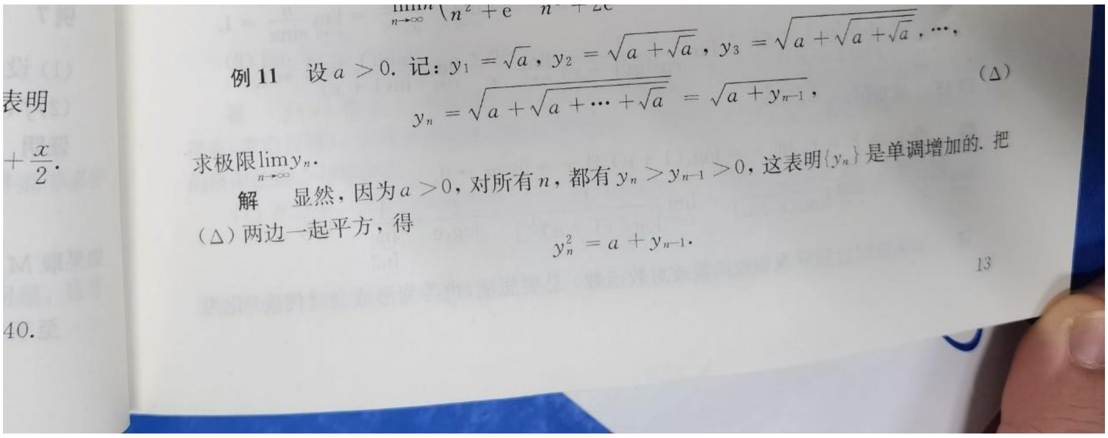
又 $\because$ ~~$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{c}{x_n})$~~ $x_n\ge\sqrt{c}$

$\therefore$ $x_n^2\ge c$

$\therefore$ $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{c}{x_n}\right)\le\frac{1}{2}(x_n+x_n)=x_n$

$\therefore$ 函数单调减

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，为 $\sqrt{c}$



例 11 设 $a>0$. 记：$y_1=\sqrt{a}$，$y_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$，$y_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$，…，

$$y_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}=\sqrt{a+y_{n-1}},\qquad (\Delta)$$

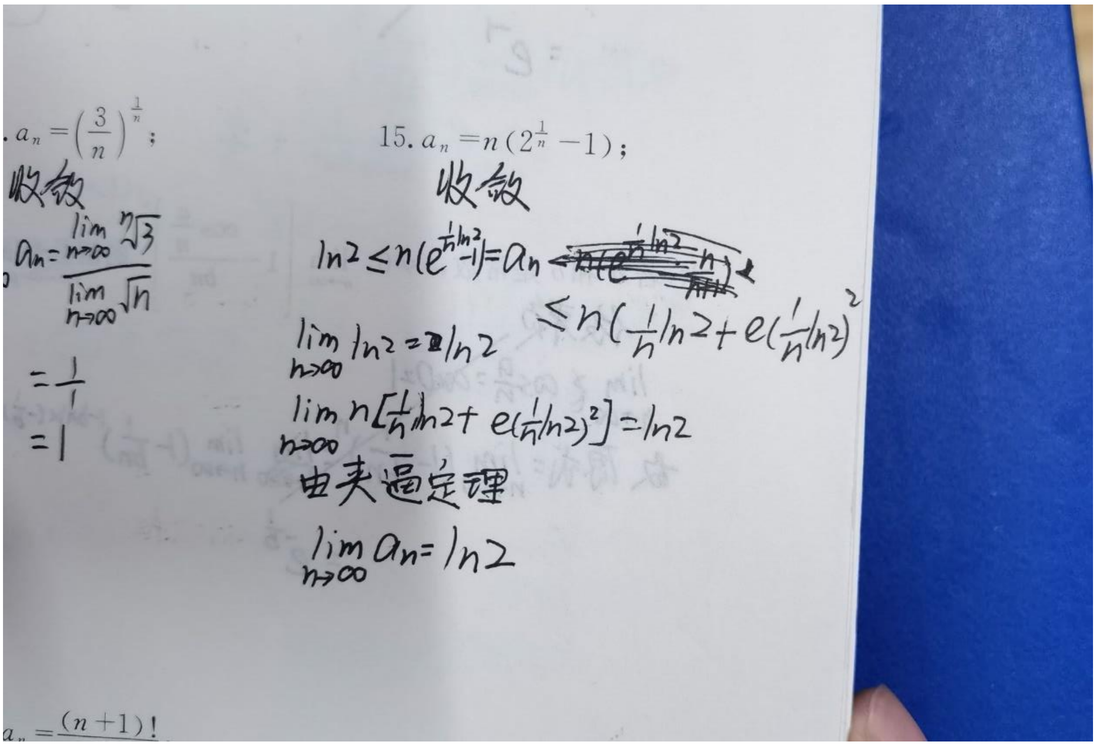
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

解 显然，因为 $a>0$，对所有 n，都有 $y_n>y_{n-1}>0$，这表明 $\{y_n\}$ 是单调增加的. 把 (Δ) 两边一起平方，得

$$y_n^2=a+y_{n-1}.$$

13

3、 夹逼定理，等价无穷小量代换，洛必达法则



$a_n=\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$；

收敛

$$a_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{1}=1$$

15. $a_n=n(2^{\frac{1}{n}}-1)$；

收敛

$$\ln 2\le n(e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1)=a_n \le n\left(\frac{1}{n}\ln 2+e\left(\frac{1}{n}\ln 2\right)^2\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln 2=\ln 2$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{n}\ln 2+e\left(\frac{1}{n}\ln 2\right)^2\right]=\ln 2$$

由夹逼定理

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\ln 2$$

4、 间断点和渐近线

12、设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$，求 f(x) 的间断点并指出类型

① $|x|=1$ 时

$f(x)=0$

② $|x|>1$ 时

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}\cdot x=-x$

③ $|x|<1$ 时

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=x$

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 0 & x=-1\\ x & -1<x<1\\ 0 & x=1\\ -x & x>1\end{cases}$$

$f(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-1$ 跳跃

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=1$

$f(1)=0$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1$ 跳跃

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$

13. 求 $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-3x+2}$ 的渐进线

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\infty$ 无水平渐近线

$f(x)=\frac{2x^3}{(x-1)(x-2)}$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$ $x=1$ 为垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=+\infty$ $x=2$ 为垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-3x+2}=2$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\frac{2x^3-2x^3+6x^2-4x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-4x}{x^2-3x+2}=6$

$y=2x+6$ 斜渐近线

26. 求下列函数的间断点类型和连续区间.

(1) $y=\frac{\tan 2x}{x}$；

(2) $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\frac{x}{\ln x}$；

(4) $y=x\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

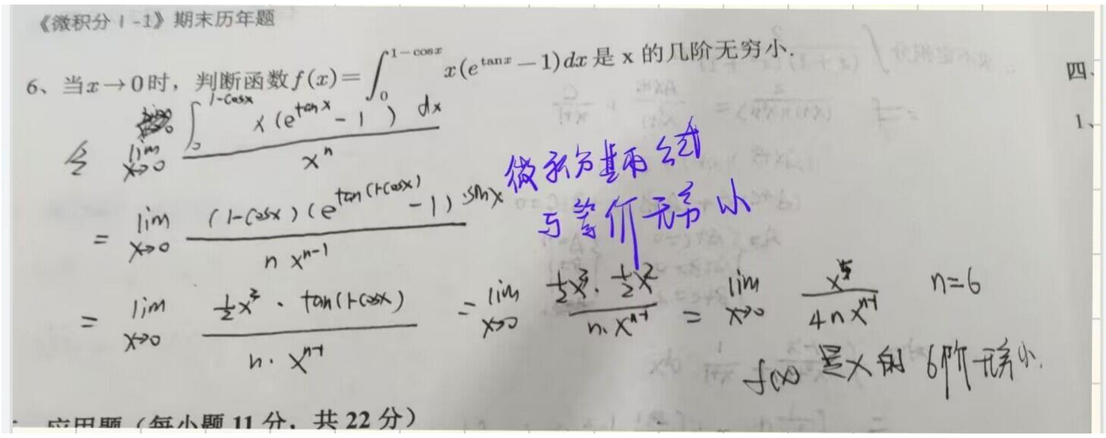
27. 求下列函数的间断点类型和连续区间.

(1) $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1-xe^{tx}}{x+e^{tx}}$；

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$ $(x\geqslant0)$.

5、无穷小量

① 高阶无穷小



《微积分 I-1》期末历年题

6、当$x\to0$时，判断函数$f(x)=\int_0^{1-\cos x}x(e^{\tan x}-1)dx$是 x 的几阶无穷小.

令 $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{1-\cos x}x(e^{\tan x}-1)dx}{x^n}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(e^{\tan(1-\cos x)}-1)\sin x}{n x^{n-1}}$

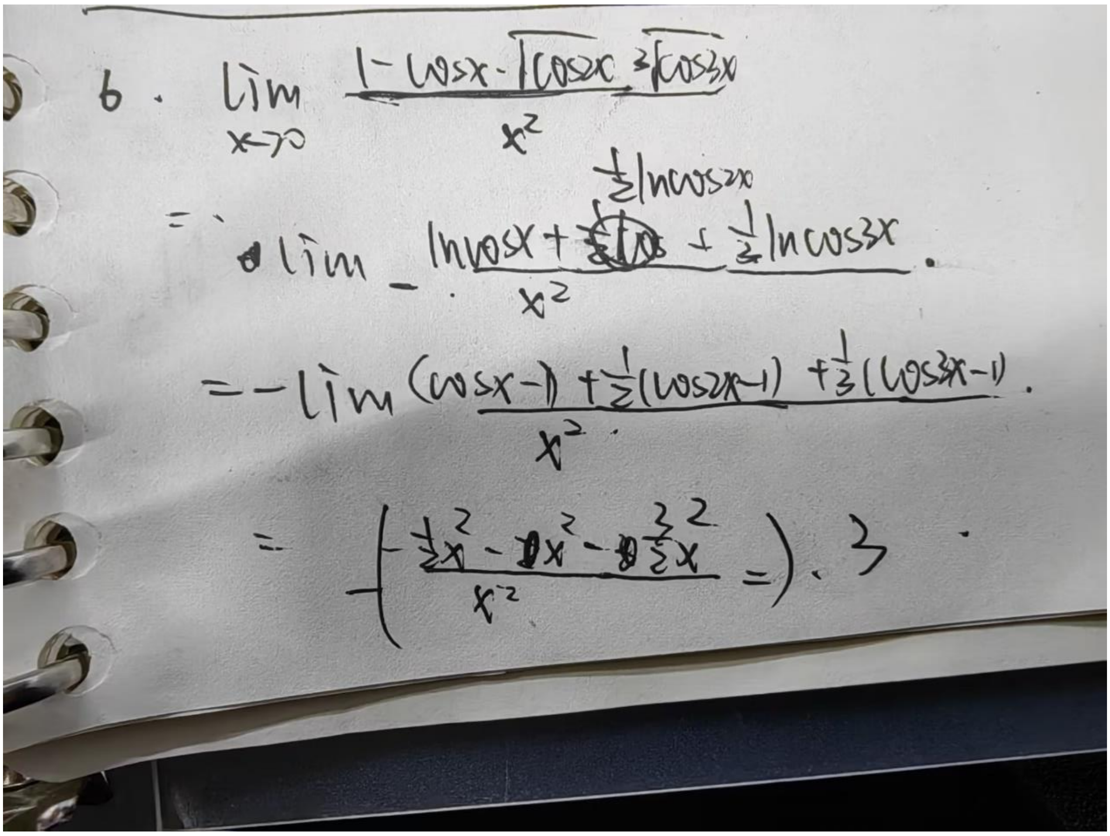
$=\lim_{x\to0}\frac{\frac12x^2\cdot\tan(1-\cos x)}{n\cdot x^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac12x^2\cdot\frac12x^2}{n x^{n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{x^5}{4n x^{n-1}}$ $n=6$

微积分基本公式 与等价无穷小

$f(x)$ 是x的6阶无穷小.

应用题（每小题 11 分，共 22 分）

② 等价无穷小+函数极限



6. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

$=-\lim\frac{\ln\cos x+\frac12\ln\cos 2x+\frac13\ln\cos 3x}{x^2}$

$=-\lim\frac{(\cos x-1)+\frac12(\cos 2x-1)+\frac13(\cos 3x-1)}{x^2}$

$=-\left(\frac{-\frac12x^2-x^2-\frac32x^2}{x^2}\right)=3$

6、通过递归构造可以被夹逼的数列

7. $x_1=1$, $x_n=1+\frac{1}{1+x_{n-1}}$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求出.

解：非单调

$x=1+\frac{1}{1+x}$ $x=\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$(舍).

设极限为 $\sqrt{2}$

$$|x_n-\sqrt{2}|=\left|1+\frac{1}{1+x_{n-1}}-\sqrt{2}\right|$$

$$=\left|\frac{2+x_{n-1}-\sqrt{2}-\sqrt{2}x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right|$$

$$=\left|\frac{(1-\sqrt{2})(x_{n-1}-\sqrt{2})}{1+x_{n-1}}\right|$$

$$<(\sqrt{2}-1)|x_{n-1}-\sqrt{2}|$$

故：$|x_n-\sqrt{2}|<(\sqrt{2}-1)|x_{n-1}-\sqrt{2}|$

$$<(\sqrt{2}-1)^2|x_{n-2}-\sqrt{2}|$$

$$<\cdots<0.$$

得证.

7、 零点定理

14、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)$，证明：$\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{b-a}{2})$

令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{2})$

$x+\frac{b-a}{2}\in[a,b]$ $x\in[a,b]$

则 $x\in[a,\frac{a+b}{2}]$

$F(a)=f(a)-f(\frac{a+b}{2})$

$F(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(b)$

$f(a)=f(b)$

$\therefore F(a)\cdot F(\frac{a+b}{2})\le 0$

故 $\exists \xi\in[a,b]$ 使得 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{b-a}{2})$

5/9

8、参数方程

十四、设 $y=y(x)$ 是由方程 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3, \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$ 和 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

$t=0$ 时，$x=3$，$y=1$

$dx=(6t+2)dt$，

$dy=\frac{e^y\cos t\,dt}{1-e^y\sin t}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{e}{2}$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{(y'e^y\cos t-\sin t e^y)(1-e^y\sin t)(6t+2)-e^y\cos t[(-y'e^y\sin t-e^y\cos t)(6t+2)+(1-e^y\sin t)\times 6]}{(1-e^y\sin t)^2(6t+2)^3}$. $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$

$\frac{3e^2+}{8}$

十五、一个球形雪球的体积以 $1\ cm^3/min$ 的速度减少，求直径为 10 cm 时，雪球直径的减少速度.

$\frac{dV}{dt}=1$ $\therefore V=\frac{4}{3}\pi(\frac{D}{2})^3$

9、隐函数

(4) $y=f(x+\cos x)$，$f(x)$二阶可导，求 y'，y''；

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\\ \dfrac{x+2\cos x}{2}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$；

(6) $\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$ 决定函数 $y=y(x)$，求 y'.

解 (1) $y'=(e^{\tan\frac{1}{x}})'\sin\dfrac{1}{x}+e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)'$

$$=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}+e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}$$

$$=\frac{-e^{\tan\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\sec^2\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right).$$

(2) $y=e^{x^x\ln x}=e^{e^{x\ln x}\cdot\ln x}$,

$$y'=e^{e^{x\ln x}\cdot\ln x}\cdot(e^{x\ln x}\ln x)'$$

$$=x^{x^x}[e^{x\ln x}(x\ln x)'\ln x+e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}]$$

$$=x^{x^x}\cdot x^x(\frac{x}{x}\ln x+\ln^2 x+\frac{1}{x})$$

$$=x^{x^x+x}(\frac{1}{x}+\ln^2 x+\ln x).$$

10、罗尔定理 构造函数

1. 证明 $\exists\,\xi\in(1,e)$. 使 $\sin 1=\cos\ln\xi$.

$f(x)=\sin 1-\cos\ln\xi$.

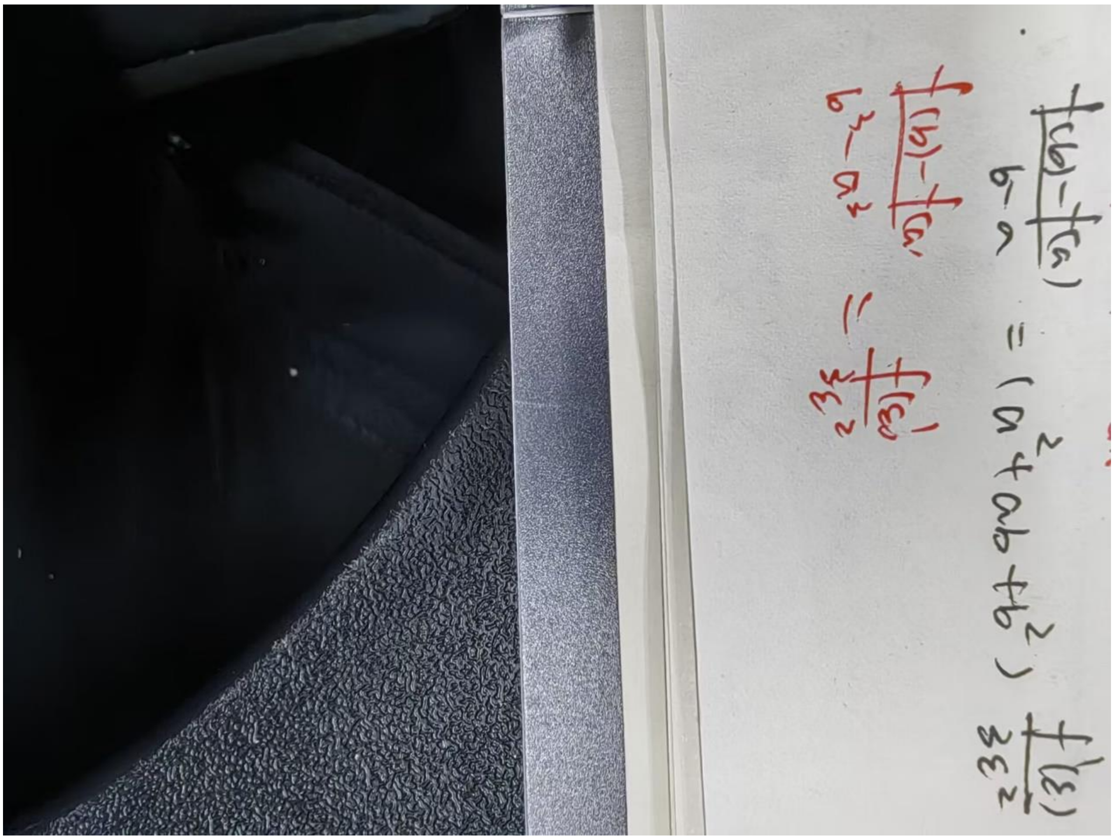
构造 $F(x)$. $F(a)=F(b)=0$ 且 $F'(x)=f(x)$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}\sin 1-\dfrac{1}{x}\cos\ln x$

$F(x)=\ln x\cdot\sin 1-\sin\ln x$

$F(1)=F(e)=0\Rightarrow F'(\xi)=0$.

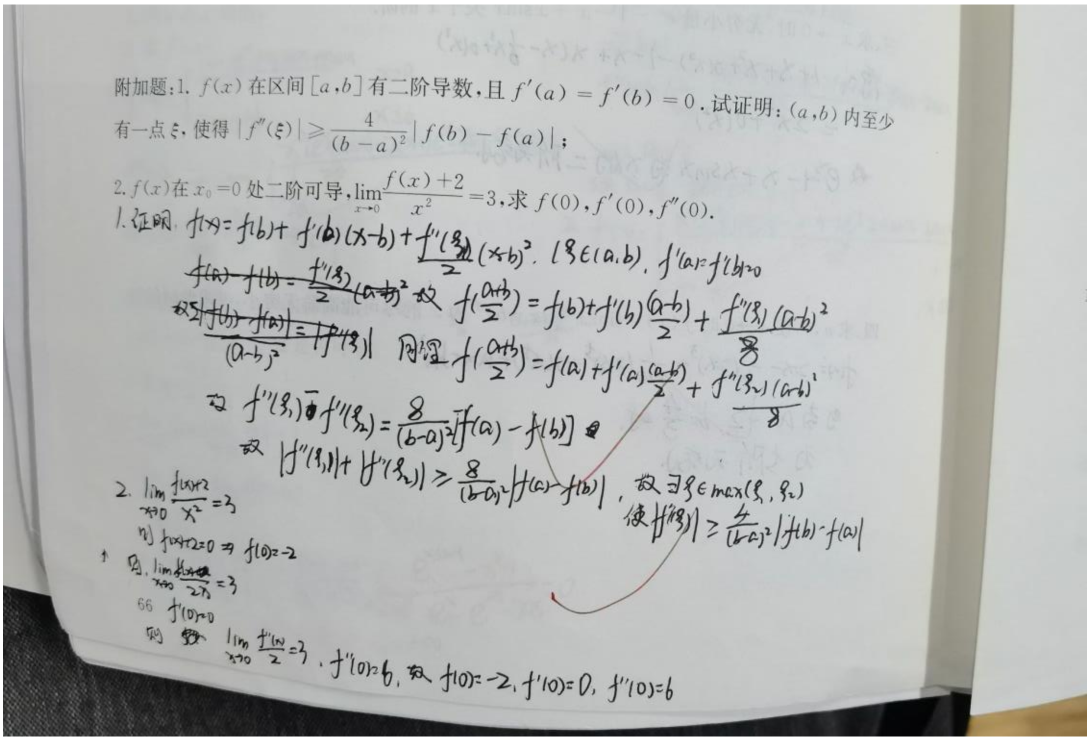
11、柯西中值 构造函数



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = (a^2+ab+b^2)\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3} = \frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$$

12、拉格朗日余项的泰勒中值定理



附加题：1. $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$．试证明：(a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $|f''(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$；

2. $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处二阶可导，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+2}{x^2}=3$，求 $f(0), f'(0), f''(0)$．

1. 证明 $f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-b)^2$，$(\xi\in(a,b))$，$f'(a)=f'(b)=0$

$\cancel{f(a)-f(b)=\frac{f''(\xi)}{2}(a-b)^2}$ 故 $f(\frac{a+b}{2})=f(b)+f'(b)\frac{(a-b)}{2}+\frac{f''(\xi_1)(a-b)^2}{8}$

$\cancel{故 \frac{2|f(b)-f(a)|}{(a-b)^2}=|f''(\xi)|}$ 同理 $f(\frac{a+b}{2})=f(a)+f'(a)\frac{(a-b)}{2}+\frac{f''(\xi_2)(a-b)^2}{8}$

故 $f''(\xi_1)-f''(\xi_2)=\frac{8}{(b-a)^2}[f(a)-f(b)]$

故 $|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)| \geq \frac{8}{(b-a)^2}|f(a)-f(b)|$，故 $\exists\xi\in\max(\xi_1,\xi_2)$

使 $|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+2}{x^2}=3$

则 $f(x)+2=0 \Rightarrow f(0)=-2$

因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=3$

故 $f'(0)=0$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=3$，$f''(0)=6$，故 $f(0)=-2$，$f'(0)=0$，$f''(0)=6$

13、利用拉格朗日中值定理求极限

注意：考试时间是 90 分钟。

1.(10分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2e^x+\ln(1-x^2)}{\sin x}$.

2.(10分)设单调递增正数列 $\{x_n\}$ 满足: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2021$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1+x_2^2+x_3^3+\cdots+x_n^n}$.

3.(12分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\sin x}{\sin\arctan x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

4.(12分)设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(e^{nx}-e^{-nx})\tan(x-1)}{(e^{nx}+e^{-nx})(x-1)}$，求 $f(x)$ 的全部间断点并判断其类型.

5.(12分)设 $y=(x^3-1)^9e^{2x}$，求 $y^{(10)}(1)$.

6.(12分)设 $\begin{cases}x=(1+t)^{2+t},t>-1\\ ye^{t}+\arctan t=1\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ 以及 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}$.

7.(12分)设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，

(1)求函数 $f(x)$ 的皮亚洛余项的二阶麦克劳林展开式；(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x^2}$.

8.(10分)设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶可导，且 $|f''(x)|\le 1$，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

证明: $|f(-1)|+|f(1)|\le 1$.

9.(10分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

14、渐近线

13. 求 $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-3x+2}$ 的渐进线

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\infty$ 无水平渐近线

$f(x)=\dfrac{2x^3}{(x-1)(x-2)}$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$　　$x=1$ 为垂直渐近线

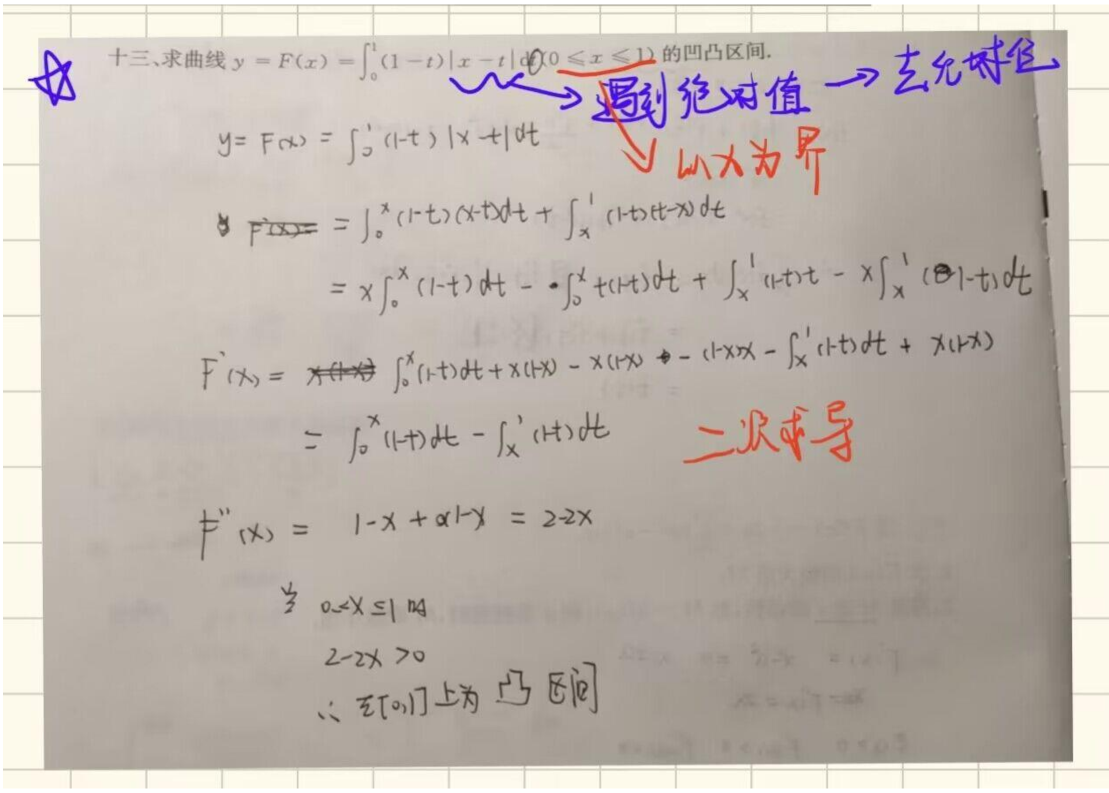
$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=+\infty$　　$x=2$ 为垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-3x+2}=2$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\dfrac{2x^3-2x^3+6x^2-4x}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-4x}{x^2-3x+2}=6$

$y=2x+6$ 斜渐近线

15、凹凸性



十三、求曲线 $y=F(x)=\int_0^1(1-t)|x-t|\mathrm{d}t\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 的凹凸区间.

遇到绝对值 → 去绝对值

以x为界

$y=F(x)=\int_0^1(1-t)|x-t|dt$

$F(x)=\int_0^x(1-t)(x-t)dt+\int_x^1(1-t)(t-x)dt$

$=x\int_0^x(1-t)dt-\int_0^x t(1-t)dt+\int_x^1(1-t)t-x\int_x^1(1-t)dt$

$F'(x)=\cancel{x(1-x)}\int_0^x(1-t)dt+x(1-x)-x(1-x)-(1-x)x-\int_x^1(1-t)dt+x(1-x)$

$=\int_0^x(1-t)dt-\int_x^1(1-t)dt$

二次求导

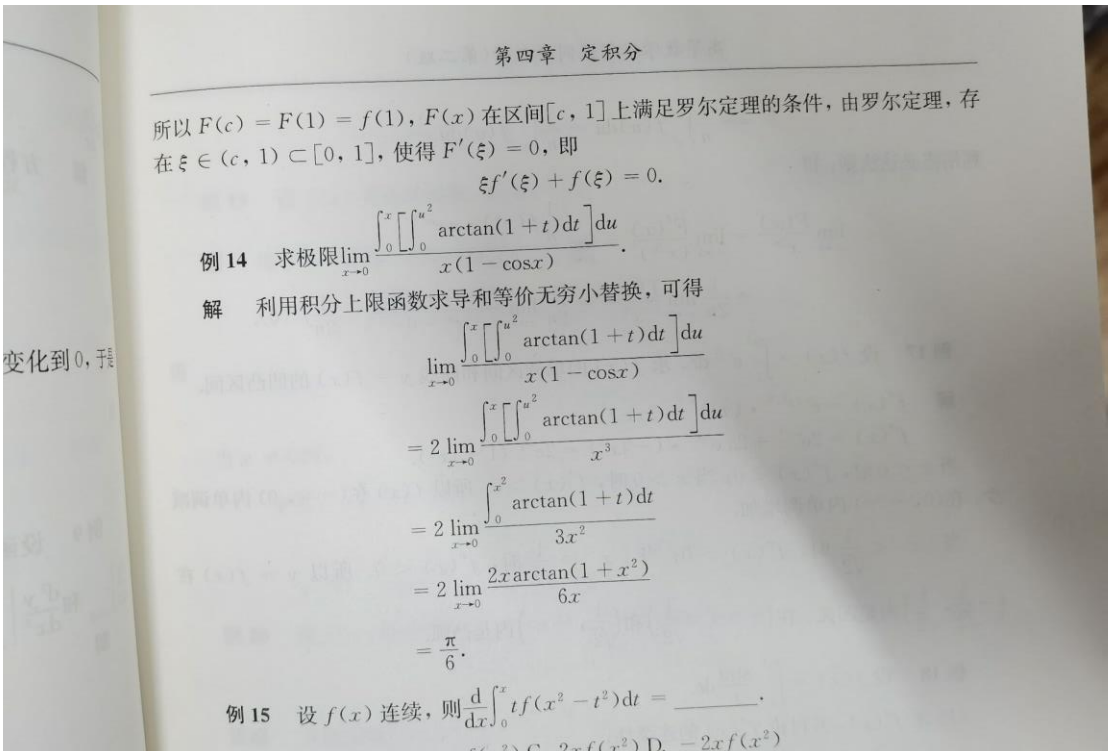
$F''(x)=1-x+1-x=2-2x$

当 $0<x\leq 1$ 时

$2-2x>0$

∴ 在[0,1]上为 凸 区间

16、洛必达法则+等价无穷小



第四章　定积分

所以 $F(c)=F(1)=f(1)$，$F(x)$ 在区间 $[c,1]$ 上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理，存在 $\xi\in(c,1)\subset[0,1]$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

例 14　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

解　利用积分上限函数求导和等价无穷小替换，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{3x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{6x}$$

$$=\frac{\pi}{6}.$$

例 15　设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$ ________.

17、分部积分＋递归

求积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx \, dx$

递推

考虑 I_n

I_{n-1}

之间关系.

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, d\sin nx$$

$$= \frac{1}{n}\left(\cos^n x \sin nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \, d\cos^n x\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \cos^{n-1} x \sin x \, dx$$

$$I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos(n-1)x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \left(\cos x \cos nx + \sin nx \sin x\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \sin nx \, dx$$

$$= I_n + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \sin nx \, dx$$

$$= 2I_n$$

$$I_n = \frac{1}{2} I_{n-1} = \frac{1}{2^2} I_{n-2} = \frac{1}{2^{n-1}} I_1$$

$$I_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_n = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

18、定积分定义

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$.

解：原式 $= e^{\int_0^1 \ln(1+x)\,dx}$

$= e^{[\ln(1+x)\cdot x - x +]}$

$= e^{-1+2\ln 2}$

一、填空题(每题 3 分，共 18 分).

1.极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+n\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)=$ ____________

19、利用性质求定积分

14. $\int_{-3}^{3}\frac{\arctan x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$； 奇函数

令 $f(x)=\frac{\arctan x}{(x^2+1)^2}$

$f(x)=-f(-x)$ 奇

$$\text{原式}=\underbrace{\int_{-3}^{0}\frac{\arctan x}{(x^2+1)^2}dx+\int_{0}^{3}\frac{\arctan x}{(x^2+1)^2}dx}_{\text{互为相反数}}$$

$=0$

20、积分中值定理

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{(\arctan x)^2}{x}\mathrm{d}x$.

解 利用积分中值定理，得

$$\int_n^{n+1}\frac{(\arctan x)^2}{x}\mathrm{d}x=\frac{(\arctan\xi_n)^2}{\xi_n}\quad(n\leqslant\xi_n\leqslant n+1).$$

再利用 $(\arctan x)^2$ 的有界性，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{(\arctan x)^2}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{(\arctan\xi_n)^2}{\xi_n}=\lim_{\xi_n\to\infty}\frac{(\arctan\xi_n)^2}{\xi_n}=0.$$

例 3 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0$.

66

21、定积分求极限

十、利用定积分计算下列极限.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[3]{1+\frac{i+1}{n}}$; =

定积分求极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[3]{1+\frac{i+1}{n}}\,\frac{1}{n}$

a —— b

$a+\frac{b-a}{n}i$

由题可 $a=1+\frac{1}{n}$

$b-a=1$

$b=2+\frac{1}{n}$

$$=\int_{1+\frac{1}{n}}^{2+\frac{1}{n}}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}+x}\,dx=\int_{1}^{2}\sqrt[3]{1+x}\,dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{4}\times3^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{4}\times2^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}(\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{16})$$

22、定积分

六、（本题满分 10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

（1）证明：$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$，

（2）计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx$.

(1) 令 $x=a+b-u$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^a f(a+b-u)\,d(a+b-u)$$

$$=-\int_b^a f(a+b-u)\,du$$

$$=\int_a^b f(a+b-u)\,du$$

(2)
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)2x}dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{(\pi-2x)x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{(\pi-2x)x}+\frac{\cos^2 x}{(\pi-2x)x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(\pi-2x)x}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x}\right)dx=\frac{\ln 2}{\pi}$$

23、偶倍积零

求 $\int_0^{2\pi} x\sqrt{1+\cos x}\,dx$　　偶倍奇零，转化成对称式

令 $t = x-\pi$　　$x = t+\pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (t+\pi)\sqrt{1+\cos(\pi+t)}\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t\sqrt{1+\cos t}\,dt + \pi\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos t}\,dt$$

$$= 0 + 2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos t}\,dt$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt$$

$$= 4\sqrt{2}\pi\,\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 4\sqrt{2}\pi\left(\sin\frac{\pi}{2}-0\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\pi$$

24、微分方程

例1. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=e^{y-x}$ 的通解

$$\frac{dy}{e^y}=\frac{dx}{e^x}$$

$$-e^{-y}=-e^{-x}+c$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{dx}$$

$$\frac{1}{e^y}dy=\frac{1}{e^x}dx$$

2. 求 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2+y^2}\\ y|_{x=1}=1\end{cases}$ 的特解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}$$

令 $u=\frac{y}{x}$

$$du=\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u^2}$$

$$\frac{x}{dx}du=\frac{-u^3}{1+u^2}$$

$$\frac{1+u^2}{u^3}du=-\frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}u^{-2}+\ln|u|=-\ln|x|+C$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2+\ln|\frac{y}{x}|=-\ln|x|+C$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2=-\ln|y|+C$$

又 $y(1)=1$

$x=1,\ y=1$

$$-\frac{1}{2}=-\ln 1+C$$

$$C=-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2=-\ln|y|-\frac{1}{2}$$

$$x^2=2y^2\ln y+y^2$$

3. 求解 $xy'\ln x+y=x(\ln x+1)$

$$x\ln x\ y'+y=x(\ln x+1)$$

$$y'+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{x\ln x+x}{x\ln x}=1+\frac{1}{\ln x}$$

$$P(x)=\frac{1}{x\ln x}\qquad Q(x)=1+\frac{1}{\ln x}$$

$$y=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}(1+\frac{1}{\ln x})dx+C\right)$$

$$=e^{-\ln\ln x}\left(\int e^{\ln\ln x}(1+\frac{1}{\ln x})dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{\ln x}\left(\int(\ln x+1)dx+C\right)$$

$$=\frac{1}{\ln x}(x\ln x+C)$$

$$=x+\frac{C}{\ln x}$$

$$xy'\ln x+y=x(\ln x+1)$$

$$y'+\frac{1}{x\ln x}y=1+\frac{1}{x\ln x}$$

$$P(x)=\frac{1}{x\ln x}\quad Q(x)=1+\frac{1}{x\ln x}$$

$$y=e$$

25、必考题型

2.设 $f(x)=(x^3e^{x^2}+1)\sin^3x+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin^3x\,dx$，求 $f(x)$

~~$f'(x)=(3x^2e^{x^2}+x^3e^{x^2}\cdot 2x)\sin^3x+3(x^3e^{x^2}+1)\sin^2x\cos x$~~

令其 $=A$　再以构造使右边 $=A$

核心

A

$f(x)=(x^3e^{x^2}+1)\sin^3x+A$

$\sin^3x\,f(x)=(x^3e^{x^2}+1)\sin^6x+A\sin^3x$

原 $A=\int_{-\pi}^{\pi}(x^3e^{x^2}+1)\sin^6x\,dx+A\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3x\,dx$ 奇

$A=\int_{-\pi}^{\pi}x^3e^{x^2}\sin^6x\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sin^6x\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6x\,dx$

奇

$=4\cdot\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{4\times5\times3}{6\times4}$

明远伴你大学四年，校内学霸每学期更新，官方 QQ：2846002427

$f(x)=(x^3e^{x^2}+1)\sin^3x+\frac{5}{8}\pi$

26、技巧题

2.设 $f(x)=e^{-x}$，则 $\int\frac{\quad}{x}dx=$ ___

3.$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，$f(x)=\frac{F(x)}{1+x^2}$，则 $f(x)=$ $\frac{e^{\arctan x+C}}{1+x^2}$　$\frac{Ce^{\arctan x}}{1+x^2}$

二、计算下列不定积分.　$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{1+x^2}$，$(\ln F(x))'=\frac{1}{1+x^2}$

1.$\int\frac{dx}{\quad}$　2.$\int\frac{dx}{\quad}$