数列的极限

一、什么是无穷数列？这样一个数列收敛的意义是什么？发散的意义呢？举几个例子.

$\{a_n\}，n=1,2,\cdots$

$\exists a，\forall \varepsilon>0，\exists N>0，\forall n>N：|a_n-a|<\varepsilon$

$\forall a，\exists \varepsilon>0，\forall N>0，\exists n>N：|a_n-a|\geq\varepsilon$

二、什么是子数列？子数列为什么是重要的？子数列有什么用途？举两个例子.

$\{a_{n_k}\}\subset\{a_n\}$　　若 $\{a_n\}$收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}b_{n_k}$

$\{b_{n_k}\}\subset\{a_n\}$　　$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}\neq\lim\limits_{k\to\infty}b_{n_k}\Rightarrow\{a_n\}$发散

三、什么是非减数列？什么是非增数列？什么是单调数列？在什么情况下这些数列有极限？各举一个例子.

单增 or 单减

$\downarrow$　　$\downarrow$

有上界　　有下界

当 $n>m$，$a_n\geq a_m$.

当 $n>m$，$a_n\leq a_m$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

四、下面 1～18 给出了数列第 n 项，哪些收敛？哪些发散？求收敛数列的极限.

1. $a_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$；

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

2. $a_n=1+\frac{1-(-1)^n}{\sqrt{n}}$；

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

3. $a_n=1+\frac{1-2^n}{2^n}$；

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

4. $a_n=1+(0.9)^n$；

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

5. $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$；

发散

取$\{a_n\}$的子列$\{a_{2k}\}$

与$\{a_{2k+1}\}$，$k=1,2,\cdots$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}=0$

$\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}=1$

故$\{a_n\}$发散.

6. $a_n=\sin n\pi$；

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

7. $a_n=\frac{\ln(n^2)}{n}$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2)}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n}$

$=0$

8. $a_n=\frac{\ln(2n+1)}{n}$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2n+1)}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1}\,\frac{2n+1}{n}$

$=0$

9. $a_n=\frac{n+\ln n}{n}$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\ln n}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln n}{n}\right)$

$=1$

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

10. $a_n=\dfrac{\ln(2n^3+1)}{n}$；

由于

$$\frac{\ln(2n^3)}{n}<\frac{\ln(2n^3+1)}{n}<\frac{\ln(3n^3)}{n}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(2n^3)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln2+3\ln n}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(3n^3)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln3+3\ln n}{n}=0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2n^3+1)}{n}=0$

11. $a_n=\left(\dfrac{n-5}{n}\right)^n$；

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-5}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^{\left(-\frac{n}{5}\right)\cdot(-5)}$$

$$=e^{-5}$$

12. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$；

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot(-1)}$$

$$=e^{-1}$$

13. $a_n=\sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n}}$；

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[n]{n}}$$

$$=3$$

14. $a_n=\left(\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$；

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}}$$

$$=1$$

超纲，需要用洛必达法则

$\boxed{15.}$ $a_n=n(2^{\frac{1}{n}}-1)$；

$$\lim_{n\to\infty}n(2^{\frac{1}{n}}-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

考察极限

$$\lim_{t\to0}\frac{2^t-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}2^t\ln2=\ln2$$

故由Heine定理

$$\lim_{n\to\infty}n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\ln2$$

16. $a_n=\sqrt[n]{2n+1}$；

$$\sqrt[n]{2n}<\sqrt[n]{2n+1}<\sqrt[n]{3n}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}=1$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}=1$

17. $a_n=\dfrac{(n+1)!}{n!}$；

由于 $\dfrac{(n+1)!}{n!}=n+1$

故 $\{a_n\}$ 发散

18. $a_n=\dfrac{(-4)^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-4)^n}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{4^n}{n!}$$

其中 $\{(-1)^n\}$ 有界，且

$$0<\frac{4^n}{n!}=\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{4}{n}$$

$$<\left(\frac{32}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{n!}=0$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-4)^n}{n!}=0$

学院______ 姓名______ 学号______ 教师______

五、若 a 是常数，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\cos\frac{a}{n}}{n}\right)^n$ 的值是否依赖于 a 的值？如果是，如何依赖？

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{\cos\frac{a}{n}}{n}\right]^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{\cos\frac{a}{n}}{n}\right]^{\frac{n}{\cos\frac{a}{n}}\cdot\cos\frac{a}{n}}$

$=\dfrac{1}{e}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{\cos\frac{a}{n}}{n}\right]^n$ 不依赖于 a.

六、若 a 和 b 是常数，$b\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{\cos\frac{a}{n}}{bn}\right)^n$ 的值是否依赖于 b 的值？如果是，如何依赖？

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{\cos\frac{a}{n}}{bn}\right]^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{\cos\frac{a}{n}}{bn}\right]^{\frac{bn}{\cos\frac{a}{n}}\cdot\frac{\cos\frac{a}{n}}{b}}$

$=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{b}}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\dfrac{\cos\frac{a}{n}}{bn}\right]^n$ 依赖于 b

七、证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N'>0$，当 $n>N'$ 时

$|x_n-a|<\varepsilon$

取 $N=N'$，则当 $n>N$ 时，

$\big||x_n|-|a|\big|\le|x_n-a|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$

八、求下列数列的极限.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000n}{n^2+1}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+\frac{1}{n}}$$

$$=0$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$　$(|a|<1,|b|<1)$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-a^n}{1-a}}{\frac{1-b^n}{1-b}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1-b^n}\cdot\frac{1-b}{1-a}$$

$$=\frac{1-b}{1-a}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$;

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\frac{5^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$;

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}-\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{8}{3}n^3-\frac{4}{3}n^3}{n^3}=\frac{4}{3}$$

$$1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=1^2+2^2+\cdots+(2n)^2-\left[2^2+4^2+\cdots+(2n)^2\right]$$

$$1^2+2^2+\cdots+(2n)^2 \Downarrow \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}$$

$$2^2+4^2+\cdots+(2n)^2 \Downarrow 4\left[1^2+2^2+\cdots+n^2\right] \Downarrow \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}+3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$ (提示:考虑 $2x_n-x_{n-1}$);

$$x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$$

$$2x_{n+1}=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}+\frac{2n+1}{2^n}$$

$$2x_{n+1}-x_n=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=2+\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

上式两端令 $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdots\frac{n^2-1}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\times3}{2^2}\cdot\frac{2\times4}{3^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$

$=\frac{1}{2}$

九、设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，且 $a_k>0\ (k=1,2,\cdots,m)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$.

由于 $\sqrt[n]{A^n}<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}<\sqrt[n]{nA^n}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n}=A$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{nA^n}=\lim\limits_{n\to\infty}A\sqrt[n]{n}=A$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$

十、利用单调有界性证明下列数列收敛.

1. $x_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$;

x_n 显然关于 n 单调递增，且

$x_n<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{2}$

故 $\{x_n\}$ 收敛.

学院________ 姓名________ 学号________ 教师________

2. $x_n = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+1}$;

x_n 显然关于 n 单调递增，且

$x_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 1} + \cdots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} < \frac{5}{4}$

故 $\{x_n\}$ 收敛.

3. $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ （提示：利用不等式 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$）；

x_n 显然关于 n 单调递增，且

$\ln x_n = \ln(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1$

从而 $x_n < e$

故 $\{x_n\}$ 收敛

4. $x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

x_n 显然关于 n 单调递减，且易知 $x_n > 0$

故 $\{x_n\}$ 收敛.