学院＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿＿　教师＿＿＿＿＿＿

单元测验

一、填空题(每小题 3 分,共 15 分).

1. 曲线 $y=x+\arctan x$ 上平行于 $y=\frac{3}{2}x+1$ 的切线方程为 $y-(1+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{2}(x-1)$, $y+1+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}(x+1)$

2. $y=A\arctan x+\frac{1}{x}$ 的导数 $y'<0$,则 A 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

3. 由 $\begin{cases} x=1-t^3, \\ y=t^4 \end{cases}$ 确定的函数 $y=y(x)$ 在 x 的区间 $(1,+\infty)$ 上有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$.

4. 椭圆 $4x^2+3y^2=16$ 在点 $(-1,2)$ 处与切线垂直且方向向外的单位向量坐标为 $\left(\frac{-2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

5. $f(x)=(x^2-1)^n\arctan x$ 在 $x=1$ 处 n 阶导数 $f^{(n)}(1)=$ $\frac{\pi 2^n n!}{4}$.

二、选择题(每小题 3 分,共 15 分).

1. $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处切线存在是 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导的(B)条件.

A. 充分　　B. 必要　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

2. 下面(C)存在是 $f'(x_0)$ 存在的充要条件.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0+x^2)-f(x_0)}{x^2}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-x)}{x}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0+\sin x)-f(x_0)}{\ln(1+x)}$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\frac{1}{n}}$($n$ 是自然数)

3. $y=f(u)$,$u=g(x)$,$u_0=g(x_0)$,$f(u)$在 u_0 可导且 $g(x)$在 x_0 处可导是复合函数 $y=f(g(x))$在 x_0 处可导的(A)条件.

A. 充分　　B. 必要　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

4. $f''(x_0)$存在且不为 0,则(B).

A. $f'(x)$未必在 x_0 处连续

B. $f(x)$必在 x_0 的某邻域内可导

C. $f''(x)$在 x_0 处必连续

D. $y=f(x_0+|x|)$在 $x=0$ 处也能二阶可导

5. $y=x^{x^2}$,则 $y'=$(D).

A. x^{x^2+1}　　B. $x^{x^2}\ln x$　　C. $x^{x^2+1}+x^{x^2}\ln x$　　D. $2x^{x^2+1}\ln x+x^{x^2+1}$

三、计算下列各题(每小题 8 分,共 32 分).

1. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2(1-x)^5}{e^{x^2}(x-2)}}$,求 y'.

$y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2(1-x)^5}{e^{x^2}(x-2)}}\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{1-x}-2x-\frac{1}{x-2}\right)$

2. $y=(x^2-1)\arctan x$,求 $y^{(n)}(0)$.

$y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & n=2k, k=0,1,2,\cdots \\ (-1)^{k-1}(2k+1)!\frac{4k}{4k^2-1}, & n=2k+1, k=0,1,\cdots \end{cases}$

3. 已知 $f(t)$二阶可导且 $f'(t)\neq 0$,参数方程 $\begin{cases} x=f(t), \\ y=tf(t), \end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f(t)+tf'(t)}{f'(t)}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t+\frac{f(t)}{f'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{f'(t)}-\frac{f(t)f''(t)}{(f'(t))^3}$

4. $y=y(x)$由方程$xy^3+e^x=y$决定.

(1)求$x=0$对应点处的切线、法线方程. 切线方程: $y=2x+1$, 法线方程: $y=-\frac{1}{2}x+1$

(2)求$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$. $y''(0)=13$

四、解答题(每小题 10 分,共 30 分).

1. $f(x)$在$x=0$处可导且$f'(0)=\ln 2$,且对任意的$x,y\in\mathbf{R}$有$f(x+y)=f(x)f(y)$,求$f(x)$. $f(x)=2^x$

2. 分别作出一个函数$f(x)$,$g(x)$满足:$f(x)$,$g(x)$定义域为实数集$\mathbf{R}$,$f(x)$在任意点不可导,$g(x)$只在一点可导,但$f(g(x))$在$\mathbf{R}$上均可导.

$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{为无理数}\\ 1, & x\text{为有理数}\end{cases}$. $g(x)=\begin{cases}0, & x\text{为无理数}\\ x^2, & x\text{为有理数}\end{cases}$

3. 已知$f(x)$在$x=0$,$x=2$处均可导,且$f(0)=1$,$f(2)=3$,$f'(0)=1$,$f'(2)=3$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{3f(x)}{f(2+x)}}{x}$. $=0$

五、应用题(8 分).

甲、乙两人从同点分别朝东、北两方向跑去,甲每分钟跑$\frac{400}{3}$米,乙的路程y与时间t关系为$y=100t(4-t)$,求他们跑出 3 分钟时距离的变化率.

$S(t)=\sqrt{\left(\frac{400}{3}t\right)^2+\left(100t(4-t)\right)^2}\Rightarrow\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=3}=8520\ m/min$.