中值定理

一、证明：$\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$，其中 $a > 1, n \geqslant 1$.

令 $f(x)=a^x$，于是 $\exists \xi \in (\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$ 使 $f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})=a^\xi \ln a(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=a^\xi \frac{\ln a}{n(n+1)}$

从而 $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} = a^\xi \dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

二、对 $f(x) = x^3$ 在$[-2,3]$上求出满足拉格朗日中值定理的 ξ.

$3\xi^2 = f'(\xi) = \dfrac{27+8}{3+2} = 7$

于是 $\xi = \pm\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

三、$f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上可导，则 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)\sin 2\xi + 2f(\xi)\cos 2\xi = 0$.

令 $g(x)=f(x)\sin 2x$，由于 $g(0)=g(\frac{\pi}{2})$，故由Rolle中值定理

$\exists \xi \in (0,\frac{\pi}{2})$ 使 $g'(\xi)=f'(\xi)\sin 2\xi+2f(\xi)\cos 2\xi=0$

四、$f(x)$ 可导，$1 < f(x) < 4$，$f'(x) \neq 2x$，则方程 $f(x) = x^2$ 在$(1,2)$内有且仅有一根.

令 $g(x)=f(x)-x^2$，由于 $g(1)=f(1)-1>0$，$g(2)=f(1)-4<0$

故由零点存在定理，$\exists \xi \in (1,2)$ 使 $g(\xi)=f(\xi)-\xi^2=0$

若还有 $\tilde{\xi} \in (1,2)$ 使 $g(\tilde{\xi})=0$，不妨令 $\xi<\tilde{\xi}$，则由 Rolle 中值定理，

$\exists \eta \in (\xi,\tilde{\xi})$ 使 $g'(\eta)=f'(\eta)-2\eta=0$，这与 $f'(x)\neq 2x$ 矛盾.

从而 $f(x)=x^2$ 内有且仅有一根.

学院＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　教师＿＿＿＿

五、$f(x)$ 为可导函数，$f(0)=1$，$f'(x)=2f(x)$，证明：$f(x)=e^{2x}$.

$f'(x)-2f(x)=0 \Rightarrow e^{-2x}f(x)-2f(x)e^{-2x}=0 \Rightarrow \left(f(x)e^{-2x}\right)'=0$

令 $g(x)=f(x)e^{-2x}$，由 lagrange 中值定理.

$g(x)-g(0)=0(x-0)=0 \Rightarrow g(x)=g(0)=f(0)=1$

故 $f(x)=e^{2x}$

六、$f(x)$ 二阶可导，$F(x)=(x-a)^2f(x)$，$f(b)=0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F''(\xi)=0$.

易得 $F(a)=F(b)=0$，故由 Rolle 中值定理，$\exists\xi_0\in(a,b)$ 使

$F'(\xi_0)=0$. 又 $F'(x)=2(x-a)f(x)+(x-a)^2f'(x)$，故 $F'(a)=0$

由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(a,\xi_0)\subset(a,b)$ 使 $F''(\xi)=0$

七、$f(x)$ 可导函数，求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)f(1-\xi^2)=2\xi f(\xi)f'(1-\xi^2)$.

令 $g(x)=f(x)f(1-x^2)$

由于 $g(0)=f(0)f(1)=g(1)$

于是由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(0,1)$ 使

$g'(\xi)=f'(\xi)f(1-\xi^2)-2\xi f(\xi)f'(1-\xi^2)=0$

洛必达法则

一、求下列各极限.

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{e^x-x-1}$；

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{1}{x+1}}{e^x-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{(x+1)^2e^x}$

$=1$

2. $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$；

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u}$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}e^u$

$=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$；

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x+\ln x}{(1-x)\ln x}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1+\frac{1}{x}}{-\ln x+\frac{1-x}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$

$=\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$；

$=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}{\frac{1}{x}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)(1+x^2)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{-1+2x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{-1+2}}=\dfrac{1}{e}$

5. $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$；

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-(\frac{1}{1+x})^2}{2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$.

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}}$

$=e^{\frac{\ln(a_1\cdot a_2\cdots a_n)}{n}}$

$=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

二、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$，$f''(0)$.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2},\quad f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x-e^x+1-\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{3}=\frac{1}{3}$$

三、已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\ln x-ax+2}{1+\cos(\pi x)}=b$，求 a,b.

由于 $\lim\limits_{x\to1}(1+\cos(\pi x))=0$，故 $\lim\limits_{x\to1}(2\ln x-ax+2)=0$

从而 $a=2$

$$b=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2}{x}-2}{-\pi\sin(\pi x)}=\lim_{x\to1}\frac{-\frac{2}{x^2}}{-\pi^2\cos(\pi x)}=\frac{-2}{\pi^2}$$

四、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-\cos x}{x}, & x>0,\\ ax^2+bx+c, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处二阶可导.

1. 求 a,b,c 的值；
2. 求 $f''(x)$.

1、由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x+\sin x)=1=c$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-\cos x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+\sin x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+\cos x}{2}=1=b$. 又当 $x>0$ 时

$f'(x)=\dfrac{x(e^x+\sin x)-e^x+\cos x}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xe^x+x\sin x-e^x+\cos x-x^2}{x^3}=\dfrac{1}{3}=2a\Rightarrow a=\dfrac{1}{6}$

2. $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-2x+2)e^x+x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x}{x^3}, & x>0,\\ \dfrac{1}{3}, & x\leq 0\end{cases}$

附加题：已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+e^{nx})^{\frac{\sin x}{n}}$.

1. 问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导？
2. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x^2-1}{e^x-e^{-x}-2x}$.

1、当 $x>0$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\sin x\ln(1+e^{nx})}{n}}=e^{\sin x\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+e^{nx})}{n}}=e^{x\sin x}$

当 $x=0$ 时 $f(x)=1$，当 $x<0$ 时 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+e^{nx})^{e^{-nx}\frac{\sin x}{n}e^{nx}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x\, e^{nx}}{n}}=1$

于是 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\sin x}(\sin x+x\cos x)=0$

$f'_-(0)=0$，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

2、$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{x\sin x}-x^2-1}{e^x-e^{-x}-2x}=0$　　$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x^2}{e^x-e^{-x}-2x}=+\infty$