5. Transformações lineares

5. 1. Determine se a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada é ou não linear. Em caso afirmativo, calcule a matriz que a representa em relação à base dos vectores coordenados unitários.

(a) $T(x, y, z) = (y, z, x)$
(b) $T(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$
(c) $T(x, y, z) = (y - z, x - z, 0)$
(d) $T(x, y, z) = (0, y, e^z)$
(e) $T(x, y, z) = (2x - y + 3z, y + 2z, -2z)$

5. 2. Considere a transformação $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que roda cada ponto do plano por um ângulo fixo θ em torno da origem no sentido directo.

a) Verifique que T_θ é uma transformação linear.

b) Calcule a matriz que representa T_θ em relação à base dos vectores coordenados unitários.

c) *Sem realizar cálculos,* indique a matriz que representa $(T_\theta)^{-1}$.

d) Usando a alínea b) e a correspondência entre composição de transformações lineares e produto de matrizes, represente matricialmente a relação $T_\phi \circ T_\theta = T_{\theta+\phi}$. Que fórmulas suas conhecidas ficam assim demonstradas ?

5. 3. Construa geometricamente a imagem do rectângulo $ABCDE$ da figura 1 por efeito da transformação linear representada, na base canónica, por cada uma das seguintes matrizes:

a) A rotação $R_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) A rotação $R_{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) A "distorção"$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.

d) A transformação de Lorentz $L_2 = \begin{bmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{bmatrix}$.

e) A transformação de corte $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

f) A transformação de corte $S_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$.

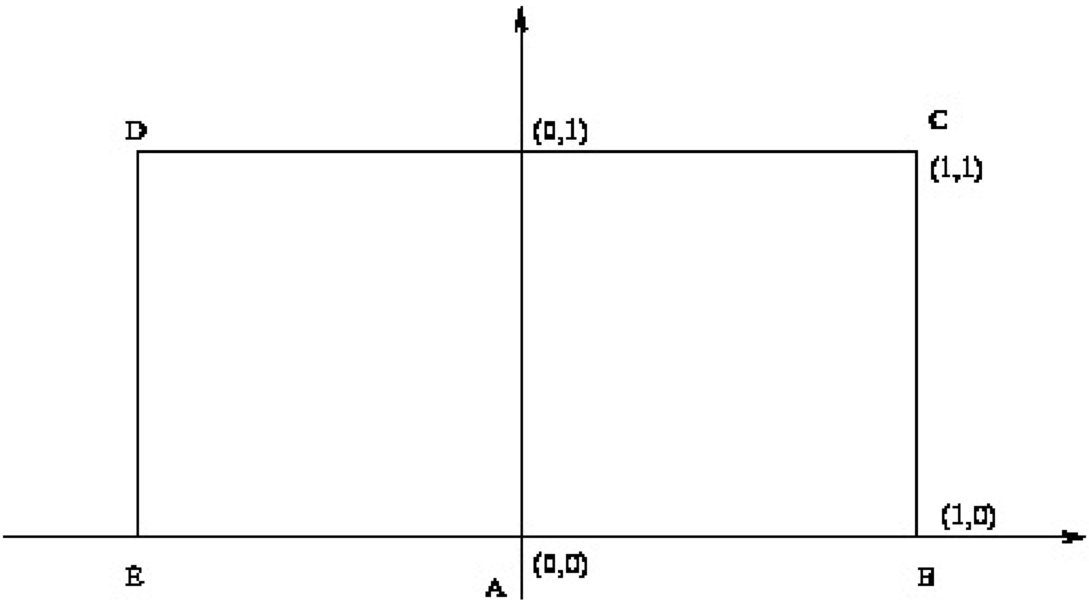

Figura 1: *Rectângulo ABCDE cujas imagens se pretende construir (problema 3).*

g) A reflexão $E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

h) A reflexão $E_{\pi/4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

i) A projecção $P_{\pi/4} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

j) A transformação nilpotente $N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

k) A transformação nilpotente $N_{\pi/4} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

5. 4. Considere, no plano $\mathbb{R}^2$, as transformações lineares R, rotação em torno da origem no sentido inverso por um ângulo de $\pi/2$, e E, reflexão no eixo dos yy.

a) Calcule, em relação a bases à sua escolha, as matrizes A_R e A_E que representam respectivamente R e E.

b) Mostre, a partir de a), que $R \circ E \neq E \circ R$.

c) Represente geometricamente os vectores da base canónica e os seus transformados através de $R \circ E$ e de $E \circ R$.

5. 5. Construa, para cada uma das seguintes transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, a matriz que a representa na base canónica:

a) Reflexão do vector $[x, y, z]^t$ no plano yz.

b) Rotação do vector $[x, y, z]^t$ por um ângulo θ em torno do eixo yy', no sentido directo quando observado dos yy positivos.

c) Projecção do vector $[x, y, z]^t$ no plano yz.

5. 6. Considere, no espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, as bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, base canónica, e $\mathcal{B}_2 = \{[-1\ 1\ 1]^t, [-1\ \ -1\ 1]^t, [0\ 0\ 1]^t\}$.

a) Determine a matriz S que realiza a mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$.

b) Dado um vector $u = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$, isto é, de coordenadas $[x_1\ x_2\ x_3]^t$ na base $\mathcal{B}_1$, determine as suas coordenadas $[y_1\ y_2\ y_3]^t$ na base $\mathcal{B}_2$ **(Sugestão:** Inverta S).

c) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial na base canónica é

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Usando os resultados de a) e b), determine a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_2$.

5. 7. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço linear real dos polinómios de grau ≤ 2, e $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por $T(1+t^2) = 2t,\ \ T(t^2) = 2t,\ \ T(1+t) = 1$.

a) Determine a matriz A que representa T na base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Determine a matriz B que representa T na base ordenada $\{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$. Indique a matriz de mudança de base S tal que $B = S^{-1}AS$.

5. 8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(z_1, z_2) = (z_1 + z_2,\ i\, z_2)$. Determine as representações matriciais de T:

a) na base canónica de $\mathbb{C}^2$ $\mathcal{B} = \{(1,\ 0),\ (0,\ 1)\}$;

b) na base $\mathcal{B}' = \{(-1 - i,\ 2),\ (1, 0)\}$.

Qual das representações lhe parece mais agradável? Porquê?

5. 9. Como sabe, uma transformação linear $T : V \to W$ entre espaços de dimensão finita, fixas bases em V e W, é univocamente determinada por uma matriz A_T.

Construa bases para os espaços imagem e núcleo, indicando as respectivas dimensões, quando A_T é dada por cada uma das matrizes abaixo. Em cada caso, verifique o teorema da dimensão.

$$a)\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 5 & -5 \\ 6 & 11 & -7 \end{bmatrix} \quad b)\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c)\ \ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. 10. Seja P_n o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a n.

(a) Mostre que a transformação $T : P_3 \to P_3$ definida por

$$T(p) = p'' + ap' + bp,$$

onde a e b são números reais, é uma transformação linear.

(b) Determine a representação matricial para T em relação à base ordenada $\{1, t, t^2, t^3\}$.

(c) Discuta a dimensão do núcleo de T em termos de a e b. Em cada caso, indique uma base para o núcleo.

(d) Utilize os resultados da alínea anterior para determinar as soluções em P_3 da equação diferencial

$$p'' + ap' + bp = 0.$$

(e) Utilize os resultados da alínea (c) para determinar todas as soluções em P_3 da equação diferencial

$$p'' + ap' + bp = 1 - t^2.$$

5. 11. Seja V o espaço linear real das matrizes reais de 2×2 de entradas a_{ij} satisfazendo $a_{11} + a_{22} = 0, a_{12} + a_{21} = 0$, e considere as seguintes matrizes de V:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que H e J são linearmente independentes. Determine a dimensão e indique uma base para V.

(b) Dada a transformação linear $T : V \to V$ definida através das seguintes relações:

$$T(H) = J \ , \ T(J) = -H$$

determine a matriz que representa T em relação a uma base contendo H e J.

(c) Determine a característica e a dimensão do núcleo de T, e indique justificadamente se é invertível.

(d) Calcule todas as soluções U da equação linear $T(U) = B$ onde $B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -a \end{bmatrix}$.

5. 12. Seja V um espaço linear de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear de V em V. Pode T ser injectiva mas não sobrejectiva? Pode T ser sobrejectiva mas não injectiva?

5. 13. A Teoria da Relatividade Restrita afirma que a relação entre as coordenadas espacio-temporais (x, y, z, t) e (x', y', z', t') de dois referenciais de inércia que se deslocam um em relação ao outro com velocidade v é dada por

$$\begin{cases} x' &= \beta(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \beta(t - \frac{v}{c^2}x), \end{cases}$$

onde c é a velocidade da luz, $|v| < c$ e $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. A transformação linear que passa dos sistemas de coordenadas (x, t) para (x', t') chama-se *transformação de Lorentz.*

a) Determine a matriz L_v que representa a transformação de Lorentz na base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Mostre que $L_0 = I$ e que L_v é não-singular.

c) Demonstre a *lei relativística de adição das velocidades:* $L_v\, L_u = L_w$, onde $w = \dfrac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$. Compare com o resultado clássico e comente.