Зимний коллоквиум по курсу «Теории вероятностей и математическая статистика»

hse-ami-open-exams

Содержание

1 Вероятностное пространство. Сигма алгебра событий. Борелевская сигма алгебра. Вероятностная мера. Непрерывность вероятностной меры.

1.1 Вероятностное пространство.

Определение 1. *Набор* (Ω, A, P)*, где* Ω *– множество элементарных исходов,* A *–* σ*-алгебра, а* P *– вероятностная мера, называется вероятностным пространством.*

Определение 2. *Класс множеств, который содержит* $\varnothing$ *и* Ω*, замкнутый относительно операций* $\cap$ *и* $\cup$*, содержит вместе с каждым множеством его дополнение и называется* ***алгеброй множеств*** *или* ***алгеброй событий****.*

1.2 Сигма алгебра событий.

Определение 3. *Если алгебра событий замкнута относительно счетных объединений и пересечений, то ее называют* σ*-алгеброй.*

1.3 Борелевская сигма алгебра.

Определение 4.

- *Борелевская* σ*-алгебра – минимальная* σ*-алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства.*
- *Борелевская* σ*-алгебра* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *–* σ*-алгебра, порожденная отрезками/интервалами/полуинтервалами.*

1.4 Вероятностная мера.

Пусть A – σ-алгебра.

Определение 5. *Функция* $P : A \to [0, 1]$ *называется* ***вероятностной мерой****, если*

- $P(\Omega) = 1$
- *Для любого набора попарно непересекающихся событий* $\{A_n\} \in A$ *выполняется* $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$.

1.5 Непрерывность вероятностной меры.

Теорема 1. *Пусть* (Ω, A, P) *– вероятностное пространство. Тогда*

1. *Если* $\{A_n\} \in A, A_n \subset A_{n+1}$ *и* $A = \bigcup_n A_n$*, то* $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.
2. *Если* $\{A_n\} \in A, A_{n+1} \subset A_n$ *и* $A = \bigcap_n A_n$*, то* $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

Доказательство.

1. Пусть $C_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n, C_1 = A_1$. Тогда $A = \bigcup_n C_n$ и $A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^n C_k$. По своству аддитивности вероятностной меры P получаем:

$$P(A) = \sum_n P(C_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(C_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_{n+1}).$$

2. Пусть $A'_n = \Omega \setminus A_n$. Тогда по закону де Моргана получаем первый пункт.

$\square$

2 Случайная величина и ее распределение. Функция распределения случайной величины. Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.

2.1 Случайная величина и ее распределение.

Пусть (Ω, A, P) – вероятностное пространство.

Определение 6. *Случайной величиной называется функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, такая что*

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in B\} \in A$$

для всякого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Определение 7. *Распределением случайной величины ξ называется вероятностная мера μ_ξ на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, определяемая равенством $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*

$$\mu_\xi(B) = P(\{w \mid \xi(w) \in B\}) = P(\xi^{-1}(B)).$$

2.2 Функция распределения случайной величины.

Определение 8. *Функцией распределения F_ξ вероятностной меры μ_ξ называется функцией распределения случайной величины ξ, то есть*

$$F_\xi(t) = \mu_\xi((-\infty, t]) = P(\{w \mid \xi(w) \leqslant t\}),$$

мера μ_ξ показывает с какой вероятностью ξ принимает те или иные значения.

2.3 Совместное распределение двух случайных величин.

Пусть ξ и η – случайные велечины.

Определение 9. *Отображение $w \mapsto (\xi(w), \eta(w))$ определяет вероятностную меру $\mu(B) = P(\{w|(\xi(w), \eta(w)) \in B\})$ – совместное распределение случайных величин ξ и η:*

$$F(x, y) = \mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = P(\{w \mid \xi(w) \leqslant x \wedge \eta(w) \leqslant y\}).$$

2.4 Свойства функции распределения.

Теорема 2. *Если F – функция распределения, то*

1. $0 \leqslant F \leqslant 1$
2. *F неубывает*
3. *F непрерывна справа, т.е. $\lim_{t \to s+} F(t) = F(s)$*
4. *$\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ и $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$*

Доказательство.

1. Очевидно, т.к. $0 \leqslant P \leqslant 1$
2. $b > a \Rightarrow F(b) - F(a) = P(a < \xi \leqslant b)$
3. Найдем $\lim_{t \to s+} F(t)$. Пусть $A_n = \left(-\infty, s + \frac{1}{n}\right], A_{n+1} \subset A_n, \bigcap_n A_n = (-\infty, s]$. Из непрерывности меры μ следует, что
$$\mu(A_n) \to \mu\left(\bigcap_n A_n\right) \Rightarrow F\left(s + \frac{1}{n}\right) \to F(s).$$
4. Доказывается аналогично 3 свойству.

□

3 Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

3.1 Независимые случайные величины.

Определение 10. *Случайные величины ξ и η называются независимыми, если для всяких промежутков U и V выполняется равенство*

$$P(\{w \mid \xi(w) \in U \wedge \eta(w) \in V\}) = P(\{w \mid \xi(w) \in U\}) \cdot P(\{w \mid \eta(w) \in V\}), \text{ то есть } \mu_\xi(U) = \mu_\eta(V).$$

3.2 Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей.

Теорема 3. *Случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда $F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$.*

Доказательство. Совместное распределение оддному определяется функцией распределения F. Если F совпадает с функцией распределения меры $\mu_\xi \times \mu_\eta$, то меры совпадают. $\square$

Теорема 4. *Пусть распределения ξ и η заданы плотностями. Тогда независимость ξ и η равносильна тому, что совместное распределение задано плотностью*

$$\rho(x, y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y).$$

Доказательство. По теореме Фубини:

$$\int\limits_a^b \rho_\xi(x)dx \cdot \int\limits_c^d \rho_\eta(x)dy = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \rho_\xi(x)\rho_\eta(y)dxdy = \mu([a, b] \times [c, d]).$$

$\square$

3.3 Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

Теорема 5. *Пусть ξ и η независимы и их распределение задано плотностями. Тогда распределение суммы $\nu = \xi + \eta$ задано плотностью*

$$\rho_\nu(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(t)\rho_\eta(x - t)dt.$$

Доказательство.

$$F_\nu(t) = P(\{w|\xi(w)+\eta(w) \leqslant t\}) = \iint\limits_{x+y\leqslant t} \rho_\xi(x)\rho_\eta(y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{t-x} \rho_\xi(x)\rho_\eta(y)dy \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{t-x} \rho_\eta(y)dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x) \left(\int\limits_{-\infty}^{t} \rho_\eta(v - x)dv \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)\rho_\eta(v - x)dv \right) dx$$

$\square$

4 Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства: линейность, монотонность, неравенство Чебышева. Математическое ожидание произведения независимых величин.

4.1 Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства.

Пусть ξ – случайная дискретная величина на (Ω, A, P), принимающая значения $\{x_1, ..., x_n\}$. Положим $A_i = \xi^{-1}(\{x_i\})$. Тогда

$$\xi = x_1 \mathbb{I}_{A_1} + ... + x_n \mathbb{I}_{A_n}.$$

Определение 11. *Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число*

$$E\xi = x_1 P(A_1) + ... + x_n P(A_n).$$

Теорема 6.

1. *$E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta$*
2. *Если $\xi \geqslant \eta$ почти наверняка, то $E\xi \geqslant E\eta$.*
3. *Если $\xi \geqslant 0$, то для любого $C > 0$ верно $P(\xi \geqslant C) \leqslant \frac{E\xi}{C}$*

Доказательство.

1. Следует из определения математического ожидания дискретной случайной величины и разложения случайной величины в сумму произведений значений и индикаторов.
2. $0 \leqslant E(\eta - \xi) = E\eta - E\xi \Rightarrow E\eta \geqslant E\xi$
3. Пусть $A = \{w \mid \xi \geqslant C\}$. Тогда
$$\xi \geqslant C \cdot \mathbb{I}_A.$$
Неравенство выполняется для любых значений $\mathbb{I}_A$. Применив свойства монотонности и линейности получим:
$$E\xi \geqslant CE\mathbb{I}_A = CP(A) \Rightarrow \frac{E\xi}{C} \geqslant P(A).$$

□

4.2 Математическое ожидание произведения независимых величин.

Теорема 7. *Если случайные величины ξ и η независимы, то $E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$.*

Доказательство. Разложим ξ и η в сумму произведений значений и индикаторов:

$$\xi = \sum_i a_i \mathbb{I}_{A_i}, \eta = \sum_j b_j \mathbb{I}_{B_j} \Rightarrow \xi \cdot \eta = \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{I}_{A_i \cap B_j} \Rightarrow E(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j} a_i b_j P(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} a_i b_j P(A_i) P(B_j) = E\xi \cdot E\eta$$

□

5 Общее определение математического ожидания и его корректность. Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.

5.1 Общее определение математического ожидания и его корректность.

Теорема 8. *Для любой случайной величины ξ существует последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ такая, что $\xi_n \rightrightarrows \xi$ на Ω.*

Доказательство. Пусть $\xi_n = 10^{-n} \cdot \lfloor 10^n \cdot \xi \rfloor$. Тогда $\sup |\xi_n - \xi| \leqslant 10^{-n} \to 0$. □

Определение 12. *Пусть множество значений $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ дискретной случайной величины ξ бесконечно. Положим $A_i = \xi^{-1}(\{x_i\})$. Будем говорить, что у ξ существует конечное математическое ожидание если ряд $E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(A_k)$ сходится абсолютно.*

Доказательство корректности. Так как перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не влияет на сходимость и сумму ряда, а произведение абсолютно сходящихся рядов сходится к произведению их сумм, то все свойства математического ожидания будут выполняться и для суммы этого ряда. □

5.2 Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.

Теорема 9. *Пусть φ – кусочно-непрерывная функция на $\mathbb{R}$ и $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – случайная величина, распределение которой задано плотностью ρ_ξ, тогда*

$$\exists E(\varphi(\xi)) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)\rho_\xi(x)| dx \text{ сходится.}$$

В случае сходимости

$$E(\varphi(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\rho_\xi(x) dx.$$

Доказательство. Докажем для кусочно-постоянных функций. Пусть f – кусочно-постоянная функция, а это значит, что $f(\xi)$ – дискретная величина, тогда

$$E(f(\xi)) = \sum_n C_n P(A_n) = \sum_n C_n \int_{\Delta n} \rho_\xi(x) dx = \sum_n \int_{\Delta n} f(x)\rho_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_\xi(x) dx.$$

В общем случае мы можем разбивать числовую прямую на счетное число промежутков таким образом, чтобы каждое такое разбиение задавало кусочно-постоянную функцию $f_n(x)$, и при этом $f_n(\xi) \rightrightarrows \varphi(\xi)$, тогда получим то же утверждение для кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$. □

6 Дисперсия и ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, геометрический смысл.

6.1 Дисперсия и ее свойства.

Определение 13. *Дисперсией случайной величины ξ называют число*

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2.$$

Утверждение 1. *Дисперсия может быть вычислена по формуле*

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

Доказательство. Следует из линейности математического ожидания. □

Утверждение 2. *При умножении случайной величины на константу c дисперсия увеличивается в c^2 раз.*

Доказательство. Следует из линейности математического ожидания. □

Утверждение 3. *Дисперсия всегда неотрицательна.*

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение 4. *$D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = const$ почти наверняка.*

Доказательство. Очевидно, т.к. если $D\xi = 0$, то $\xi = E\xi$ почти наверняка. □

Утверждение 5. *Если случайные величины независимы, то дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий.*

Доказательство. Следует из того, что математическое ожидание произведения независимых величин равна произведению математических ожиданий этих величин. □

Утверждение 6. *Дисперсия не зависит от сдвига случайной величины на константу.*

Доказательство. Следует из предыдущего утверждения. □

Утверждение 7. *Для дисперсии справедливо неравенство Чебышева.*

Доказательство. Следует из того, что дисперсия является математическим ожиданием. □

6.2 Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин.

Определение 14. *Ковариацией $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η называется число*

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)).$$

Она существует если существуют $D\xi$ и $D\eta$.

Определение 15. *Коэффициентом корреляции $\rho(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η, дисперсии которых отличны от 0, называется число*

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\xi}}.$$

6.3 Геометрический смысл коэффициента корреляции двух случайных величин.

Ковариация – "скалярное произведение а коэффициент корреляции – "косинус угла".

7 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.

7.1 Равномерное распределение.

ξ имеет равномерное распределение на $[a, b]$, если

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей равномерное распределение:

$$E(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\rho_\xi(x)dx = \int\limits_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$$

$$E(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\rho_\xi(x)dx = \int\limits_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \quad \Rightarrow \quad D(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

7.2 Показательное распределение.

ξ имеет показательное распределение, если

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей показательное распределение:

$$E\xi^k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k\rho_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{k!}{\lambda^k} \Rightarrow E\xi = \frac{1}{\lambda}, D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

7.3 Нормальное распределение.

ξ имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ, если

$$\rho_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad E\xi = \mu, \quad D\xi = \sigma^2$$

8 Закон больших чисел в слабой форме. Метод Монте-Карло.

8.1 Закон больших чисел в слабой форме.

Теорема 10. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *– последовательность независимых случайных величин таких, что* $E\xi_n^2 < \infty$. *Обозначим* $E\xi_n = \mu_n$ *и* $D\xi_n = \sigma_n^2$. *Тогда*

$$\frac{\sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2}{n^2} \to 0 \Rightarrow P\left(\left|\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} - \frac{\mu_1 + ... + \mu_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0$$

Доказательство. Из неравенства Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} - \frac{\mu_1 + ... + \mu_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2}{n^2\varepsilon^2} \to 0$$

□

8.2 Метод Монте-Карло.

Предположим, требуется вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Рассмотрим случайную величину ξ, равномерно распределенную на отрезке $[a, b]$. Тогда $f(\xi)$ также будет случайной величиной, причем ее математическое ожидание выражается как

$$Ef(\xi) = \int\limits_a^b f(x)\rho_\xi(x)dx = \int\limits_a^b f(x)\frac{1}{b-a}dx$$

Таким образом, интеграл выражается как

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)Ef(\xi) \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$