Зимний коллоквиум по дискретной математике 2019

hse-ami-open-exams

Содержание

1 Определение вычислимой частичной функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Счетность семейства частичных вычислимых функций, и существование невычислимых функций. Разрешимость подмножества $\mathbb{N}$. Перечислимые подмножества $\mathbb{N}$. Счетсность семейства перечислимых множеств, и существование неперечислимых множеств. 4

1.1 Определение вычислимой частичной функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ 4

1.2 Счетность семейств частичных вычислимых функций, и существование невычислимых функций. 4

1.3 Разрешимость подмножества $\mathbb{N}$. 4

1.4 Перечислимые подмножества $\mathbb{N}$. 4

1.5 Счетность семейства перечислимых множеств, и существование неперечислимых множеств. 5

2 Эквивалентные определения перечислимости (полуразрешимость, область определения вычислимой функции, множество значений вычислимой функции). 6

3 Теорема Поста. Теорема о графике. 7

3.1 Теорема Поста 7

3.2 Теорема о графике 7

4 Универсальные вычислимые функции (нумерации) для семейства частичных вычислимых функций натурального аргумента. Несуществование универсальной вычислимой функции для семейства тотальных вычислимых функций натурального аргумента (диагональное рассуждение). Главные универсальные функции. 8

4.1 Универсальные вычислимые функции (нумерации) для семейства частичных вычислимых функций натурального элемента. 8

4.2 Несуществование универсальной вычислимой функции для семейства тотальных вычислимых функций натурального аргумента (диагональное рассуждение). 8

4.3 Главные универсальные функции. 8

5 Вычислимая функция, не имеющая тотального вычислимого продолжения. Перечислимое неразрешимое множество. Неразрешимость проблемы применимости. 9

5.1 Вычислимая функция, не имеющая тотального вычислимого продолжения. 9

5.2 Перечислимое неразрешимое множество. 9

5.3 Неразрешимость проблемы применимости (остановки). 9

6 Теорема Поста. Существование перечислимого множества, дополнение которого неперечислимо. Перечислимые неотделимые множества. 10

6.1 Теорема Поста 10

6.2 Существование перечислимого множества, дополнение которого неперечислимо. 10

6.3 Перечислимые неотделимые множества. 10

7 Сводимости: m-сводимость и Тьюрингова сводимость. Их свойства. Полные перечислимые множества. 11

7.1 m-сводимость и ее свойства. 11

7.2 Тьюрингова сводимость и ее свойства. 11

7.3 Полные перечислимые множества. 11

8 Теорема Клини о неподвижной точке. 12

9 Теорема Райса-Успенского. **13**

10 Определение машин Тьюринга и вычислимых на машинах Тьюринга функций. Тезис Черча-Тьюринга. Неразрешимость проблемы остановки машины Тьюринга. **14**
10.1 Определение машин Тьюринга и вычислимых на машинах Тьюринга функций. 14
10.2 Тезис Черча-Тьюринга. 14
10.3 Неразрешимость проблемы остановки машин Тьюринга. 14

11 Неразрешимость проблемы достижимости в односторонних ассоциативных исчислениях. Полугруппы, заданные порождающими и соотношениями. Теорема Маркова-Поста: неразрешимость проблемы равенства слов в некоторой конечно определенной полугруппе (без доказательства). **15**
11.1 Неразрешимость проблемы достижимости в односторонних ассоциативных исчислениях. . . 15
11.2 Полугруппы, заданные порождающими и соотношениями. 15
11.3 Теорема Маркова-Поста: неразрешимость проблемы равенства слов в некоторой конечно определенной полугруппе (без доказательства). 15

12 Исчисление высказываний (аксиомы и правила вывода), понятие вывода. Теорема корректности исчисления высказываний. **16**
12.1 Исчисление высказываний (аксиомы и правила вывода), понятие вывода. 16
12.2 Теорема корректности исчисления высказываний. 16

13 Вывод из гипотез. Лемма о дедукции. Полезные производные правила. **17**

14 Теорема полноты исчисления высказываний. **18**

15 Исчисление резолюций для опровержения пропозициональных формул в КНФ: дизъюнкты, правило резолюций, опровержение КНФ в исчислении резолюций. Теорема корректности исчисления резолюций (для пропозициональных формул в КНФ). **19**

16 Теорема полноты исчисления резолюций (для пропозициональных формул в КНФ). Доказательство нужно знать только для конечных и счетных множеств формул. **20**

17 Полиномиальный алгоритм сведения задачи распознавания совместности конечных множеств произвольных формул к задаче распознавания совместности конечных множеств дизьюнктов. **21**

18 Определение формулы первого порядка в данной сигнатуре. Свободные и связанные вхождения переменных. Интерпретации данной сигнатуры. Общезначимые и выполнимые формулы. Равносильные формулы. **22**

19 Теории и их модели. Семантическое следования. Теорема Черча об алгоритмической неразрешимости отношения семантического следования и общезначимости формул (в доказательстве теоремы можно использовать существование конечно определенной полугруппы с неразрешимой проблемой равенства). **23**

20 Дизъюнкты, универсальные дизъюнкты. Исчисление резолюций (ИР) для доказательства несовместности множеств универсальных дизъюнктов. Теорема корректности ИР. **24**

21 Непротиворечивые теории. Теорема полноты ИР (для множеств универсальных дизъюнктов). **25**

22 Исчисление резолюций для теорий, состоящих из формул общего вида (приведение к предваренной нормальной форме и сколемизация). Доказательства общезначимости с помощью ИР. Выводимость формулы в теории с помощью ИР. Теорема компактности. **26**

23 Гомоморфизмы, эпиморфизмы (сюръективные гомоморфизмы), изоморфизмы. Теорема о сохранении истинности при эпиморфизме. Изоморфные модели. Элементарно эквивалентные модели, элементарная эквивалентность изоморфных моделей. 27

24 Выразимые (определимые) в данной модели отношения. Теорема о сохранении автоморфизмами выразимых предикатов. Доказательства невыразимости с помощью автоморфизмов. 28

25 Нормальные модели. Аксиомы равенства. Теорема о существовании нормальных моделей у непротиворечивых теорий, содержащих аксиомы равенства. 29

26 Игра Эренфойхта для данной пары моделей данной сигнатуры. Теорема об элементарной эквивалентности моделей, для которых в игре Эренфойхта Консерватор имеет выигрышную стратегию. 30

27 Семантически полные теории. Критерий семантической полноты теории в терминах элементарной эквивалентности моделей. Аксиоматизация элементарной теории упорядоченного множества рациональных чисел. 31

28 Семантически полные теории. Критерий семантической полноты теории в терминах элементарной эквивалентности моделей. Аксиоматизация элементарной теории упорядоченного множества целых чисел. 32

1 Определение вычислимой частичной функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Счетность семейства частичных вычислимых функций, и существование невычислимых функций. Разрешимость подмножества $\mathbb{N}$. Перечислимые подмножества $\mathbb{N}$. Счетсность семейства перечислимых множеств, и существование неперечислимых множеств.

1.1 Определение вычислимой частичной функции из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$

Определение 1. *Пусть A и B некоторые множества. Частичной функцией из A в B называется произвольное подмножество $f \subseteq A \times B$, удовлетворяющая свойству*

$$\forall a \in A, b_1, b_2 \in B \; (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2$$

Обозначение: $f : A \xrightarrow{p} B$

Определение 2. *Функция $f : A \xrightarrow{p} B$ вычислима, если существует программа (на C, на ассемблере, машина Тьюринга и т.п.), которая на любом входе $x \in \operatorname{dom} f$ выписывает $f(x)$ и завершается, а на любом входе $x \in A \setminus \operatorname{dom} f$ не завершается ни за какое конечное число шагов.*

1.2 Счетность семейств частичных вычислимых функций, и существование невычислимых функций.

Утверждение 1. *Множество частичных вычислимых функций не более, чем счетно.*

Доказательство. Действительно, всякой вычислимой функции можно поставить в соответствие алгоритм, причем различные функции вычисляются различными алгоритмами. Алгоритм – это конечная строка. То есть множество алгоритмов счетно. Существует инъекция из множества вычислимых функций в множество алгоритмов, следовательно, множество вычислимых функций не более, чем счетно. ☐

Утверждение 2. *Существуют невычислимые функции $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$.*

Доказательство. Множество всех функций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ имеет мощность континуум, а множество вычислимых функций не более, чем счетно. Следовательно, множество невычислимых функций не пусто. ☐

1.3 Разрешимость подмножества $\mathbb{N}$.

Определение 3. *Множество A разрешимо, если его характеристическая функция*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

вычислима.

1.4 Перечислимые подмножества $\mathbb{N}$.

Определение 4. *Множество A пречислимо, если есть программа, на пустом входе последовательно выписывающая все элементы A и только их.*

1.5 Счетность семейства перечислимых множеств, и существование неперечислимых множеств.

Утверждение 3. *Множество перечислимых множеств* $\mathbb{N}$ *не более, чем счетно.*

Доказательство. Всякому перечислимому множеству соответствует алгоритм, который его перечисляет, причем разные множества перечисляются разными алгоритмами. Отсюда следует, что мощность множества перечислимых множеств $\mathbb{N}$ не превосходит мощность множества алгоритмов, которое является счетным. $\square$

Утверждение 4. *Существуют неперечислимые множества* $A \subseteq \mathbb{N}$.

Доказательство. Множество перечислимых множеств не более, чем счетно. А множество всех подмножеств $\mathbb{N}$ имеет мощность континуум. Следовательно, множество неперечислимых подмножеств $\mathbb{N}$ не пусто. $\square$

2 Эквивалентные определения перечислимости (полуразрешимость, область определения вычислимой функции, множество значений вычислимой функции).

Определение 5. *Множество A полуразрешимо, если его полухарактеристическая функция*

$$w_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если}\, x \in A \\ \textit{не определено}, & \textit{если}\, x \notin A \end{cases}$$

вычислима.

Пусть $f : A \xrightarrow{p} B$.

Определение 6. *Область определения f*

$$\operatorname{dom} f = \{a \in A \mid \exists b \in B \, (a, b) \in f\}$$

Определение 7. *Область значений f*

$$\operatorname{rng} f = \{b \in B \mid \exists a \in A \, (a, b) \in f\}$$

Утверждение 5. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Множество A перечислимо.*
2. *Множество A полуразрешимо.*
3. $\exists f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, *$f$ вычислимая, т.ч.* $\operatorname{dom} f = A$.
4. $\exists f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, *$f$ вычислимая, т.ч.* $\operatorname{rng} f = A$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2)
Опишем алгоритм, вычисляющий $w_A(x)$: запускаем перечислитель A, если на каком-то шаге встретился x, то вернем 1. Так как перечислитель печатает все элементы A и только их, то если $x \in A$, то на каком-то шаге он напечатает его и алгоритм вернет 1, а если же $x \notin A$, то алгоритм не закончится ни за какое конечное кол-во шагов.

2) $\Rightarrow$ 3)
$f = w_A$. Действительно, знаем, что w_A вычислима и $\operatorname{dom} w_A = A$.

3) $\Rightarrow$ 4)
Пусть есть вычислимая функция $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$. Определим функцию g:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \textit{если}\, x \in \operatorname{dom} f \\ \textit{не определено}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Функция g вычислима (т.к. f вычислима), более того $\operatorname{rng} g = \operatorname{dom} f$.

4) $\Rightarrow$ 1)
Так как f вычислимая, то существует алгоритм F, который вычисляет значение f. Опишем алгоритм перечислителя: на n-ой итерации запустим по очереди $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ $F(i)$ на n шагов. Таким образом, $\forall x \in \operatorname{rng} f$ алгоритм $F(x)$ будет запущен на необходимое кол-во шагов для того, что вычислить значение $f(x)$. Следовательно, множество $A = \operatorname{rng} f$ перечислимо. $\square$

3 Теорема Поста. Теорема о графике.

3.1 Теорема Поста

Теорема 1 (Теорема Поста)**.** *Множества A и $\overline{A}$ перечислимы тогда и только тогда, когда A разрешимо.*

Доказательство. $\Rightarrow$
Построим алгоритм, вычисляющий $\chi_A(x)$: будем по очереди делать по одному шагу для $w_A(x)$ и $w_{\overline{A}}(x)$, т.к. $x \in A \vee x \in \overline{A}$, то какой-то один из алгоритмов вернет 1 на каком-то шаге. Если это будет w_A, то вернем 1, если же $w_{\overline{A}}$, то вернем 0.
$\Leftarrow$
Очевидно, из разрешимости следует перечислимость. Если A разрешимо, то и $\overline{A}$ разрешимо. □

3.2 Теорема о графике

Определение 8. *Пусть задана функция $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$. Графиком функции f называется множество $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \operatorname{dom} f\}$.*

Теорема 2 (Теорема о графике)**.** *Функция $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ вычислима тогда и только тогда, когда ее график Γ_f перечислим.*

Доказательство. $\Rightarrow$
Пусть f вычислима. Тогда $\operatorname{dom} f$ вычислима и, следовательно, есть вычислимая функция g, т.ч. $\operatorname{rng} g = \operatorname{dom} f$. Рассмотрим функцию $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, т.ч. $h(x) \simeq (g(x), f(g(x)))$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Она вычислима, причем

$$(x, y) \in \operatorname{rng} h \Leftrightarrow (x \in \operatorname{rng} g \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow (x \in \operatorname{dom} f \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma_f$$

для всех $x, y \in \mathbb{N}$. Значит, $\Gamma_f = \operatorname{rng} h$, следовательно, Γ_f перечислим (т.к. h вычислимая).
$\Leftarrow$
Пусть Γ_f перечислим. Тогда, чтобы вычислить $f(x)$, достаточно выписывать элементы Γ_f и проверять, совпадает ли первая координата пары с x. Если совпадает, выдавать вторую координату. Этот процесс завершается тогда и только тогда, когда $x \in \operatorname{dom} f$. □

4 Универсальные вычислимые функции (нумерации) для семейства частичных вычислимых функций натурального аргумента. Несуществование универсальной вычислимой функции для семейства тотальных вычислимых функций натурального аргумента (диагональное рассуждение). Главные универсальные функции.

4.1 Универсальные вычислимые функции (нумерации) для семейства частичных вычислимых функций натурального элемента.

Определение 9. *Функций $U : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ называется универсальной вычислимой, если она вычислима и для всякой вычислимой функции $f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, называемое индексом функции f относительно U, т.ч. $U_n = f$, т.е.*

$$\forall x(f(x) \simeq U(n, x))$$

4.2 Несуществование универсальной вычислимой функции для семейства тотальных вычислимых функций натурального аргумента (диагональное рассуждение).

Утверждение 6. *Не существует универсальной функции для семейства тотальных вычислимых функций.*

Доказательство. Допустим, что это не так и существует такая функция U. Тогда функция

$$f(x) = U(x, x) + 1$$

является тотальной и вычислимой. Следовательно, найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $f(x) = U(n, x)$. Так как f тотальна, то можем подставить n вместо x:

$$U(n, n) = f(n) = U(n, n) + 1$$

Противоречие. Следовательно, такой функции не существует. □

4.3 Главные универсальные функции.

Определение 10. *Вычислимая функция $U : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ называется главной универсальной вычислимой функцией, если для любой вычислимой функции $V : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ найдется вычислимая тотальная функция $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т.ч. $V_n = U_{s(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т.е.*

$$\forall x \forall n V_n(x) \simeq U(s(n), x)$$

5 Вычислимая функция, не имеющая тотального вычислимого продолжения. Перечислимое неразрешимое множество. Неразрешимость проблемы применимости.

5.1 Вычислимая функция, не имеющая тотального вычислимого продолжения.

Утверждение 7. *Существует вычислимая функция, не имеющая вычислимого тотального продолжения.*

Доказательство. Пусть $d(x) \simeq U(x, x)$, d вычислима. Предположим, что вычислимая тотальная функция g продолжает d. Тогда функция h, т.ч. $h(x) = g(x)+1$ для всех $x \in \mathbb{N}$, также будет вычислимой тотальной. Пусть $h = U_n$, h определена всюду, значит $n \in \operatorname{dom} d$. Тогда $U_n(n) = h(n) = g(n)+1 = d(n)+1 = U_n(n)+1$, что неверно. Следовательно, вычислимого тотального продолжения функции d не существует. $\square$

5.2 Перечислимое неразрешимое множество.

Утверждение 8. *Множество $K := \{n \mid U_n(n)$ определено$\}$ перечислимо, но не разрешимо.*

Доказательство. Перечислимость очевидна, поскольку $K = \operatorname{dom} d$, где вычислимая функция $d : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$ такова, что $d(x) \simeq U(x, x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$.
Установим неразрешимость K. Предположим противное. Тогда функция

$$g(x) = \begin{cases} d(x), & x \in \operatorname{dom} d \\ 0, & x \notin \operatorname{dom} d \end{cases}$$

является тотальной, более того вычислимой (поскольку $d(x)$ вычислима и $\operatorname{dom} d$ разрешимо). Но мы знаем, что d не имеет тотального вычислимого продолжения. Противоречие. Следовательно, K неразрешимо. $\square$

5.3 Неразрешимость проблемы применимости (остановки).

Определение 11. *Задача разрешения множества $S := \{(n, x) | U(n, x)$ определено$\}$ называется проблемой применимости (остановки).*

Теорема 3. *Проблема применимости (остановки) неразрешима.*

Доказательство. Пусть χ_S вычисляется алгоритмом S. Тогда, запустив $S(x, x)$, можно разрешить множество $\{x \mid U_x(x)$ *определено*$\}$, для которого доказана неразрешимость. $\square$

6 Теорема Поста. Существование перечислимого множества, дополнение которого неперечислимо. Перечислимые неотделимые множества.

6.1 Теорема Поста

Теорема 4 (Теорема Поста)**.** *Множества A и $\overline{A}$ перечислимы тогда и только тогда, когда A разрешимо.*

Доказательство. $\Rightarrow$
Построим алгоритм, вычисляющий $\chi_A(x)$: будем по очереди делать по одному шагу для $w_A(x)$ и $w_{\overline{A}}(x)$, т.к. $x \in A \vee x \in \overline{A}$, то какой-то один из алгоритмов вернет 1 на каком-то шаге. Если это будет w_A, то вернем 1, если же $w_{\overline{A}}$, то вернем 0.
$\Leftarrow$
Очевидно, из разрешимости следует перечислимость. Если A разрешимо, то и $\overline{A}$ разрешимо. □

6.2 Существование перечислимого множества, дополнение которого неперечислимо.

Утверждение 9. *Существует перечислимое множество, дополнение которого перечислимо.*

Доказательство. Множество $K = \{x \mid U_x(x) \text{ *определено*}\}$ перечислимо, но не разрешимо. Тогда $\overline{K}$ неперечислимо. Если $\overline{K}$ было бы перечислимо, то по теореме Поста, оно было бы разрешимо. □

6.3 Перечислимые неотделимые множества.

Определение 12. *Множества A, B называются отделимыми, если существует множество C, т.ч. $A \subseteq C$ и $B \cap C = \emptyset$.*

Утверждение 10. *Существуют непересекающиеся перечислимые множества, которые нельзя отделить разрешимом множеством.*

Доказательство. Рассмотрим множества $A = \{x \mid U_x(x) = 0\}$, $B = \{x \mid U_x(x) = 1\}$. Они перечислимы и не пересекаются. Пусть они отделяются разрешимом множеством C, причем $A \subseteq C$. Тогда функция

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если}\, U_x(x) = 0 \\ 0, & \textit{если}\, U_x(x) = 1 \\ \alpha(x) \in \{0, 1\}, & \textit{иначе} \end{cases}$$

вычислима. Следовательно, $\exists n \in \mathbb{N}$, т.ч. $\chi_C = U_n$. Тогда получаем, что $U_n(n) = 1$, если $U_n(n) = 0$ и $U_n(n) = 0$, если $U_n(n) = 1$. Противоречие. □

7 Сводимости: m-сводимость и Тьюрингова сводимость. Их свойства. Полные перечислимые множества.

7.1 m-сводимость и ее свойства.

Определение 13. *Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Множество A m-сводится к множеству B, если существует тотальная вычислимая функция f такая, что $\forall x \in \mathbb{N}\,(x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B)$. Обозначение: $A \leqslant_m B$.*

m-сводимость позволяет построить алгоритм разрешения множества A, если есть алгоритм разрешения множества B: $\chi_A(x) = \chi_B(f(x))$.

Утверждение 11. *Свойства:*

1. $A \leqslant_m A$
2. $A \leqslant_m B \wedge B \leqslant_m C \Rightarrow A \leqslant_m C$
3. $\begin{cases} A \leqslant_m B \\ B \text{ разрешимо} \end{cases} \Rightarrow A$ *разрешимо*
4. $\begin{cases} A \leqslant_m B \\ A \text{ неразрешимо} \end{cases} \Rightarrow B$ *неразрешимо*

7.2 Тьюрингова сводимость и ее свойства.

Определение 14. *Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Множество A T-сводится к множеству B, если при помощи алгоритма вычисления χ_B можно вычислить χ_A. Обозначение: $A \leqslant_T B$.*

Если $A \leqslant_m B$, то $A \leqslant_T B$. Но, обратное утверждение неверно.
Тьюрингова сводимость обладает такими же свойствами, что и m-сводимость.
Помимо этого: $A \leqslant_T \mathbb{N} \setminus A$, что неверно для m-сводимости.

7.3 Полные перечислимые множества.

Определение 15. *Перечислимое множество, к которому m-сводится любое другое перечислимое множество, называется полным перечислимым множеством.*

Утверждение 12. *Существует полное перечислимое множество*

Доказательство. Рассмотрим множество $S = \{(n, x) \mid U_n(x) \text{ определено}\}$. Понятно, что оно перечислимо. Пусть множество $A \in \mathbb{N}$ перечислимо. Покажем, что A m-сводится к S.
Так как A перечислимо, то $\exists f : \mathbb{N} \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т.ч. f вычислима и $\operatorname{dom} f = A$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N}\, U_n = f$. Положим $g(x) = (n, x)$, тогда $\forall x \in \mathbb{N}(x \in A \Leftrightarrow g(x) \in S)$. $\square$

8 Теорема Клини о неподвижной точке.

Теорема 5 (Теорема Клини о неподвижной точке)**.** *Пусть U – главная универсальная вычислимая функция, и вычислимая функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тотальна. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $U_n = U_{f(n)}$, т.е. $\forall x\, U(n, x) \simeq U(f(n), x)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $V : \mathbb{N}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{N}$, т.ч.

$$V(k, x) \simeq U(U(k, k), x)$$

для всех $k, x \in \mathbb{N}$. Она, очевидно, вычислима. Вследствие главности U, найдется тотальная вычислимая функция $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой при любых $k, x \in \mathbb{N}$ верно

$$U(s(k), x) \simeq V(k, x) \simeq U(U(k, k), x)$$

Тогда функция $f \circ s$ также тотальная вычислимая. Следовательно, существует $t \in \mathbb{N}$, т.ч. $f \circ s = U_t$. Для любых $x \in \mathbb{N}$ имеем

$$U(s(t), x) \simeq U(U(t, t), x) \simeq U(f(s(t)), x)$$

Положив $n = s(t)$, имеем

$$U(n, x) \simeq U(f(n), x)$$

□

9 Теорема Райса-Успенского.

Теорема 6 (Теорема Райса-Успенского)**.** *Пусть нумерация U главная и множество $\mathcal{F}$ вычислимых функций одного аргумента нетривиально (т.е. найдется $f \in F$ и найдется вычислимая $g \notin F$). Тогда множество индексов*

$$F = \{n \mid U_n \in \mathcal{F}\}$$

неразрешимо.

Доказательство. Пусть $g \in \mathcal{F}$ и $h \notin \mathcal{F}$ и множество F разрешимо. Пусть $g = U_k$ и $h = U_m$. Определим функцию f

$$f(n) = \begin{cases} m, & \text{если } n \in F \\ k, & \text{если } n \notin F \end{cases}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как F разрешимо, то тотальная функция f вычислима. Тогда, по теореме Клини о неподвижной точке, найдется число $n \in \mathbb{N}$, т.ч. $U_{f(n)} = U_n$. Если $n \in F$, то $U_n \in \mathcal{F}$, но $U_n = U_{f(n)} = U_m = h \notin \mathcal{F}$. Если же $n \notin F$, то $U_n \notin \mathcal{F}$, следовательно, $U_n = U_{f(n)} = U_k = g \in \mathcal{F}$. Противоречие. Значит, F неразрешимо. □

10 Определение машин Тьюринга и вычислимых на машинах Тьюринга функций. Тезис Черча-Тьюринга. Неразрешимость проблемы остановки машины Тьюринга.

10.1 Определение машин Тьюринга и вычислимых на машинах Тьюринга функций.

Определение 16. *Машина Тьюринга задается*

- *непустым конечным алфавитом Σ, среди которого выделен пробельный символ и не содержащее пробельного символа множества Γ – входной алфавит;*
- *непустым конечным множеством состояний Q, среди которого выделено начальное состояние s_0 и множество терминальных состояний $F \subseteq Q$;*
- *функций переходов $\delta : (Q \setminus F) \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{-1, 0, 1\}$.*

Машина Тьюринга состоит из бесконечной ленты, разбитой на ячейки, головки, в любой момент времени указывающей на одну ячейку и одной ячейки памяти, в которой хранится текущее состояние. В начальный момент времени на ленте записано некоторое слово, составленной из букв входного алфавита, головка смотрит на первый символ этого слова, во всех остальных ячейках пробелы. Затем в каждый момент времени вычисляется $\delta(q, c) = (q', c', \Delta)$, где q – текущее состояние, c – символ записанный в ячейке, на которую сейчас смотрит головка. Состояние меняется на q', символ в текущей ячейках на c', головка остается на месте или передвигается на один влево или вправо в соответсвии со значением Δ. Если $q' \in F$, то работа машины заканчивается, иначе этот процесс продолжается.
Машины Тьюринга естественным образом отождествляются с частичными функциями $f : \Gamma* \to \Gamma*$ – аргументом функции является входное слово, а возвращает функция слово, записанное на ленте после завершения работы машины. Функции, которые можно таким образом получить по некоторой машине Тьюринга, называются *вычислимыми на машине Тьюринга.*

10.2 Тезис Черча-Тьюринга.

Утверждение 13 (Тезис Черча-Тьюринга). *Любая вычислимая функция вычислима на машине Тьюринга.*

Здесь понятие «вычислимая функция» используется в неформальном смысле, под ним понимается функция, вычислимая в любой разумной модели, которая может прийти нам в голову. Тезис не является формальным утверждением, он никак не доказывается и принимается нами на веру.

10.3 Неразрешимость проблемы остановки машин Тьюринга.

Утверждение 14. *Не существует вычислимой функции, определяющей по машине Тьюринга и входному слову, остановится ли эта машина.*

Доказательство. Следует из утверждения о существовании полного перечислимого множества. □

11 Неразрешимость проблемы достижимости в односторонних ассоциативных исчислениях. Полугруппы, заданные порождающими и соотношениями. Теорема Маркова-Поста: неразрешимость проблемы равенства слов в некоторой конечно определенной полугруппе (без доказательства).

11.1 Неразрешимость проблемы достижимости в односторонних ассоциативных исчислениях.

11.2 Полугруппы, заданные порождающими и соотношениями.

11.3 Теорема Маркова-Поста: неразрешимость проблемы равенства слов в некоторой конечно определенной полугруппе (без доказательства).

Теорема 7 (Теорема Маркова-Поста).

12 Исчисление высказываний (аксиомы и правила вывода), понятие вывода. Теорема корректности исчисления высказываний.

12.1 Исчисление высказываний (аксиомы и правила вывода), понятие вывода.

Определение 17. *Высказыванием называется утверждение, которое либо истинно, либо ложно. При этом если A, B являются высказываниями, то $\neg A, A \vee B, A \wedge B, A \to B$ – тоже высказывания.*

Определение 18. *Выводом называется конечная последовательность формул, каждая из которой либо является аксиомой, либо получается из ранее встретившихся по правилам вывода.*

Имеется 11 аксиом:

1. $A \to (B \to A)$: истинна следует из чего угодно.
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$: левая дистрибутивность импликации относительно самой себя
3. $(A \wedge B) \to A$;
4. $(A \wedge B) \to B$: из конъюнкции двух формул следует каждая из формул.
5. $A \to (B \to (A \wedge B))$: если выполнены лбе формулы, то выполнена из конъюнкция.
6. $A \to (A \vee B)$;
7. $B \to (A \vee B)$: дизъюнкция двух формул следует из каждой из них.
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$: если формула C следует из каждой из формул A и B, то то она следует и из их дизъюнкции.
9. $\neg A \to (A \to B)$: из лжи следует все, что угодно.
10. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$: правило рассуждения от противного, если из A следует B и $\neg B$, то само A обязано быть неверным.
11. $A \vee \neg A$: закон исключенного третьего.

В качестве единственного правила вывода выступает *modus ponens*:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

Понимается оно так: если ранее уже выведены формулы A и $A \to B$, то в вывод можно приписать B.

Буквами A, B, C могут быть обозначены любые формулы.

Утверждение о том, что формула φ выводима в исчислении высказываний (ИВ), записывается так: $\vdash \varphi$.

12.2 Теорема корректности исчисления высказываний.

Определение 19. *Формула называется тавтологией, если она как булева формула верна при всех значениях входящих в нее переменных.*

Теорема 8 (Теорема корректности исчисления высказываний). *Если $\vdash \varphi$, то φ – тавтология.*

Доказательство. Любая аксиома является тавтологией. Это можно проверить непосредственно по таблице истинности. Если A и $A \to B$ являются тавтологиями, то B также является тавтологией: только при $A = B = 1$ верны и формула A и импликация $A \to B$. Индукцией по номеры формулы в выводе доказывается, что все формулы в выводе тавтологичны, что и требовалось. □

13 Вывод из гипотез. Лемма о дедукции. Полезные производные правила.

14 Теорема полноты исчисления высказываний.

15 Исчисление резолюций для опровержения пропозициональных формул в КНФ: дизъюнкты, правило резолюций, опровержение КНФ в исчислении резолюций. Теорема корректности исчисления резолюций (для пропозициональных формул в КНФ).

16 Теорема полноты исчисления резолюций (для пропозициональных формул в КНФ). Доказательство нужно знать только для конечных и счетных множеств формул.

17 Полиномиальный алгоритм сведения задачи распознавания совместности конечных множеств произвольных формул к задаче распознавания совместности конечных множеств дизьюнктов.

18 Определение формулы первого порядка в данной сигнатуре. Свободные и связанные вхождения переменных. Интерпретации данной сигнатуры. Общезначимые и выполнимые формулы. Равносильные формулы.

19 Теории и их модели. Семантическое следования. Теорема Черча об алгоритмической неразрешимости отношения семантического следования и общезначимости формул (в доказательстве теоремы можно использовать существование конечно определенной полугруппы с неразрешимой проблемой равенства).

20 Дизъюнкты, универсальные дизъюнкты. Исчисление резолюций (ИР) для доказательства несовместности множеств универсальных дизъюнктов. Теорема корректности ИР.

21 Непротиворечивые теории. Теорема полноты ИР (для множеств универсальных дизъюнктов).

22 Исчисление резолюций для теорий, состоящих из формул общего вида (приведение к предваренной нормальной форме и сколемизация). Доказательства общезначимости с помощью ИР. Выводимость формулы в теории с помощью ИР. Теорема компактности.

23 Гомоморфизмы, эпиморфизмы (сюръективные гомоморфизмы), изоморфизмы. Теорема о сохранении истинности при эпиморфизме. Изоморфные модели. Элементарно эквивалентные модели, элементарная эквивалентность изоморфных моделей.

24 Выразимые (определимые) в данной модели отношения. Теорема о сохранении автоморфизмами выразимых предикатов. Доказательства невыразимости с помощью автоморфизмов.

25 Нормальные модели. Аксиомы равенства. Теорема о существовании нормальных моделей у непротиворечивых теорий, содержащих аксиомы равенства.

26 Игра Эренфойхта для данной пары моделей данной сигнатуры. Теорема об элементарной эквивалентности моделей, для которых в игре Эренфойхта Консерватор имеет выигрышную стратегию.

27 Семантически полные теории. Критерий семантической полноты теории в терминах элементарной эквивалентности моделей. Аксиоматизация элементарной теории упорядоченного множества рациональных чисел.

28 Семантически полные теории. Критерий семантической полноты теории в терминах элементарной эквивалентности моделей. Аксиоматизация элементарной теории упорядоченного множества целых чисел.