Летний экзамен по алгебре

hse-ami-open-exams

Содержание

1 Дискретное вероятностное пространство. Задача о разделе ставки. Вероятностный алгоритм проверки на простоту. Универсальная хеш-функция.

1.1 Дискретное вероятностное пространство.

Пусть Ω – непустое конечное *множество элементарных исходов.*

Определение 1. *Всякое подмножество $A \subseteq \Omega$ называют **событием**.*

Определение 2. *Функцию $P : 2^{\Omega} \to [0, 1]$, удовлетворяющую следующим свойствам:*

- $P(\Omega) = 1$
- $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

*называют **вероятностной мерой**, а значение $P(A)$ **вероятностью события** A. Вероятностная мера полностью определяется значениями $P(\{\omega\}) = p_\omega$, т.е.*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Если все элементарные исходы равновозможны, то полагаем $p_{\omega_1} = ... = p_{\omega_n} = 1/n$.

1.2 Задача о разделе ставки.

Два человека играют в некоторую игру, причем у обоих шансы победить одинаковые. Они договорились, что тот, кто первым выиграет 6 партий, получит весь приз. Однако игра остановилась раньше, когда первый выиграл пять партий, а второй выиграл три партии. Как справедливо разделить приз?
Предлагается разделить приз в отношении, в котором относятся вероятности выиграть для каждого из игроков в случае продолжения игры. Ясно, что еще надо сыграть не более трех партий. Пространство исходов этих трех партий состоит из восьми элементов, причем только один из этих исходов означает выигрыш второго игрока. Значит приз надо разделить в отношении 7 к 1.

1.3 Вероятностный алгоритм проверки на простоту.

Пусть дано некоторое натуральное число $N > 1$. Если N простое число, то по малой теореме Ферма для всякого натурального числа, такого, что $(b, N) = 1$, число $b^{N-1} - 1$ делится на N. Следовательно, если для некоторого b, удовлетворяющего условию $(b, N) = 1$, число $b^{N-1} - 1$ не делится на N, то N не является простым. Это наблюдение используют для построения простейшего теста на простоту. Если $b^{N-1} - 1$ не делится на N, то говорим, что N не проходит тест для основания b.
Пусть основание мы выбираем случайно из множества $\mathbb{Z}_N^*$. Предположим, что существует такое основание, для которого N не проходит тест. Какова вероятность выбрать такое основание?
Предположим, что для $a \in \mathbb{Z}_N^*$ число N не проходит тест. Если N проходит тест для основания b, то для основания ab число N уже тест не проходит. В противном случае $(ab)^{N-1} \equiv_N 1$ и $(b^{-1})^{N-1} \equiv_N 1$. Следовательно, $a^{N-1} \equiv (b^{-1})^{N-1}(ab)^{N-1} \equiv 1$, что противоречит предположению. Таким образом, каждому основанию b, для которого N проходит тест, можно сопоставить основания ab, для котрого результат теста отрицательный. Значит, оснований, для которых N не проходит тест, не м еньше оснований, для которых N проходит тест на простоту. Искомая вероятность не меньше $1/2$. Если независимым образом повторять набор основания k раз, то вероятность выбрать основание, для которого данное число не проходит тест, меньше $1/2^k$.

1.4 Универсальная хеш-функция.

Пусть $K = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ – множество «ключей». Отображение

$$h : K \to \{0, 1, 2, ..., m-1\}$$

называется хеш-функцией. Предполагается, что $m < n$. Одним из важнейших свойств функции h является равномерность, когда доля ключей k с фиксированным значением $h(k)$ должно быть примерно n/m. Это означает, что вероятность коллизии $h(k_1) = h(k_2)$ при $k_1 \neq k_2$ не больше $1/m$. Ясно, что не всегда можно предполагать, что ключи равномерно распределены по таблице. Предположим, что $h(k) = k \mod m$ и на вход сначала подаются ключи вида $m, 2m, 3m, ...$ Ясно, что всем таким ключам присваивается хеш-код 0 и реально никакого равномерного распределения значений не происходит. Оказывается, с этой проблемой можно справиться, если перед началом хеширования случайным образом выбирать функцию h из некоторого набора таких функций.
Зафиксируем простое число $p > n$. Пусть $a \in \{1, 2, ..., o-1\}$ и $b \in \{0, 1, 2, ..., o-1\}$. Положим

$$h_{a,b} = ak + b \mod p \mod m.$$

Пара параметров (a, b) выбирается случайным образом из множества

$$\{1, 2, ..., p-1\} \times \{0, 1, 2, ..., p-1\},$$

причем все элементы этого множества считаем равновероятными. Докажем, что для любых

$$k_1, k_2 \in \{0, 2, ..., n-1\}, \quad k_1 \neq k_2,$$

вероятность коллизии $h_{a,b}(k_1) = h_{a,b}(k_2)$ не превосходит $1/m$.
Заметим, что $ak_1 + b = ak_2 + b \mod p$ тогда и только тогда, когда $k_1 = k2$. Кроме того, для различных k_1 и k_2 по значениям $ak_1 + b \mod p$ и $ak_2 + b \mod p$ однозначно находятся числа a и b. Пусть $k_1 \neq k_2$. Отображение

$$(a, b) \to (ak_1 + b \mod p, ak_2 + b \mod p)$$

является биекцией множества

$$\{1, 2, ..., p-1\} \times \{0, 1, 2, ..., p-1\}$$

на множество

$$(\{0, 1, 2, ..., p-1\} \times \{0, 1, 2, ..., p-1\}) \setminus \{(i, i) \mid 0 \leqslant i \leqslant p-1\}.$$

Остается отметить, что для всякого $t \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ количетсво чисел $s \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ таких, что $s \neq t$ и $s = t \mod m$, не превосходит $(p-1)/m$, т.е. вероятность выбора такой пары (t, s) или, что эквивалентно, выбора пары (a, b), у которой $h_{a,b}(k_1) = h_{a,b}(k_2)$, не превосходит $1/m$.

2 Свойства вероятностной меры. Формула включений и исключений. Парадокс распределения подарков. Задача про конференцию.

2.1 Свойства вероятностной меры.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$
- $P(\bigcup\limits_k A_k) \leq \sum\limits_k P(A_k)$
- $P(\bigcup\limits_k A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum\limits_{i_1<...<i_k} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$

2.2 Формула включений и исключений.

$$P(\bigcup_k A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1<...<i_k} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$$

Докажем индуктивно. Для $k = 1$ очевидно, что верно. Для $k = 2$ проверено перывм свойством. Допустим для n верно, докажем для $n+1$: $P(A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(A_1 \cup ... \cup A_n) + P(A_{n+1}) - P((A_1 \cap A_{n+1}) \cup ... \cup (A_n \cap A_{n+1})) = P(A_1) + ... + P(A_n) - \sum\limits_{j<k} P(A_j \cap A_k) + P(A_{n+1}) + P(A_1 \cap A_{n+1}) + ... + P(A_n \cap A_{n+1}) - \sum\limits_{j<k} P(A_j \cap A_k \cap A_{n+1})$ и так далее. Таким образом, переместив все, где есть A_{n+1} под знаки суммирования, мы получим исходную формулу.

2.3 Парадокс распределения подарков.

Несколько человек решили сделать друг другу подарки следующим образом. Каждый приносит подарок. Подарки складываются вместе, перемешиваются и случайно распределяются среди участников. Этот справедливый способ раздачи подарков применяется часто, так как считают, что для больших групп людей вероятность совпадения, т. е. получения кем-то собственного подарка, очень мала. Парадоксально, но вероятность по крайней мере одного совпадения намного больше вероятности того, что совпадений нет (кроме случая, когда группа состоит из двух человек, тогда вероятность отсутствия совпадений равна $1/2$).

Доказательство. Рассмотрим компанию из n человек, тогда число подарков также равно n. Подарки могут быть распределены $n!$ различными способами. (Это общее число исходов.) Число исходов, в которых никто не получит свой собственный подарок, равно

$$\binom{n}{0} n! - \binom{n}{1} (n-1)! + ... + (-1)^n 0!,$$

так что отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов вычисляется по формуле

$$P = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}$$

и P действительно меньше $1/2$ при $n > 2$. Таким образом, при $n = 6$ имеем

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{53}{144} \approx 0.36$$

□

2.4 Задача про конференцию.

В научном центре работают специалисты по 60 различным разделам компьютерных наук. Известно, что по каждому разделу в центре работает ровно 7 ученых, причем вполне может быть, что один ученый является специалистом сразу по нескольким направлениям. Все ученые должны принять участие в одной (и только одной) из двух конференций, одна из которых проходит в Канаде, а другая в Австралии. Оказывается, что всегда можно так распределить ученых по этим конференциям, что на каждой конференции будут присутствовать специалисты по всем 60 направлениям компьютерных наук.

Доказательство. Будем для каждого ученого выбирать конференцию простым подбрасыванием правильной монеты. Для каждого направления компьютерной мысли рассмотрим событие, состоящее в том, что среди ученых этого направления окажутся и те, которые поехали в Канаду, и те, которые поехали в Австралию. Вероятность этого события равна $1-2^{-6}$ (нас устроят все исходы кроме двух, когда все отправились на конференцию в одну страну). Остается заметить, что число событий равно 60 и вероятность каждого события больше $1-60^{-1}$. □

3 Условная вероятность. Независимые события. Отличие попарной независимости и независимости в совокупности.

3.1 Условная вероятность.

Условной вероятностью A при событии B называется число

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Если зафиксировать B, то $P'(x) = P(x|B)$ является вероятностной мерой. Равенство часто записывают как $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ и называют правилом произведения.

3.2 Независимые события.

События A и B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

3.3 Отличие попарной независимости и независимости в совокупности.

Пусть $\{A_1, ..., A_n\}$ – некоторое множество событий. Тогда события $A_1, ..., A_n$ называются независимыми в совокупности, если

$$P\left(\bigcap_i A_i\right) = \prod_i P(A_i).$$

Из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности.

4 Формула полной вероятности. Формула Байеса. Задача о сумасшедшей старушке. Парадокс Байеса.

4.1 Формула полной вероятности.

Пусть

$$\Omega = \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} A_i \quad \text{и} \quad \forall i, j, i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing,\ P(A_i) > 0,$$

тогда для всякого события B имеет место равенство

$$P(B) = \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} P(B|A_i) \cdot P(A_i).$$

Доказательство. В качестве доказательства это раскладывается из

$$\sum_{i \in \{1,\dots,n\}} P(B|A_i)$$

□

4.2 Формула Байеса.

Пусть $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Тогда

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Доказательство. Следует из формулы условной вероятности. □

4.3 Задача о сумасшедшей старушке.

На посадку в самолет стоят $N \geqslant 2$ пассажиров, среди которых сумасшедшая старушка. Старушка расталкивает всех пассажиров и садится в самолет на произвольнольное место. Затем пассажиры, когда заходят в самолет, садятся на свое место, если оно свободно, и на произвольное свободное место в противном случае. Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место?

Пусть эта вероятность равна P_N. Если $N = 2$, то $P_N = 1/2$. Предположим, что уже для всех $k \leqslant N$ доказано, что $P_k = 1/2$. Докажем равенство $P_{N+1} = 1/2$. Событие B состоит из тех исходов, когда последний пассажир садится на свое место. Событие A_m состоит из тех исходов, когда старушка села на место m-го пассажира. По формуле полной вероятности

$$P_{N+1} = P(B) = \sum_m P(B|A_m)P(A_m).$$

Заметим, что $P(A_m) = 1/(N+1)$ и все кроме двух (когда старушка села на свое место или на место последнего пассажира) вероятности $P(B|A_m) = 1/2$. Следовательно, имеем

$$P_{N+1} = \frac{N-1}{2(N+1)} + \frac{1}{N+1} = \frac{1}{2}.$$

4.4 Парадокс Байеса.

Пусть иеется тест, используемый для диагностики некоторого заболевания. Известно, что доля больных этим заболеванием равна 0,001. Если человек болен, то тест дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если человек здоров, то тест дает положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что тест оказался положительным. Какова вероятность того, что человек на самом деле здоров? Пусть T_+ и T_- – события состоящие в том, что тест дал положительный результат и тест дал отрицательный результат. Пусть также Z_+ и Z_- – события состоящие в том, что человек здоров и человек болен соответственно. По формуле полной вероятности

$$P(T_+) = P(T_+|Z_+)P(Z_+) + P(T_+|Z_-)P(Z_-) = 0,01 \cdot 0,999 + 0,9 \cdot 0,001 = 0,01089.$$

По формуле Байеса

$$P(Z_+|T_+) = \frac{P(T_+|Z_+) \cdot P(Z_+)}{P(T_+)} = \frac{0,01 \cdot 0,999}{0,01089} \geq 0,91$$

5 Схема Бернулли. Моделирования бросания правильной монеты. Теорема Муавра-Лапласа. Закон больших чисел для схемы Бернулли.

5.1 Схема Бернулли.

Рассмотрим следующий эксперимент: N раз бросается монета с вероятностью выпадения орла (успеха) p, причем результат одного бросания не влияет на результаты других бросаний. Нас интересует число выпадений орла или число успехов. Пусть $q = 1 - p$.
Можно считать, что множество элементарных исходов состоит из последовательностей 0 и 1 длины N, где 1 соответствует успеху. Каждому исходу с k единицами сопоставляем вероятность $p^k q^{N-k}$. Построенное вероятностное пространство называют *схемой Бернулли*.
Так как всего исходов с k единицами C_N^K, то вероятность события A_k, N, что в последовательности длины N ровно k единиц, равна

$$P(A_k, N) = C_N^k p^k q^{N-k}.$$

5.2 Моделирования бросания правильной монеты.

Пусть монета бросается N раз. Будем смотреть на четность количества выпавших орлов. Рассмотрим следующие вероятности:

$$P(\text{«количество орлов четно»}) = Ч, \quad P(\text{«количество орлов нечетно»}) = Н$$

Очевидно, что $Ч + Н = (p+q)^N = 1$ (бином Ньютона). Теперь рассмотрим их разность:

$$Ч - Н = \sum_{k=2m} C_N^k p^k q^{N-k} - \sum_{k=2m+1} C_N^k p^k q^{N-k} = (-p+q)^N$$

Таким образом,

$$Ч = \frac{1 + (1-2p)^N}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

5.3 Теорема Муавра-Лапласа. (TODO)

Теорема 1 (Формула Стирлинга). *Факториал числа n можно приблизить с помощью следующей формулы:*

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+O(\frac{1}{n})}$$

Будем бросать правильную монетку. Тогда вероятность выпадения ровно n орлов при совершении $2n$ бросков будет следующей:

$$P_{2n,n} = C_{2n}^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n! \cdot 2^{2n}}$$

Приблизим все это дело с помощью формулы Стирлинга:

$$P_{2n,n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n! \cdot 2^{2n}} = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot (2n)^{2n+1/2} \cdot e^{2n} \cdot e^{O(1/n)}}{\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} \cdot e^n \cdot \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} \cdot e^n \cdot 2^{2n} \cdot e^{O(1/n)}} = \frac{2^{2n+1/2} \cdot n^{2n+1/2} \cdot e^{O(1/n)}}{n^{n+1/2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+1/2} \cdot 2^{2n}} = \frac{e^{O(1/n)}}{\sqrt{\pi n}}$$

Сравним $P_{2n,n+k}$ с $P_{2n,n}$:

$$\frac{P_{2n,n+k}}{P_{2n,n}} = \frac{C_{2n}^{n+k}}{C_{2n}^n} = \frac{n!n!}{(n+k)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{(n+1)(n+2)...(n+k)} = \frac{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k}{n})}{(1+\frac{1}{n})...(1+\frac{k}{n})} =$$

$$= \frac{e^{\sum_{m=1}^k \ln(1-\frac{m}{n})}}{e^{\sum_{m=1}^k \ln(1+\frac{m}{n})}} = e^{\sum_{m=1}^k \ln(1-\frac{m}{n}) - \sum_{m=1}^k \ln(1+\frac{m}{n})} = e^{\sum_{m=1}^k (-\frac{m}{n} + \frac{m^2}{2n^2} + O(\frac{m^3}{n^3})) - \sum_{m=1}^k (\frac{m}{n} + \frac{m^2}{2n^2} + O(\frac{m^3}{n^3}))} =$$

$$= e^{\frac{k^2}{n^2} + \frac{k^2}{2n^2} + O(\frac{k^4}{n^3})}$$

Пусть $k \leqslant C\sqrt{N}$. Тогда

$$P_{2n,n+k} = \frac{1}{\sqrt{\pi n} e^{-\frac{k^2}{n} + O(\frac{1}{n})}} \quad \Rightarrow \quad P_{N,\frac{N}{2}+k} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{4}}} \varphi(\frac{k}{\sqrt{\frac{N}{4}}}), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Если все это дело просуммировать, то получится штука, которая стремится к интегралу при $N \to \infty$, т.е.

$$\sum_k P_{N,\frac{N}{2}+k} \to \int_0^2 \varphi(x)dx$$

За что же у нас отвечает k? Как отходит от середины наша гистограмма, т.е.

$$P(\frac{N}{2} \leqslant \text{число успехов} \leqslant \frac{N}{2} + \sqrt{N}) \to \int_0^2 \varphi(x)dx$$

Поделим на N:

$$P(\frac{1}{2} \leqslant \text{число успехов}/N \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{N}}) \to \int_0^2 \varphi(x)dx$$

Сформулируем теорему в общем виде.

Теорема 2. *1) Предположим, что при каждом N число k выбирается так, что для чисел*

$$x_{k,N} = \frac{k - Np}{\sqrt{Npq}}$$

существует константа C, для которой $|x_k, N| \leqslant C$ и C не зависит от N. Тогда

$$P_{N,k} \sim \frac{1}{\sqrt{Npq}}\varphi(x_{k,N}), \quad N \to +\infty$$

2) Для любых двух чисел $a < b$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} P(a \leqslant \frac{k - Np}{\sqrt{Npq}} \leqslant b) = \int_a^b \varphi(x)dx$$

5.4 Закон больших чисел для схемы Бернулли.

Для всякого $\delta > 0, P(|\frac{k}{N} - p| > \delta) \xrightarrow{N\to\infty} 0$, где $k-$число успехов, а p - вероятность успехов. Для доказательства снова домножим обе стороны неравенства на $\sqrt{\frac{N}{pq}}$, но также поменяем $>$ на $\leq$: $P(|\frac{k-Np}{\sqrt{\frac{pq}{N}}} \leq \delta\sqrt{\frac{N}{pq}}|)$. Теперь давайте возьмём $M > M_0, \exists N_0 : N > N_0$, такое, что $\frac{N}{pq} > M$. Тогда можно сказать $P(|\frac{k-Np}{\sqrt{\frac{pq}{N}}} \leq \delta\sqrt{\frac{N}{pq}}|) \geq P(|\frac{k-Np}{\sqrt{\frac{pq}{N}}} \leq M|) \to$ по т. Муавра Лапласа $\int\limits_{-M}^{M} \phi(x)dx \to 1$, а вероятность того, что мы сначала искали таким образом стремится к 0.

6 Случайное блуждание: принцип отражения, задача о баллотировке и задача о возвращении в начало координат. Броуновское движение.

6.1 Случайное блуждание

Схема Бернулли имеет красивую геометрическую интерпретацию. По числовой прямой двигается частица, которая каждую секунду перемешается на единицу вправо или на единицу влево, причем выбор обоих направлений равновозможен и не зависит от соответствующего выбора на других шагах. Мы считаем, что в начальный момент времени частица находится в точке $x = 0$. Ясно, что траекторию движения частицы за N перемещений можно закодировать последовательностью из 1 или -1 длины N. Набор таких последовательностей – пространство элементарных исходов. Вероятность каждой траектории равна 2^{-N}. Таким образом, с точностью до обозначений мы получили схему Бернулли, описывающую бросание правильной монеты.
При исследовании случайного блуждания, нас интересует вероятность того, что траектория обладает некоторым свойством. Какова вероятность того, что частица не возвращается в начало координат? Какова вероятность, что N-м шаге частица первый раз вернулась в начало координат?
Траектории частицы изображаем на координатной плоскости переменных (t, x) в виде ломанных, соединяющих точки с целочисленными координатами t и x. Здесь x – положение частицы, а t – время.

6.2 Принцип отражения

Теорема 3. *Пусть $x_0 > 0, x_1 > 0$ и $t_0 < t_1$. Число путей из (t_0, x_0) в (t_1, x_1), которые касаются или пересекают ось времени, равно числу путей из $(t_0, -x_0)$ в (t_1, x_1).*

Доказательство. Очевидно, что существует биекция. □

6.3 Задача о баллотировке

Какова вероятность того, что частица, которая вышла из нуля и пришла в точку $k > 0$ за N шагов, все время пути находилась в точках с положительными координатами? Обратим внимание, что требуется вычислить условную вероятность, где условием является то, что частица за N шагов пришла в точку k. Следовательно, надо среди таких путей найти долю тех, которые проходят только через точки с положительными координатами.
Рассматриваемая задача иеет интересную интерпретацию и называется «теоремой о баллотировке». Если на выборах один кандидат набрал q голосов, а другой r голосов и $r > q$, то какова вероятность того, что победивший кандидат все время выборов был впереди? Предполагается, что голосовавшие не имели предпочтений и отдавали свой голос случайно, а подсчет голосов происходил последовательно.
В первый момент времени частица с вероятностью $1/2$ перемешается в точку $x = 1$ или $x = -1$. Нас устраивает только первый вариант. Затем, нужная нам траектория частицы соединяет точки $(1, 1)$ и (N, k) и не касается и не пересекает ось времени. По принципу отражения мы умеем считать число остальных траекторий, соединяющих $(1, 1)$ и (N, k). Таких траекторий ровно столько, сколько всего траекторий из $(1, -1)$ в (N, k). Несложно посчитать, что таких траекторий $C_{N-1}^{\frac{N+k}{2}}$. Всего траекторий из $(1, 1)$ в (N, k) равно $C_{N-1}^{\frac{N+k}{2}-1}$. Следовательно, число нужных нам траекторий частицы

$$C_{N-1}^{\frac{N+k}{2}-1} - C_{N-1}^{\frac{N+k}{2}} = \frac{k}{N} \cdot C_{N}^{\frac{N+k}{2}}.$$

Здесь $C_{N}^{\frac{N+k}{2}}$ – количество путей, соединяющих начало координат и точку (N, k). Значит вероятность искомого события равна $\frac{k}{N}$. В условиях задачи о баллотировке соответствующая вероятность равна $\frac{r-q}{r+q}$.

6.4 Задача о возвращении в начало координат

Пусть чатсица вышла из начала координат. Обозначим через u_{2n} вероятность того, что в момент времени $t = 2n$ частица вернулась в точку $x = 0$, а через f_{2n} вероятность того, чтро это произошло первый раз.
Легко посчитать, что $u_{2n} = C_{2n}^{n} \cdot 2^{-2n}$. Сложнее найти f_{2n}. Частица приходит в точку $x = 0$ в момент времени $2n$ из точек $x = 1$ или $x = -1$ в момент времени $t = 2n - 1$. Число путей в точку $(2n - 1, 1)$ из начала координат таких, что все координаты точек, через которые проходит путь, положительные, равно $\frac{1}{2n-1} \cdot C_{2n-1}^{n}$. Столько же путей в точку $(2n - 1, -1)$ из начала координат таких, что все координаты точек, через которые проходит путь, отрицательные. Следовательно, всего нужных нам путей $\frac{2}{2n-1} \cdot C_{2n-1}^{n}$ и

$$f_{2n} = \frac{2}{2n-1} \cdot C_{2n-1}^{n} \cdot 2^{-2n}.$$

Несложно проверить, что $f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$ и $f_{2n} = (2n)^{-1} \cdot u_{2n-2}$. Формула Стирлинга позволяет найти асимптотику этих вероятостей:

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad f_{2n} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot n^{3/2}}.$$

6.5 Броуновское движение.

Будем считать, что частица за время Δt перемещается вправо или влево на Δx, где уже не предполагается, что Δt и Δx равны единице. Пусть в момент времени t частица находится в точке $X(t)$. Хотим узнать распределение значений $X(t)$. Предположим, что $t = N\Delta t$. Если за эти N перемещений частица k раз перемещалась вправо, то

$$X(t) = k\Delta x + (N - k)(-\Delta x) = (2k - N)\Delta x.$$

Из наблюдений известно, что $|\Delta x|^2 = \sigma \Delta t$ для некоторого числа $\sigma > 0$. Тогда

$$X(t) = \frac{k - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{N}{4}}} \sqrt{t\sigma}.$$

Для моделирования непрерывного движения частицы устремим Δt к нулю. Это равносильно тому, что $N \to \infty$. По теореме Муавра-Лаплаа

$$\lim_{N\to\infty} P\left(a \leqslant X(t) \leqslant b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t\sigma}}}^{\frac{b}{\sqrt{t\sigma}}} e^{-x^2/2} dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma t}} dx.$$

Таким образом, вероятность того, что частица в момент времени t находится в $[a, b]$ вычисляется с помощью плотности

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma t}}.$$

7 Теорема Пуассона. Распределение Пуассона. Задача про изюм. Пуассоновский процесс.

7.1 Задача про изюм.

Сколько изюма должны содержать в среднем булочки, для того чтобы вероятность иметь хотя бы одну изюминку в булочки была не меньше 0,99?
Предположим, что уже изготовлено тесто на некоторое количество булочек. В это тесто добавлено N изюминок так, что соотношение числа изюминок к количеству булочек равно λ. Значит количество булочек равно N/λ. Выделим в тесте кусок, из которого будет изготовлена данная булочка. Вероятность попадания одной изюминку в эту булочку равна λ/N, а вероятность того, что хотя бы одна изюминка попала в булку, равна

$$1 - \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N.$$

Поскольку мы рассматриваем серийное производство булочек, то можно предполагать, что $N \to +\infty$, т.е. растет объем теста и количество изюма, но не меняется плотность λ. Получаем

$$\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \to e^{-\lambda}.$$

Для решения задачи надо найти λ такое, что $e^{-\lambda}, 0,01$. Подходит $\lambda = 5$, т.е. плотность изюма должна быть не менее пяти изюминок на булочку.
Мы рассматривали серии событий, причем N-ая состоит из N событий. Например, в задаче про горшочек каши такими событиями являются попадание i-й ягоды в половник. В каждой серии все события независимы в совокупности и в N-й серии вероятность каждого события равна p_N, причем число $N \cdot p_N = \lambda$ не зависит от N. Нас интересует вероятность $P(A_{k,N})$ наступления ровно k событий в данной серии из N событий. Поскольку рассматриваемая ситуация представляет собой схему Бернулли, то вероятность $P(A_{k,N})$ вычисляется по формуле

$$C_N^j p_N^k (1 - p_n)^{N-k}.$$

7.2 Теорема Пуассона.

Теорема 4. *Пусть $N \cdot p_N = \lambda$ – не зависит от N. Тогда*

$$P(A_{k,N}) = C_N^k p_N^k (1 - p_n)^{N-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad N \to +\infty$$

Доказательство. Распишем вероятность $P(A_{k,N})$ в следующем виде:

$$P(A_{k,N}) = \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{N}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N.$$

Учитывая, что λ и k не меняются, устремляем $N \to \infty$ и получаем искомое выражение. □

7.3 Распределение Пуассона.

Определение 3. *Набор вероятностей $\{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\}$ называется* ***распределением Пуассона****.*

7.4 Пуассоновский процесс.

В случайные моменты времени регистрируются некоторые события. Будем отмечать эти моменты времени точками на луче $[0, +\infty)$. Обозначим через $X(t)$ число точек на временном промежутке $(0, t)$. Нас интересует вероятность $P_k(t)$ того, что $X(t) = k$. Будем предполагать, что

1) вероятность попадания k точек в данный промежуток зависит только от длины этого промежутка, но не зависит от его расположения

2) для любой конечной системы промежутков, которые могут попарно пересекаться лишь концами, попадания точек в каждый из них являются независимыми в совокупности событиями

3) вероятность попадания по крайней мере двух точек в интервал длины δ равна o-малым от δ

Определение 4. *Величина $X(t)$ называется* ***пуассоновским процессом****.*

Рассмотрим сначала $P_0(t)$. Разделим промежуток $[0, 1]$ на N промежутков. По свойству (1) вероятность отсутствия событий на каждом промежутке разбиения равна $P_0(t/N)$. По свойству (2) регистрация события на одном промежутке разбиения не зависит от регистрации событий на других промежутках. Следовательно, мы имеем дело со схемой Бернулли и вероятность отсутствия событий на $[0, t]$ равна $P_0(t) = P_0(t/N)^N$. Положим $P_0(1) = q$. Тогда $P_0(1/N) = q^{\frac{1}{N}}$ и $P_0(m/N) = q^{\frac{m}{N}}$. Заметим, что $P_0(t + h) = P_0(t)P_0(h) \leqslant P_0(t)$, т.е. $P_0(t)$ не возрастает. Следовательно, для $\frac{m-1}{N} \leqslant t \leqslant \frac{m}{N}$ выполняются неравенства $q^{\frac{m-1}{N}} \leqslant P_0(t) \leqslant q^{\frac{m}{N}}$. Приближая t последовательностью дробей m/N, приходим к равенству $P_0(t) = q^t$. Положим $\lambda = -\ln q > 0$. Тогда $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.
Теперь вычислим $P_k(t)$ при $k > 0$. Опять разобьем промежуток $[0, t]$ на N промежутков. Пусть B – событие, состоящее в том, что хотя бы на одном из промежутков зарегистрированы по крайней мере два события. Тогда противоположное событие $\overline{B}$ состоит в том, что в каждом промежутке регистрируется не более одного события. Заметим, что по свойству (3) вероятность B не превосходит $N \cdot o(t/N) = o(t)$, что стремится к нулю при $N \to \infty$. Рассмотрим теперь событие $\overline{B}_k$, состоящее в том, что на промежутке $[0, t]$ зарегистрировано ровно k событий и на каждом промежутке разбиения не более одного события. Вероятность отсутствия на одном промежутке разбиения равна $P_0(t/N) = e^{-\lambda t/N}$ и мы опять находимся в ситуации схемы Бернулли. Следовательно, имеем

$$P(\overline{B}_k) = C_n^k (e^{-\lambda t/N})^{N-k}(1 - e^{-\lambda t/N})^k.$$

Устремляем здесь $N \to \infty$ и в качестве предела получаем $\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$. С учетом сказанного про стремление к нулю $P(B)$ приходим к равенству

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},$$

т.е. получаем распределение Пуассона. Число λ называется **интенсивностью или параметром процесса** $X(t)$.

8 Марковские цепи. Существование стационарного распределения и сходимость к стационарному распределению.

8.1 Марковские цепи.

Пусть X - конечное множество, $|X| = N$. Это называют множеством состояний цепи. На декартовом произведении $X \times X$ задана функция $P(x,y)$, про которую известно, что $P(x,y) \geq 0, \forall x \in X$, $\sum\limits_{y \in X} P(x,y) = 1$ и называется это стохастическая матрица. Смысл этих чисел таков: $P(x,y)$ это вероятность из точки(состояния) x перейти в точку(состояние) y. Считается, что вы обязаны что-то сделать: либо остаться в этом же состоянии, либо перейти в новое.

8.2 Существование стационарного распределения и сходимость к стационарному распределению.

Возьмем произвольное вероятностное распределение μ. $\sum\limits_{x} \mu(x) = 1$. Рассмотрим новое вероятностное распределение $\sigma^m = \frac{\mu + \mu P + \mu P^2 + ... + \mu P^m}{m+1}$. То есть как мы будем искать стационарное распределение? Возьмем любое вероятностное распределение и начнем его гонять под действием этого преобразование, и будем брать среднее арифметическое(называется среднее по времени). Сейчас мы с вами докажем, что $\exists \sigma^{m_k}$, которая сходится к некоторому μ и μ - стационарное распределением. Но за этим должны стоять какие-то слова, иначе непонятно, в каком смысле подпоследовательность сходится в терминах вероятностного распределения. Вот тут полезно смотреть на μ как на вектор в конечно-мерном пространстве. То есть всякое вероятностное распределение μ на X - вектор на $\mathbb{R}^N$, принадлежащий множеству $\{t_1, ..., t_n | \forall i t_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{N} t_i = 1\}$, рассмотрим множество на размерность меньше $\{t_1, ..., t_{n-1} | \forall i t_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{N-1} t_i \leq 1\}$. Это множество вам ничего не напоминает? В двухмерном пространстве на графике это будет треугольник. В трехмерном - пирамидка. Можно воспринимать тогда как R^n, а можно как пирамидку, но в любом случае это множество ограниченное и замкнутое, а то есть компакт. Что такое компакт? Каким он свойством обладает? В компакте можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а значит во всякой последовательности существует сходящаяся подпоследовательность при чем она сходится к элементу этого множества. У нас как раз есть последовательность σ^m, и есть сходящаяся подпоследовательность $\sigma^{m_k} \to \mu$, которое является вероятностным распределением на X. Отображение $\mu \longmapsto \mu P$ - непрерывное отображение $\to \sigma^{m_k} P \xrightarrow{k \to \infty} \mu P$.

С другой стороны: $\sigma^{m_k} P = \frac{\nu P + \nu P^2 + ... + \nu P^{m_k+1}}{m_k+1} = \sigma^{m_k} - \frac{\nu}{m_k+1}^{\to 0} + \frac{\nu P^{m_k+1}}{m_k+1}^{\to 0} \xrightarrow{k \to \infty} \mu \to \mu = \mu P$