

# Летний коллоквиум по математическому анализу

hse-ami-open-exams

## Содержание

<b>1</b>	<b>Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.</b>	<b>2</b>
1.1	Понятие числового ряда, его частичной суммы. . . . .	2
1.2	Сходимость и расходимость числовых рядов. . . . .	2
1.3	Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. . . . .	2
1.4	Необходимый признак сходимости числового ряда. . . . .	2
<b>2</b>	<b>Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.</b>	<b>3</b>
2.1	Критерий Коши сходимости числового ряда. . . . .	3
2.2	Доказать расходимость гармонического ряда. . . . .	3
<b>3</b>	<b>Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.</b>	<b>4</b>
3.1	Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. . . . .	4
3.2	Теорема о сравнении и предельный признак сравнения. . . . .	4
<b>4</b>	<b>Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда <math>\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}</math> в зависимости от значений <math>\alpha</math> и <math>\beta</math>.</b>	<b>5</b>
4.1	Интегральный признак сходимости числового ряда. . . . .	5
4.2	Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений $\alpha$ и $\beta$ . (TODO) . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.</b>	<b>7</b>

# 1 Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.

## 1.1 Понятие числового ряда, его частичной суммы.

**Определение 1.** Числовая последовательность  $a_k$ , рассматриваемая вместе с последовательностью

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

ее частичных сумм, называется **числовым рядом**.

## 1.2 Сходимость и расходимость числовых рядов.

**Определение 2.** Числовой ряд называется **сходящимся**, если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \infty$$

и **расходящимся** иначе. Число  $S$  называется **суммой ряда**.

## 1.3 Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  – расходится (гармонический ряд)
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  – сходится
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$  – сходится
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  – расходится

## 1.4 Необходимый признак сходимости числового ряда.

**Теорема 1.** Необходимым условием сходимости числового ряда является стремление к 0 его  $n$ -го члена  $a_n$ .

*Доказательство.* Действительно, в противном случае не выполняется критерий Коши для числовой последовательности  $S_n$ . □

## 2 Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.

### 2.1 Критерий Коши сходимости числового ряда.

**Теорема 2.** Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности  $S_n$ . □

### 2.2 Доказать расходимость гармонического ряда.

**Теорема 3.** Гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится.

*Доказательство.* Воспользуемся критерием Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N \exists p \in \mathbb{N} |S_{n+p} - S_n| \geq \varepsilon$$

Пусть  $p = n$ . Тогда

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

□

### 3 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

#### 3.1 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы.

**Теорема 4.** Ряд с неотрицательными членами  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм  $\{S_n\}$  ограничена.

*Доказательство.* Необходимость следует из того, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной. Поскольку  $p_n \geq 0$ , то  $\{S_n\}$  монотонно возрастает, а тогда по теореме Вейерштрасса эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является ограниченной сверху. Тем самым доказана достаточность.  $\square$

#### 3.2 Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

**Теорема 5** (первый признак сравнения). Если  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq p_n \leq q_n$ , то

1. Из сходимости  $\sum q_n$  следует сходимость  $\sum p_n$
2. Из расходимости  $\sum p_n$  следует расходимость  $\sum q_n$

*Доказательство.*

1. Напрямую следует из теоремы 4.
2. Предположим, что  $\sum p_n$  расходится, а  $\sum q_n$  сходится. Тогда получаем противоречие с пунктом 1.

$\square$

**Теорема 6** (предельный признак сравнения). Если  $p_n > 0, q_n > 0$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} = l \in (0, +\infty)$ , то ряды  $\sum p_n$  и  $\sum q_n$  сходятся и расходятся одновременно.

*Доказательство.* По определению предела

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{p_n}{q_n} - l \right| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < \frac{p_n}{q_n} < l + \varepsilon \Leftrightarrow q_n(l - \varepsilon) < p_n < q_n(l + \varepsilon).$$

Осталось лишь воспользоваться теоремой 5.

$\square$

## 4 Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений $\alpha$ и $\beta$ .

### 4.1 Интегральный признак сходимости числового ряда.

**Теорема 7.** Пусть при любом  $k \in [1, +\infty)$  выполняется  $f(k) \geq 0$ , причем  $f(k) \searrow 0$ . Тогда сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  эквивалентна сходимости несобственного интеграла  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ .

*Доказательство.* При  $x \in [k, k+1]$ , в силу  $f(x) \searrow$ , имеем  $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ . Возьмем определенный интеграл от всех частей неравенства:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(k+1) dx &\leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx \\ f(k+1) &\leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \end{aligned}$$

Просуммируем теперь это неравенство по всем  $k$  от 1 до  $n$ . Получаем

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

Теперь, если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty}$  сходится, то из правой части неравенства следует, что сходится интеграл. Если же сходится интеграл, то из левой части неравенства вытекает, что сходится ряд. Аналогично с расходимостью.  $\square$

### 4.2 Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений $\alpha$ и $\beta$ . (TODO)

## 5 Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.

**Теорема 8** (признак Даламбера в допредельной форме). *Если  $\forall k \in \mathbb{N}$  выполнено*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1,$$

*то ряд  $\sum p_k$  сходится. В противном случае ряд расходится.*

*Доказательство.*

□

## 6 Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.