Летний экзамен по алгебре

hse-ami-open-exams

Содержание

1 Бинарные операции. Полугруппы, моноиды и группы. Коммутативные группы. Примеры групп. Порядок группы. Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$.

1.1 Бинарные операции.

Определение 1. *Множество с бинарной операцией – это множество M с заданным отображением*

$$M \times M \to M, \quad (a, b) \mapsto a \circ b.$$

Множество с бинарной операцией обычно обозначают $(M, \circ)$.

1.2 Полугруппы, моноиды и группы.

Определение 2. *Множество с бинарной операцией $(M, \circ)$ называется* ***полугруппой****, если данная бинарная операция* ***ассоциативна****, т.е.*

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \text{для всех } a, b, c \in M.$$

Определение 3. *Полугруппа $(S, \circ)$ называется* ***моноидом****, если в ней есть нейтральный элемент, т.е. такой элемент $e \in S$, что $e \circ a = a \circ e = a$ для любого $a \in S$.*

Определение 4. *Моноид $(S, \circ)$ называется* ***группой****, если для каждого элемента $a \in S$ найдется обратный элемент, т.е. такой $b \in S$, что $a \circ b = b \circ a = e$.*

1.3 Коммутативные группы.

Определение 5. *Группа $(G, \circ)$ называется* ***коммутативной*** *или* ***абелевой****, если групповая операция коммутативна, т.е. $a \circ b = b \circ a$ для любых $a, b \in G$.*

1.4 Примеры групп.

1. Числовые аддитивные группы: $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Z}_n, +)$.
2. Числовые мультипликативные группы: $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times), (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$, p – простое.
3. Группы матриц: $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}; SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.
4. Группы подстановок: симметрическая группа S_n – все подстановки длины n, $|S_n| = n!$; знакопеременная группа A_n – четные подстановки длины n, $|A_n| = n!/2$.

1.5 Порядок группы.

Определение 6. ***Порядок*** *группы G – это число элементов в G. Группа называется* ***конечной****, если ее порядок конечен, и* ***бесконечной*** *иначе.*

1.6 Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$.

Определение 7. *Подмножество H группы G называется* ***подгруппой****, если выполнены следующий три условия:*

1. *$e \in H$*
2. *$ab \in H$ для любых $a, b \in H$*
3. *$a^{-1} \in H$ для любого $a \in H$*

Утверждение 1. *Всякая подгруппа в $(\mathbb{Z}, +)$ имеет вид $k\mathbb{Z} = \{ka \mid a \in \mathbb{Z}\}$ для некоторого целого неотрицательного k.*

Доказательство. Пусть H – подгруппа в $\mathbb{Z}$. Если $H = \{0\}$, положим $k = 0$. Иначе пусть $k = \min(H \cap \mathbb{N})$ – наименьшее натуральное число, лежащее в H. Тогда $k\mathbb{Z} \subseteq H$. С другой стороны, если $a \in H$ и $a = qk + r$ – результат деления a на k с остатком, то $0 \leqslant r \leqslant k - 1$ и $r = a - qk \in H$. Отсюда $r = 0$ и $H = k\mathbb{Z}$. □

2 Подгруппы. Циклические подгруппы. Циклические группы. Порядок элемента. Связь между порядком элемента