Зимний коллоквиум по курсу «Теории вероятностей и математическая статистика»

hse-ami-open-exams

Содержание

1 Вероятностное пространство. Сигма алгебра событий. Борелевская сигма алгебра. Вероятностная мера. Непрерывность вероятностной меры.

1.1 Вероятностное пространство.

Определение 1. *Класс множеств, который содержит $\varnothing$ и Ω, замкнутый относительно операций $\cap$ и $\cup$, содержит вместе с каждым множеством его дополнение и называется **алгеброй множеств** или **алгеброй событий**.*

1.2 Сигма алгебра событий.

Определение 2. *Если алгебра событий замкнута относительно счетных объединений и пересечений, то ее называют σ-алгеброй.*

1.3 Борелевская сигма алгебра.

Определение 3.

- *Борелевская σ-алгебра – минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства.*
- *Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – σ-алгебра, порожденная отрезками, интервалами или полуинтервалами.*

1.4 Вероятностная мера.

Пусть A – σ-алгебра.

Определение 4. *Функция $P : A \to [0,1]$ называется **вероятностной мерой**, если*

- $P(\Omega) = 1$
- *Для любого набора попарно непересекащихся событий $\{A_n\} \in A$ выполняется $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$.*

1.5 Непрерывность вероятностной меры.

Теорема 1. *Пусть (Ω, A, P) – вероятностное пространство. Тогда*

1. *Если $\{A_n\} \in A, A_n \subset A_{n+1}$ и $A = \bigcup_n A_n$, то $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.*
2. *Если $\{A_n\} \in A, A_{n+1} \subset A_n$ и $A = \bigcap_n A_n$, то $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.*

Доказательство.

1. Пусть $C_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n, C_1 = A_1$. Тогда $A = \bigcup_n C_n$ и $A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^n C_k$. По свойству аддитивности вероятностной меры P получаем:

$$P(A) = \sum_n P(C_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n P(C_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_{n+1}).$$

2. Пусть $A'_n = \Omega \setminus A_n$. Тогда по закону де Моргана получаем первый пункт.

□

2 Случайная величина и ее распределение. Функция распределения случайной величины. Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.

2.1 Случайная величина и ее распределение.

2.2 Функция распределения случайной величины.

2.3 Совместное распределение двух случайных величин.

2.4 Свойства функции распределения.

3 Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

3.1 Независимые случайные величины.

3.2 Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей.

3.3 Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

4 Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства: линейность, монотонность, неравенство Чебышева. Математическое ожидание произведения независимых величин.

4.1 Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства.

4.2 Математическое ожидание произведения независимых величин.

5 Общее определение математического ожидания и его корректность. Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.

5.1 Общее определение математического ожидания и его корректность.

5.2 Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.

6 Дисперсия и ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, геометрический смысл.

6.1 Дисперсия и ее свойства.

6.2 Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, геометрический смысл.

7 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.

7.1 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.

8 Закон больших чисел в слабой форме. Метод Монте-Карло.

8.1 Закон больших чисел в слабой форме.

8.2 Метод Монте-Карло.