Летний коллоквиум по математическому анализу

hse-ami-open-exams

Содержание

1 Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.

1.1 Понятие числового ряда, его частичной суммы.

Определение 1. *Числовая последовательность a_k, рассматриваемая вкупе с последовательностью*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ее частичных сумм, называется ***числовым рядом****.*

1.2 Сходимость и расходимость числовых рядов.

Определение 2. *Числовой ряд называется* ***сходящимся****, если*

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$$

и ***расходящимся*** *иначе. Число S называется* ***суммой ряда****.*

1.3 Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится (гармонический ряд)
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ – сходится
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ – расходится

1.4 Необходимый признак сходимости числового ряда.

Теорема 1. *Необходимым условием сходимости числового ряда является стремление к 0 его n-го члена a_n.*

Доказательство. Действительно, в противном случае не выполняется критерий Коши для числовой последовательности S_n. □

2 Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.

2.1 Критерий Коши сходимости числового ряда.

Теорема 2. *Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geqslant N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности S_n. □

2.2 Доказать расходимость гармонического ряда.

Теорема 3. *Гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *расходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N \exists p \in \mathbb{N} |S_{n+p} - S_n| \geqslant \varepsilon$$

Пусть $p = n$. Тогда

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

□

3 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

3.1 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы.

Теорема 4. *Ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность частиных сумм $\{S_n\}$ ограничена.*

Доказательство. Необходимость следует из того, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной. Поскольку $p_n \geqslant 0$, то $\{S_n\}$ монотонно возрастает, а тогда по теореме Вейерштрасса эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является ограниченной сверху. Тем самым доказана достаточность. □

3.2 Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

Теорема 5 (первый признак сравнения). *Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leqslant p_n \leqslant q_n$, то*

1. *Из сходимости $\sum q_n$ следует сходимость $\sum p_n$*
2. *Из расходимости $\sum p_n$ следует расходимость $\sum q_n$*

Доказательство.

1. Напрямую следует из теоремы 4.
2. Предположим, что $\sum p_n$ расходится, а $\sum q_n$ сходится. Тогда получаем противоречие с пунктом 1.

□

Теорема 6 (предельный признак сравнения). *Если $p_n > 0, q_n > 0$ и $\exists \lim_{n\to\infty} = l \in (0, +\infty)$, то ряды $\sum p_n$ и $\sum q_n$ сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. По определению предела

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{p_n}{q_n} - l\right| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < \frac{p_n}{q_n} < l + \varepsilon \Leftrightarrow q_n(l-\varepsilon) < p_n < q_n(l+\varepsilon).$$

Осталось лишь воспользоваться теоремой 5. □

4 Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \ln^\beta k}$ в зависимости от значений α и β.

4.1 Интегральный признак сходимости числового ряда.

Теорема 7. *Пусть при любом $k \in [1, +\infty)$ выполняется $f(k) \geqslant 0$, причем $f(k) \searrow 0$. Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ эквивалентна сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.*

Доказательство. При $x \in [k, k+1]$, в силу $f(x) \searrow$, имеем $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$. Возьмем определенный интеграл от всех частей неравенства:

$$\int\limits_k^{k+1} f(k+1)dx \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(k)dx$$

$$f(k+1) \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k)$$

Просуммируем теперь это неравенство по всем k от 1 до n. Получаем

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Теперь, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$ сходится, то из правой части неравенства следует, что сходится интеграл. Если же сходится интеграл, то из левой части неравенства вытекает, что сходится ряд. Аналогично с расходимостью. □

4.2 Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \ln^\beta k}$ в зависимости от значений α и β. (TODO)

5 Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.

Теорема 8 (признак Даламбера в допредельной форме)**.** *Если* $\forall k \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1 \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1 \right),$$

то ряд $\sum p_k$ *сходится (расходится).*

Доказательство. Положим $p'_k = q^k$. Тогда

$$\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = q < 1 \left(\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = 1 \right)$$

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \right)$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится (расходится) и, пользуясь первым признаком сравнения (теорема 5), делаем вывод, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). □

Теорема 9 (признак Даламбера в предельной форме)**.** *Пусть существует*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

Тогда при $L < 1$ *ряд* $\sum p_k$ *сходится, при* $L > 1$ *расходится, а при* $L = 1$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. Как мы знаем,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geqslant N$ выполняется

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon$$

Теперь если $L > 1$, то мы можем выбрать такое ϵ, что $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Но тогда

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon < 1$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ сходится.
Пусть теперь $L > 1$. Выберем такое ε, что $L - \varepsilon = 1$. Получаем

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \epsilon = 1$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ расходится.
Наконец, рассмотрим ряды $\sum \frac{1}{k}$ и $\sum \frac{1}{k^2}$. В обоих случаях $L = 1$, но ряд $\sum \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum \frac{1}{k^2}$ сходится. □

5.1 Примеры.

1. $\sum \frac{1}{n!}$ – сходится

2. $\sum n!$ – расходится

6 Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.

Теорема 10 (признак Коши в допредельной форме)**.** *Если* $\forall k \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1 \, (\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1) \, ,$$

то ряд $\sum p_k$ *сходится (расходится).*

Доказательство. Положим $p'_k = q^k$. Тогда

$$\sqrt[k]{p'_k} = q < 1 \left(\sqrt[k]{p'_k} = 1 \right)$$

$$\sqrt[k]{p_k} \leqslant \sqrt[k]{p'_k} \left(\sqrt[k]{p_k} \geqslant \sqrt[k]{p'_k} \right)$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится (расходится) и, пользуясь первым признаком сравнения (теорема 5), делаем вывод, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). □

Теорема 11 (признак Коши в предельной форме)**.** *Пусть существует*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Тогда при $L < 1$ *ряд* $\sum p_k$ *сходится, при* $L > 1$ *расходится, а при* $L = 1$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. Как мы знаем,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geqslant N$ выполняется

$$L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$$

Теперь если $L > 1$, то мы можем выбрать такое ϵ, что $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Но тогда

$$\sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon < 1$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ сходится.
Пусть теперь $L > 1$. Выберем такое ε, что $L - \varepsilon = 1$. Получаем

$$\sqrt[k]{p_k} > L - \epsilon = 1$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ расходится.
Наконец, рассмотрим ряды $\sum \frac{1}{k}$ и $\sum \frac{1}{k^2}$. В обоих случаях $L = 1$, но ряд $\sum \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum \frac{1}{k^2}$ сходится. □

6.1 Примеры.

1. $\sum \frac{n^n}{e^n}$ – расходится
2. $\sum \frac{n^2}{e^n}$ – сходится

7 Абсолютно сходящиеся ряды. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение 3. *Будем говорить, что ряд* $\sum u_k$ *сходится абсолютно, если* $\sum |u_k|$ *сходится.*

Теорема 12. *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. По критерию Коши имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geqslant N \forall p \in N \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Осталось лишь воспользоваться неравенством

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

□

8 Определение перестановки членов ряда. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

8.1 Определение перестановки членов ряда.

Определение 4. *Говорят, что два ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ получаются друг из друга перестановкой членов, если существует такое взаимо-однозначное отображение φ множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел на себя, что $b_n = a_{\varphi(n)}$.*

8.2 Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства).

Теорема 13. *Если числовой ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно, то любая его перестановка членов сходится к той же самой сумме.*

8.3 Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 14. *Если $\sum u_k$ и $\sum v_k$ сходятся абсолютно к u и v соответственно, то ряд $\sum w_k$, составленный из всевозможных произведений $u_i \cdot v_j$ сходится абсолютно к $u \cdot v$.*

Доказательство. Докажем сначала, что ряд $\sum w_k$ сходится абсолютно. Возьмем произвольное n_0 и рассмотрим $\sum_{k=1}^{n_0} |w_k|$. Эта сумма состоит из членов вида $|u_i v_j|$. Найдем среди этих индексов i и j наибольший индекс m, входящий в исследуемую сумму. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n_0} |w_k| \leqslant (|u_1| + ... + |u_m|) \cdot (|v_1| + ... + |v_m|) \leqslant M_1 M_2$$

$$\left.\begin{matrix} (|u_1| + ... + |u_m|) \leqslant M_1 \\ (|v_1| + ... + |v_m|) \leqslant M_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n_0} |w_k| \leqslant M_1 M_2$$

Ограничения M_1 и M_2 следуют из абсолютной сходимости рядов $\sum u_k$ и $\sum v_k$. Мы ограничили n_0-ую частичную сумму исследуемого ряда $\sum |w_k|$, значит этот ряд сходится. Осталось лишь доказать, что он сходится к uv.

Пусть данный ряд сходится к S. Заметим, что в силу теоремы 8.2 мы можем как угодно переставлять члены ряда w_i, не влияя на сходимость. Иными словами, любая последовательность или подпоследовательность частичный сумм будет сходиться к S. Тогда рассмотрим последовательность частичных сумм $\{S_{m^2}\}$, где $S_{m^2} = (u_1 + ... + u_m) \cdot (v_1 + ... + v_m)$. Но

$$\left.\begin{matrix} \lim_{m\to\infty}(u_1 + ... + u_m) = u \\ \lim_{m\to\infty}(v_1 + ... + v_m) = v \end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{m^2} \to uv$$

$\square$