

Летний экзамен по алгебре

hse-ami-open-exams

Содержание

1	Бинарные операции. Полугруппы, моноиды и группы. Коммутативные группы. Примеры групп. Порядок группы. Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$	3
1.1	Бинарные операции.	3
1.2	Полугруппы, моноиды и группы.	3
1.3	Коммутативные группы.	3
1.4	Примеры групп.	3
1.5	Порядок группы.	3
1.6	Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$	3
2	Подгруппы. Циклические подгруппы. Циклические группы. Порядок элемента. Связь между порядком элемента и порядком порождаемой им циклической подгруппы.	4
2.1	Циклические подгруппы.	4
2.2	Циклические группы.	4
2.3	Порядок элемента.	4
2.4	Связь между порядком элемента и порядком порождаемой им циклической подгруппы.	4
3	Смежные классы. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа.	5
3.1	Смежные классы.	5
3.2	Индекс подгруппы.	5
3.3	Теорема Лагранжа.	5
4	Пять следствий из теоремы Лагранжа.	6
4.1	Следствие 1.	6
4.2	Следствие 2.	6
4.3	Следствие 3.	6
4.4	Следствие 4.	6
4.5	Следствие 5.	6
5	Нормальные подгруппы и факторгруппы.	7
5.1	Нормальные подгруппы.	7
5.1.1	Эквивалентность условий нормальности группы.	7
5.2	Факторгруппы.	7
5.2.1	Корректность.	7
5.2.2	Примеры факторгрупп.	7
6	Гомоморфизмы групп. Простейшие свойства гомоморфизмов. Изоморфизмы групп. Ядро и образ гомоморфизма групп, их свойства.	8
6.1	Гомоморфизмы групп.	8
6.2	Простейшие свойства гомоморфизмов.	8
6.3	Изоморфизмы групп.	8
6.4	Ядро и образ гомоморфизма групп, их свойства.	8
7	Теорема о гомоморфизме для групп.	9
8	Классификация циклических групп.	10
9	Прямое произведение групп. Разложение конечной циклической группы.	11
9.1	Прямое произведение групп.	11
9.2	Разложение конечной циклической группы.	11

10 Подгруппы p-крючения в абелевых группах. Разложение конечной абелевой группы в прямое произведение подгрупп p-крючения.	12
10.1 Подгруппы p -крючения в абелевых группах.	12
10.2 Разложение конечной абелевой группы в прямое произведение подгрупп p -крючения.	12
11 Примарные абелевы группы. Теорема о строении конечных абелевых групп, доказательство единственности.	13
11.1 Примарные абелевы группы.	13
11.2 Теорема о строении конечных абелевых групп, доказательство единственности.	13
12 Экспонента конечной абелевой группы и критерий цикличности.	14
13 Криптография с открытым ключом. Задача дискретного логарифмирования. Система Диффи-Хеллмана обмена ключами. Криптосистема Эль-Гамала.	15
13.1 Задача дискретного логарифмирования.	15
13.2 Система Диффи-Хеллмана обмена ключами.	15
13.3 Криптосистема Эль-Гамала.	15
14 Кольца. Коммутативные кольца. Обратимые элементы, делители нуля и нильпотенты. Примеры колец. Поля. Критерий того, что кольцо вычетов является полем.	16
14.1 Кольца.	16
14.2 Коммутативные кольца.	16
14.3 Обратимые элементы, делители нуля и нильпотенты.	16
14.4 Примеры колец.	16
14.5 Поля.	16
14.6 Критерий того, что кольцо вычетов является полем.	17
15 Идеалы колец. Факторкольцо кольца по идеалу. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец. Ядро и образ гомоморфизма колец. Теорема о гомоморфизме колец.	18
15.1 Идеалы колец.	18
15.2 Факторкольцо кольца по идеалу.	18
15.3 Гомоморфизмы и изоморфизмы колец.	18
15.4 Ядро и образ гомоморфизма колец.	18
15.5 Теорема о гомоморфизме колец.	19

1 Бинарные операции. Полугруппы, моноиды и группы. Коммутативные группы. Примеры групп. Порядок группы. Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$

1.1 Бинарные операции.

Определение 1. Множество с бинарной операцией – это множество M с заданным отображением

$$M \times M \rightarrow M, \quad (a, b) \mapsto a \circ b.$$

Множество с бинарной операцией обычно обозначают (M, \circ) .

1.2 Полугруппы, моноиды и группы.

Определение 2. Множество с бинарной операцией (M, \circ) называется **полугруппой**, если данная бинарная операция **ассоциативна**, т.е.

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \text{для всех } a, b, c \in M.$$

Определение 3. Полугруппа (S, \circ) называется **моноидом**, если в ней есть нейтральный элемент, т.е. такой элемент $e \in S$, что $e \circ a = a \circ e = a$ для любого $a \in S$.

Определение 4. Моноид (S, \circ) называется **группой**, если для каждого элемента $a \in S$ найдется обратный элемент, т.е. такой $b \in S$, что $a \circ b = b \circ a = e$.

1.3 Коммутативные группы.

Определение 5. Группа (G, \circ) называется **коммутативной** или **абелевой**, если групповая операция коммутативна, т.е. $a \circ b = b \circ a$ для любых $a, b \in G$.

1.4 Примеры групп.

1. Числовые аддитивные группы: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Z}_n, +)$.
2. Числовые мультипликативные группы: $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$, p – простое.
3. Группы матриц: $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$; $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.
4. Группы подстановок: симметрическая группа S_n – все подстановки длины n , $|S_n| = n!$; знакопеременная группа A_n – четные подстановки длины n , $|A_n| = n!/2$.

1.5 Порядок группы.

Определение 6. **Порядок** группы G – это число элементов в G . Группа называется **конечной**, если ее порядок конечен, и **бесконечной** иначе.

1.6 Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$

Определение 7. Подмножество H группы G называется **подгруппой**, если выполнены следующий три условия:

1. $e \in H$
2. $ab \in H$ для любых $a, b \in H$
3. $a^{-1} \in H$ для любого $a \in H$

Утверждение 1. Всякая подгруппа в $(\mathbb{Z}, +)$ имеет вид $k\mathbb{Z} = \{ka \mid a \in \mathbb{Z}\}$ для некоторого целого неотрицательного k .

Доказательство. Пусть H – подгруппа в \mathbb{Z} . Если $H = \{0\}$, положим $k = 0$. Иначе пусть $k = \min(H \cap \mathbb{N})$ – наименьшее натуральное число, лежащее в H . Тогда $k\mathbb{Z} \subseteq H$. С другой стороны, если $a \in H$ и $a = qk + r$ – результат деления a на k с остатком, то $0 \leq r \leq k - 1$ и $r = a - qk \in H$. Отсюда $r = 0$ и $H = k\mathbb{Z}$. \square

2 Подгруппы. Циклические подгруппы. Циклические группы. Порядок элемента. Связь между порядком элемента и порядком порождаемой им циклической подгруппы.

2.1 Циклические подгруппы.

Определение 8. Пусть G – группа и $g \in G$. **Циклической подгруппой**, порожденной элементом g , называется подмножество $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Циклическая подгруппа, порожденная элементом g , обозначается $\langle g \rangle$. Элемент g называется **порождающим** или **образующим** для подгруппы $\langle g \rangle$.

2.2 Циклические группы.

Определение 9. Группа G называется **циклической**, если найдется такой элемент $g \in G$, что $G = \langle g \rangle$.

2.3 Порядок элемента.

Определение 10. Пусть G – группа и $g \in G$. **Порядком элемента g** называется такое наименьшее натуральное число m , что $g^m = e$. Если такого натурального числа m не существует, говорят, что порядок элемента g равен бесконечности. Порядок элемента обозначается $\text{ord}(g)$.

2.4 Связь между порядком элемента и порядком порождаемой им циклической подгруппы.

Утверждение 2. Пусть G – группа и $g \in G$. Тогда $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$.

Доказательство. Заметим, что если $g^k = g^s$, то $g^{k-s} = e$. Поэтому если элемент g имеет бесконечный порядок, то все элементы $g^n, n \in \mathbb{Z}$, попарно различны и подгруппа $\langle g \rangle$ содержит бесконечно много элементов. Если же порядок элемента g равен m , то из минимальности числа m следует, что элементы $e = g^0, g = g^1, g^2, \dots, g^{m-1}$ попарно различны. Далее, для всякого $n \in \mathbb{Z}$ мы имеем $n = mq + r$, где $0 \leq r \leq m-1$, и

$$g^n = g^{mq+r} = (g^m)^q g^r = e^q g^r = g^r.$$

Следовательно, $\langle g \rangle = \{e, g, \dots, g^{m-1}\}$ и $|\langle g \rangle| = m$. □

3 Смежные классы. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа.

3.1 Смежные классы.

Определение 11. Пусть G – группа, $H \subseteq G$ – подгруппа и $g \in G$. **Левым смежным классом** элемента g группы G по подгруппе H называется подмножество

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

3.2 Индекс подгруппы.

Определение 12. Пусть G – группа и $H \subseteq G$ – подгруппа. **Индексом подгруппы H** в группе G называется число левых смежных классов G по H . Индекс группы G по подгруппе H обозначается $[G : H]$.

3.3 Теорема Лагранжа.

Лемма 1. Пусть G – группа, $H \subseteq G$ – ее подгруппа и $g_1, g_2 \in G$. Тогда либо $g_1H = g_2H$, либо $g_1H \cap g_2H = \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$, т.е. $g_1h_1 = g_2h_2$ для некоторых $h_1, h_2 \in H$. Нужно доказать, что $g_1H = g_2H$. Заметим, что $g_1H = g_2h_2h_1^{-1}H \subseteq g_2H$. Обратное включение доказывается аналогично. \square

Лемма 2. Пусть G – группа и $H \subseteq G$ – конечная подгруппа. Тогда $|gH| = |H|$ для любого $g \in G$.

Доказательство. Поскольку $gH = \{gh \mid h \in H\}$, в gH элементов не больше, чем в H . Если $gh_1 = gh_2$, то домножаем слева на g^{-1} и получаем $h_1 = h_2$. Значит, все элементы вида gh , где $h \in H$, попарно различны, откуда $|gH| = |H|$. \square

Теорема 1. Пусть G – конечная группа и $H \subseteq G$ – подгруппа. Тогда

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

Доказательство. Каждый элемент группы G лежит в (своем) левом смежном классе по подгруппе H , разные смежные классы не пересекаются (лемма 1) и каждый из них содержит по $|H|$ элементов (лемма 2). \square

4 Пять следствий из теоремы Лагранжа.

4.1 Следствие 1.

Следствие 1. Пусть G – конечная группа и $H \subseteq G$ – подгруппа. Тогда $|H|$ делит $|G|$.

4.2 Следствие 2.

Следствие 2. Пусть G – конечная группа и $g \in G$. Тогда $\text{ord}(g)$ делит $|G|$.

Доказательство. Это вытекает из следствия 1 и утверждения 2. □

4.3 Следствие 3.

Следствие 3. Пусть G – конечная группа и $g \in G$. Тогда $g^{|G|} = e$.

Доказательство. Согласно следствию 2 мы имеем $|G| = \text{ord}(g) \cdot s$, откуда $g^{|G|} = (g^{\text{ord}(g)})^s = e^s = e$. □

4.4 Следствие 4.

Следствие 4. Пусть G – группа. Предположим, что $|G|$ – простое число. Тогда G – циклическая группа, порождаемая любым своим неединичным элементом.

Доказательство. Пусть $g \in G$ – произвольный неединичный элемент. Тогда циклическая подгруппа $\langle g \rangle$ содержит более одного элемента и $|\langle g \rangle|$ делит $|G|$ по следствию 1. Значит, $|\langle g \rangle| = |G|$, откуда $G = \langle g \rangle$. □

4.5 Следствие 5.

Следствие 5 (малая теорема Ферма). Пусть p – простое число и $\text{НОД}(a, p) = 1$. Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Доказательство. Применим следствие 3 к группе $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$. □

5 Нормальные подгруппы и факторгруппы.

5.1 Нормальные подгруппы.

Определение 13. Подгруппа H группы G называется **нормальной**, если $gH = Hg$ для любого $g \in G$.

5.1.1 Эквивалентность условий нормальности группы.

Утверждение 3. Для подгруппы $H \subseteq G$ следующие условия эквивалентны:

1. H нормальна
2. $gHg^{-1} \subseteq H$ для любого $g \in G$
3. $gHg^{-1} = H$ для любого $g \in G$

Доказательство. (1) \Rightarrow (2) Пусть $h \in H$ и $g \in G$. Поскольку $gH = Hg$, имеем $gh = h'g$ для некоторого $h' \in H$. Тогда $ghg^{-1} = h'gg^{-1} = h' \in H$.

(2) \Rightarrow (3) Так как $gHg^{-1} \subseteq H$, остается проверить обратное включение. Для $h \in H$ имеем $h = gg^{-1}hgg^{-1} = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$, поскольку $g^{-1}hg \in H$ в силу пункта (2), где вместо g взято g^{-1} .

(3) \Rightarrow (1) Для произвольного $g \in G$ в силу (3) имеем $gH = gHg^{-1}g \subseteq Hg$, так что $gH \subseteq Hg$. Аналогично проверяется обратное включение. □

5.2 Факторгруппы.

5.2.1 Корректность.

Обозначим через G/H множество смежных классов группы G по нормальной подгруппе H . На G/H можно определить бинарную операцию следующим образом:

$$(g_1H)(g_2H) := g_1g_2H.$$

Утверждение 4. Указанная выше операция корректна.

Доказательство. Заменим g_1 и g_2 другими представителями g_1h_1 и g_2h_2 тех же смежных классов. Нужно проверить, что $g_1g_2H = g_1h_1g_2h_2H$. Это следует из того, что $g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2(g_2^{-1}h_1g_2)h_2$ и $g_2^{-1}h_1g_2$ лежит в H . Ясно, что указанная операция на множестве G/H ассоциативна, обладает нейтральным элементом eH и для каждого элемента gH есть обратный элемент $g^{-1}H$. □

Определение 14. Множество G/H с указанной операцией называется **факторгруппой** группы G по нормальной подгруппе H .

5.2.2 Примеры факторгрупп.

1. Если $G = (\mathbb{Z}, +)$ и $H = n\mathbb{Z}$, то G/H – это в точности группа вычетов $(\mathbb{Z}_n, +)$.

6 Гомоморфизмы групп. Простейшие свойства гомоморфизмов. Изоморфизмы групп. Ядро и образ гомоморфизма групп, их свойства.

6.1 Гомоморфизмы групп.

Определение 15. Пусть G и F – группы. Отображение $\varphi : G \rightarrow F$ называется **гомоморфизмом**, если $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любых $a, b \in G$.

6.2 Простейшие свойства гомоморфизмов.

Лемма 3. Пусть $\varphi : G \rightarrow F$ – гомоморфизм групп и пусть e_G и e_F – нейтральные элементы групп G и F соответственно. Тогда

$$(a) \quad \varphi(e_G) = e_F$$

$$(б) \quad \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \text{ для любого } a \in G.$$

Доказательство. (а) Имеем $\varphi(e_G) = \varphi(e_G e_G) = \varphi(e_G)\varphi(e_G)$. Теперь умножая крайние части этого равенства на $\varphi(e_G)^{-1}$ (например, слева) получим $e_F = \varphi(e_G)$.

(б) Имеем $\varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(e_G) = e_F$, откуда $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$. \square

6.3 Изоморфизмы групп.

Определение 16. Гомоморфизм групп $\varphi : G \rightarrow F$ называется **изоморфизмом**, если отображение φ биективно.

6.4 Ядро и образ гомоморфизма групп, их свойства.

Определение 17. С каждым гомоморфизмом групп $\varphi : G \rightarrow F$ связаны его ядро

$$\text{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_F\}$$

и образ

$$\text{Im}(\varphi) = \{a \in F \mid \exists g \in G : \varphi(g) = a\}.$$

Ясно, что $\text{Ker}(\varphi) \subseteq G$ и $\text{Im}(\varphi) \subseteq F$ – подгруппы.

Лемма 4. Гомоморфизм групп $\varphi : G \rightarrow F$ инъективен тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$.

Доказательство. Ясно, что если φ инъективен, то $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$. Обратно, пусть $g_1, g_2 \in G$ и $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Тогда $g_1^{-1}g_2 \in \text{Ker}(\varphi)$, поскольку $\varphi(g_1^{-1}g_2) = \varphi(g_1^{-1})\varphi(g_2) = \varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2) = e_F$. Отсюда $g_1^{-1}g_2 = e_G$ и $g_1 = g_2$. \square

Следствие 6. Гомоморфизм групп $\varphi : G \rightarrow F$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$ и $\text{Im}(\varphi) = F$.

Утверждение 5. Пусть $\varphi : G \rightarrow F$ – гомоморфизм групп. Тогда подгруппа $\text{Ker}(\varphi)$ нормальна в G .

Доказательство. Достаточно проверить, что $g^{-1}hg \in \text{Ker}(\varphi)$ для любых $g \in G$ и $h \in \text{Ker}(\varphi)$. Это следует из цепочки равенств

$$\varphi(g^{-1}hg) = \varphi(g^{-1})\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(g^{-1})e_F\varphi(g) = \varphi(g^{-1})\varphi(g) = e_F.$$

\square

7 Теорема о гомоморфизме для групп.

Теорема 2. Пусть $\varphi : G \rightarrow F$ – гомоморфизм групп. Тогда группа $\text{Im}(\varphi)$ изоморфна факторгруппе $G/\text{Ker}(\varphi)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\psi : G/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow F$, заданное формулой $\psi(g \text{Ker}(\varphi)) = \varphi(g)$. Проверка корректности: равенство $\varphi(gh_1) = \varphi(gh_2)$ для любых $h_1, h_2 \in \text{Ker}(\varphi)$ следует из цепочки равенств

$$\varphi(gh_1) = \varphi(g)\varphi(h_1) = \varphi(g) = \varphi(g)\varphi(h_2) = \varphi(gh_2).$$

Отображение ψ сюръективно по построению и инъективно в силу того, что $\varphi(g) = e_F$ тогда и только тогда, когда $g \in \text{Ker}(\varphi)$ (т.е. $g \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi)$). Остается проверить, что ψ – гомоморфизм:

$$\psi((g \text{Ker}(\varphi))(g' \text{Ker}(\varphi))) = \psi(gg' \text{Ker}(\varphi)) = \varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = \psi(g \text{Ker}(\varphi))\psi(g' \text{Ker}(\varphi)).$$

□

8 Классификация циклических групп.

Утверждение 6. Пусть G – циклическая группа. Тогда:

1. Если $|G| = \infty$, то $G \simeq (\mathbb{Z}, +)$
2. Если $|G| < \infty$, то $G \simeq (\mathbb{Z}_n, +)$

Доказательство. По определению, если G – циклическая, то $G = \langle g \rangle$ для некоторого $g \in G$.

1. $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, \varphi : k \mapsto g^k$
Это гомоморфизм и биекция \Rightarrow изоморфизм.
2. $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, \varphi : k \mapsto g^k$
Рассмотрим, куда переходит $k + ns$, где $0 \leq k \leq n - 1$
 $k + ns \mapsto g^{k+ns} = g^k g^{ns} = g^k (g^n)^s = g^k$.

□


9 Прямое произведение групп. Разложение конечной циклической группы.

9.1 Прямое произведение групп.

Определение 18. *Прямым произведением групп G_1, \dots, G_m называется множество*


$$G_1 \times \dots \times G_m = \{(g_1, \dots, g_m) \mid g_1 \in G_1, \dots, g_m \in G_m\}$$

с операцией $(g_1, \dots, g_m)(g'_1, \dots, g'_m) = (g_1g'_1, \dots, g_mg'_m)$. Ясно, что эта операция ассоциативна, обладает нейтральным элементом $(e_{G_1}, \dots, e_{G_m})$ и для каждого элемента (g_1, \dots, g_m) есть обратный элемент $(g_1^{-1}, \dots, g_m^{-1})$.

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o>

9.2 Разложение конечной циклической группы.

Определение 19. *Группа G раскладывается в прямое произведение своих подгрупп H_1, \dots, H_m , если отображение $H_1 \times \dots \times H_m \rightarrow G, (h_1, \dots, h_m) \mapsto h_1 \cdot \dots \cdot h_m$ является изоморфизмом.*

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=293>

Теорема 3. *Пусть $n = ml$ – разложение натурального числа n на два взаимно простых множителя. Тогда имеет место изоморфизм групп*


$$\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l, \quad (k \bmod n) \mapsto (k \bmod m, k \bmod l).$$


Поскольку m и l делят n , отображение φ определено корректно. Ясно, что φ – гомоморфизм.

Далее, $a \bmod n \in \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow a \bmod m = 0, a \bmod l = 0 \Rightarrow a$ делится на m , a делится на l . Так как $\text{НОД}(m, l) = 1$, то a делится на $n = ml \Rightarrow a \bmod n = 0 \Rightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Следовательно, гомоморфизм φ инъективен. Поскольку множества \mathbb{Z}_n и $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_l$ содержат одинаковое число элементов, отображение φ биективно. \square

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=585>

Следствие 7. *Пусть $n \geq 2$ – натуральное число и $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ – его разложение в произведение простых множителей (где $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$). Тогда имеет место изоморфизм групп*

$$\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}.$$

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=1061>


10 Подгруппы p -крючения в абелевых группах. Разложение конечной абелевой группы в прямое произведение подгрупп p -крючения.

10.1 Подгруппы p -крючения в абелевых группах.

Определение 20. Пусть $(A, +)$ – абелева группа, p – простое число. Положим


$$T_p(A) := \{a \in A \mid \exists k \geq 0 : p^k \cdot a = 0\} = \{a \in A \mid \exists m \geq 0 : \text{ord}(a) = p^m\}$$

– подгруппа в A . Тогда $T_p(A)$ называется **подгруппой p -крючения**.

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=1260>


10.2 Разложение конечной абелевой группы в прямое произведение подгрупп p -крючения.

Утверждение 7 (без доказательства). Пусть $|A| < \infty$ и $T_p(A) = A$ для некоторого простого p . Тогда $A \simeq \mathbb{Z}_{p^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p^{k_s}}, k_i \geq 1$, причем число множителей и их порядки определены однозначно (с точностью до перестановки).

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=1474>

Утверждение 8. Пусть $|A| < \infty, |A| = p_1^{k_1} \times \dots \times p_s^{k_s}$ – разложение на простые множители. Тогда $A = T_{p_1}(A) \times \dots \times T_{p_s}(A)$.


Доказательство. Нужно доказать, что отображение $\varphi : T_{p_1}(A) \times \dots \times T_{p_s}(A) \rightarrow A, (a_1, \dots, a_s) \mapsto a_1 + \dots + a_s$ является изоморфизмом. Ясно, что φ – гомоморфизм. Докажем инъективность. Пусть $(a_1, \dots, a_s) \in T_{p_1}(A) \times \dots \times T_{p_s}(A)$, такое что $a_1 + \dots + a_s = 0$. Для любого $i, 1 \leq i \leq s$ $\text{ord}(a_i) = p_i^{m_i}, m_i \geq 0$. При фиксированном i умножим $a_1 + \dots + a_s = 0$ на $n_i = p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_{i-1}^{m_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{m_{i+1}} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s}$ и получим $n_i \cdot a_i = 0$. Следовательно, n_i делится на $p_i^{m_i} \Rightarrow m_i = 0 \Rightarrow \text{ord}(a_i) = 1 \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow \text{Ker}(\varphi) = 0$. Докажем сюръективность. $a \in A \Rightarrow \text{ord}(a) = p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_s^{m_s}$ по следствию 7 о разложении конечной циклической группы. $\langle a \rangle = \langle b_1 \rangle \times \dots \times \langle b_s \rangle$, где $b_i \in \langle a \rangle$ и $\text{ord}(b_i) = p_i^{m_i} \Rightarrow a = a_1 + \dots + a_s$, где $a_i \in \langle b_i \rangle \subseteq T_{p_i}(A)$. \square

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=1635>

11 Примарные абелевы группы. Теорема о строении конечных абелевых групп, доказательство единственности.

11.1 Примарные абелевы группы.

Определение 21. Конечная абелева группа A называется **примарной**, если $|A| = p^k$ для некоторого простого p .

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=2379>


11.2 Теорема о строении конечных абелевых групп, доказательство единственности.

Теорема 4. Пусть $|A| < \infty$ – конечная абелева группа. Тогда $A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}$, где p_i – (не обязательно различные) простые числа ($k_i \geq 1$), причем в этом разложении число примарных циклических множителей и их порядки (с точностью до перестановки) определены однозначно.

Доказательство. Существование следует из утверждений 7 и 8. Докажем единственность. Зафиксируем простое p . Тогда в разложении $A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}$

$$\prod_{p_i=p} \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} \subseteq T_p(A).$$


Пусть $a \in A$. Тогда $a = (n_1, \dots, n_s)$, $n_i \in \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}$. Если $p^k \cdot a = 0$ для некоторого k , то для любого i $p^k \cdot n_i$ делится на $p_i^{k_i}$. Если $p \neq p_i$, то n_i делится на $p_i^{k_i} \Rightarrow n_i \equiv 0 \pmod{p_i^{k_i}} \Rightarrow a \in T_p(A) \Leftrightarrow$ для любого i с условием $p \neq p_i$ $n_i = 0$ в $\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} \Rightarrow T_p(A) \subseteq \prod_{p_i=p} \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}$. Итог: достаточно доказать единственность каждого $T_p(A)$. Теперь пусть $B = T_p(A) \simeq \mathbb{Z}_{p^{m_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p^{m_r}}$. Индукция по $|B|$. База: $|B| = p \Rightarrow$ по следствию 4 из теоремы Лагранжа $B \simeq \mathbb{Z}_p$. Теперь пусть $|B| > p$, $|B| = p^m$, где $m = m_1 + \dots + m_r$. Рассмотрим подгруппу $pB \subseteq B$, где $pB = \{pb \mid b \in B\} \Rightarrow pB \simeq \mathbb{Z}_{p^{m_1-1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p^{m_r-1}}$, в частности $|pB| < |B|$. Если $m_i = 1$, то соответствующий множитель исчезает. По предположению индукции набор ненулевых чисел среди $m_1 - 1, \dots, m_r - 1$ определен однозначно с точностью до перестановки. Следовательно, однозначно восстанавливаются все m_i с условием $m_i > 1$. Число $m_i = 1$ однозначно восстанавливается из условия $m_1 + \dots + m_r = m$. \square

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=2507>

12 Экспонента конечной абелевой группы и критерий цикличности.

Определение 22. Пусть A – конечная абелева группа. *Экспонента* группы A – это число


$$\exp(A) = \text{НОК}\{\text{ord}(a) \mid a \in A\} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid na = 0 \forall a \in A\}$$

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=3792>

Утверждение 9. Пусть A – конечная абелева группа. Тогда $\exp(A) = |A| \Leftrightarrow A$ – циклическая группа.

Доказательство. $\Leftarrow A$ – циклическая $\Rightarrow A \simeq \mathbb{Z}_n \Rightarrow \text{ord}(a) = n = |A| \Rightarrow \exp(A) = |A|$

$\Rightarrow \exp(A) = |A|$ Знаем, что $A \simeq T_{p_1}(A) \times \dots \times T_{p_s}(A)$, где $|A| = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$. Пусть $b_i \in T_{p_i}(A)$ – элемент наибольшего порядка $\Rightarrow \text{ord}(b_i) = p_i^{m_i}$. Тогда для любого $a_i \in T_{p_i}(A), \dots, a_s \in T_{p_s}(A)$ получаем $\text{ord}(a_i) = p_i^{l_i}$, где $l_i \leq m_i$. $\text{ord}(a_1 + \dots + a_s) = \text{ord}(a_1) \cdot \dots \cdot \text{ord}(a_s)$ делит $\text{ord}(b_1) \cdot \dots \cdot \text{ord}(b_s) = \text{ord}(b_1 + \dots + b_s)$. Следовательно, $\exp(A) = \text{ord}(b_1 + \dots + b_s) \Rightarrow |A| = \exp(A) = |\langle b_1 + \dots + b_s \rangle| \Rightarrow \langle b_1 + \dots + b_s \rangle = A \Rightarrow A$ – циклическая группа. \square

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=4028>

13 Криптография с открытым ключом. Задача дискретного логарифмирования. Система Диффи-Хеллмана обмена ключами. Криптосистема Эль-Гамала.

Пусть у нас есть G – конечная абелева группа. И также есть элемент $g \in G$, для которого $\text{ord}(g)$ будет достаточно большим значением.


13.1 Задача дискретного логарифмирования.

Дано: $h \in \langle g \rangle$. Найти такое α , что $g^\alpha = h$. Возведение в степень – задача более простая с технической стороны реализации. Существует алгоритм бинарного возведения в степень: $g^{16} = (((g^2)^2)^2)^2$. Задача нахождения степени решается только перебором или близким к перебору способом.

 <https://youtu.be/1oceAPu3b8o?t=4480>

13.2 Система Диффи-Хеллмана обмена ключами.

Группа G и некоторый ее элемент g известны всем, причем g имеет достаточно большой порядок. Пусть есть два пользователя системы – A и B . A фиксирует свое секретное $\alpha \in \mathbb{N}$ и сообщает всем пользователям g^α . B совершает аналогичные действия: фиксирует $\beta \in \mathbb{N}$ и сообщает всем пользователям g^β . Теперь A и B опять совершают аналогичные действия – каждый из них возводит элемент другого в свою секретную степень, они оба получают элемент $g^{\alpha\beta}$, который известен только им двоим. Теперь по этому ключу можно устроить зашифрованный канал связи, к которому никто не имеет доступа. В силу сложности задачи дискретного логарифмирования по g^α и g^β нельзя быстро получить $g^{\alpha\beta}$.

 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=78>

13.3 Криптосистема Эль-Гамала.

Группа G и некоторый ее элемент g известны всем, причем g имеет достаточно большой порядок. Пусть есть два пользователя системы – A и B . A фиксирует свое секретное $\alpha \in \mathbb{N}$ и сообщает всем пользователям g^α . B хочет передать для A элемент $h \in G$. Для этого B фиксирует какое-то $k \in \mathbb{N}$ и объявляет пару $\{g^k, h \cdot (g^\alpha)^k\}$.


 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=360>

14 Кольца. Коммутативные кольца. Обратимые элементы, делители нуля и нильпотенты. Примеры колец. Поля. Критерий того, что кольцо вычетов является полем.

14.1 Кольца.


Определение 23. *Кольцо* (ассоциативное кольцо с единицей) – это множество R с двумя бинарными операциями: сложение и умножение, удовлетворяющее следующим условиям

1. $(R, +)$ – абелева группа
2. для любых $a, b, c \in R$ выполняется $a(b+c) = ab+ac$ (левая дистрибутивность) и $(a+b)c = ac+bc$ (правая дистрибутивность)
3. для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
4. существует $1 \in R$ такая что $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для любого $a \in R$

 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=690>

14.2 Коммутативные кольца.

Определение 24. Кольцо R называется **коммутативным**, если $ab = ba$ для любых $a, b \in R$.


 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=1287>

14.3 Обратимые элементы, делители нуля и нильпотенты.

Определение 25. Пусть R – кольцо. Элемент $a \in R$ называется обратимым, если существует такое $b \in R$, что $ab = ba = 1$.


Определение 26. Пусть R – кольцо. Элемент $a \in R$ называется левым (правым) **делителем нуля**, если $a \neq 0$ и существует $b \in R \setminus \{0\}$, такое что $ab = 0$ ($ba = 0$).

Определение 27. Пусть R – кольцо. Элемент $a \in R$ называется **нильпотентным** (нильпотентом), если $a \neq 0$ и существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $a^n = 0$.

 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=1374>


14.4 Примеры колец.

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
2. \mathbb{Z}_n – кольцо вычетов
3. $M_n(\mathbb{R})$ – кольцо матриц
4. $\mathbb{R}[x]$ – кольцо многочленов от переменной x с коэффициентами из \mathbb{R}

 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=1115>

14.5 Поля.

Определение 28. *Поле* – это коммутативное (ассоциативное) кольцо (с единицей), в котором $0 \neq 1$ и всякий ненулевой элемент обратим.

 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=2243>

14.6 Критерий того, что кольцо вычетов является полем.


Утверждение 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда \mathbb{Z}_n – поле $\Leftrightarrow n$ – простое число.

Доказательство. $\Rightarrow n = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}_n = \{0\}$ – не поле.

$n > 1$ и n составное $\Rightarrow n = ml$, где $1 < m < n, 1 < l < n \Rightarrow$ в кольце $\mathbb{Z}_n ml = 0 \Rightarrow$ есть делители 0 \Rightarrow не поле.

$\Leftarrow n = p$ – простое, $a \in \mathbb{Z}$, $\text{НОД}(a, p) = 1 \Rightarrow$ существуют $k, l \in \mathbb{Z}$, такие что $ak + pl = 1 \Rightarrow ak = 1 \Rightarrow$ любой ненулевой элемент обратим.

□

 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=2484>

15 Идеалы колец. Факторкольцо кольца по идеалу. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец. Ядро и образ гомоморфизма колец. Теорема о гомоморфизме колец.


15.1 Идеалы колец.

Определение 29. Пусть R – кольцо. Подмножество $I \subseteq R$ называется идеалом, если

1. I – подгруппа в R по сложению

2. $\forall r \in R, a \in I : ar, ra \in I$

Обозначение: $I \triangleleft R$.

 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=3367>

15.2 Факторкольцо кольца по идеалу.

Пусть R – кольцо, $I \triangleleft R$, R/I – факторгруппа по сложению. Введем на R/I операцию умножения по формуле $(a + I)(b + I) = ab + I$.


Утверждение 11. Указанная выше операция корректна.

Доказательство. $a + I = a' + I, b + I = b' + I \Rightarrow a' = a + x, b' = b + y$, где $x, y \in I$.

$$(a' + I)(b' + I) = a'b' + I = (a + x)(b + y) + I = ab + ay + xb + xy + I = ab + I \text{ (т.к. } ay, xb, xy \in I).$$

Ясно, что R/I – кольцо. □

Определение 30. R/I называется **факторкольцом** кольца R по идеалу I .

 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=3984>

15.3 Гомоморфизмы и изоморфизмы колец.

Определение 31. Пусть R, S – кольца. Отображение $\varphi : R \rightarrow S$ называется **гомоморфизмом**, если $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ и $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любых $a, b \in R$.

Определение 32. Пусть R, S – кольца. Гомоморфизм $\varphi : R \rightarrow S$ называется **изоморфизмом**, если φ – биекция.


 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=3152>

15.4 Ядро и образ гомоморфизма колец.

Пусть $\varphi : R \rightarrow S$ – гомоморфизм колец.

Определение 33. Множество $\text{Ker}(\varphi) = \{a \in R \mid \varphi(a) = 0\}$ называется **ядром** гомоморфизма φ .

Определение 34. Множество $\text{Im}(\varphi) = \varphi(R)$ называется **образом** гомоморфизма φ .

 <https://youtu.be/mNd30oeCugc?t=4420>

15.5 Теорема о гомоморфизме колец.

Теорема 5. Если $\varphi : R \rightarrow S$ – гомоморфизм колец, то $R/\text{Ker}(\varphi) \simeq \text{Im}(\varphi)$.


Доказательство. Пусть $I = \text{Ker}(\varphi)$.

$$\psi : R/I \rightarrow \text{Im}(\varphi), r + I \mapsto \varphi(r)$$

Из теоремы о гомоморфизме групп известно, что ψ – изоморфизм групп $(R/I, +)$ и $(\text{Im}(\varphi), +)$. Осталось проверить, что ψ – гомоморфизм колец:

$$\psi((a + I)(b + I)) = \psi(ab + I) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a + I)\psi(b + I).$$

□

 <https://youtu.be/YdjrTEepVpg>