

# Летний экзамен по алгебре

hse-ami-open-exams

## Содержание

<b>1</b>	<b>Бинарные операции. Полугруппы, моноиды и группы. Коммутативные группы. Примеры групп. Порядок группы. Описание всех подгрупп в группе <math>(\mathbb{Z}, +)</math>.</b>	<b>2</b>
1.1	Бинарные операции. . . . .	2
1.2	Полугруппы, моноиды и группы. . . . .	2
1.3	Коммутативные группы. . . . .	2
1.4	Примеры групп. . . . .	2
1.5	Порядок группы. . . . .	2
1.6	Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$ . . . . .	2

# 1 Бинарные операции. Полугруппы, моноиды и группы. Коммутативные группы. Примеры групп. Порядок группы. Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$ .

## 1.1 Бинарные операции.

**Определение 1.** Множество с бинарной операцией – это множество  $M$  с заданным отображением

$$M \times M \rightarrow M, \quad (a, b) \mapsto a \circ b.$$

Множество с бинарной операцией обычно обозначают  $(M, \circ)$ .

## 1.2 Полугруппы, моноиды и группы.

**Определение 2.** Множество с бинарной операцией  $(M, \circ)$  называется **полугруппой**, если данная бинарная операция **ассоциативна**, т.е.

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \text{для всех } a, b, c \in M.$$

**Определение 3.** Полугруппа  $(S, \circ)$  называется **моноидом**, если в ней есть нейтральный элемент, т.е. такой элемент  $e \in S$ , что  $e \circ a = a \circ e = a$  для любого  $a \in S$ .

**Определение 4.** Моноид  $(S, \circ)$  называется **группой**, если для каждого элемента  $a \in S$  найдется обратный элемент, т.е. такой  $b \in S$ , что  $a \circ b = b \circ a = e$ .

## 1.3 Коммутативные группы.

**Определение 5.** Группа  $(G, \circ)$  называется **коммутативной** или **абелевой**, если групповая операция коммутативна, т.е.  $a \circ b = b \circ a$  для любых  $a, b \in G$ .

## 1.4 Примеры групп.

1. Числовые аддитивные группы:  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}_n, +)$ .
2. Числовые мультипликативные группы:  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$ ,  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ ,  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ ,  $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$ ,  $p$  – простое.
3. Группы матриц:  $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ ;  $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ .
4. Группы подстановок: симметрическая группа  $S_n$  – все подстановки длины  $n$ ,  $|S_n| = n!$ ; знакопеременная группа  $A_n$  – четные подстановки длины  $n$ ,  $|A_n| = n!/2$ .

## 1.5 Порядок группы.

**Определение 6.** **Порядок** группы  $G$  – это число элементов в  $G$ . Группа называется **конечной**, если ее порядок конечен, и **бесконечной** иначе.

## 1.6 Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Определение 7.** Подмножество  $H$  группы  $G$  называется **подгруппой**, если выполнены следующие три условия:

1.  $e \in H$
2.  $ab \in H$  для любых  $a, b \in H$
3.  $a^{-1} \in H$  для любого  $a \in H$