

# Летний коллоквиум по математическому анализу

hse-ami-open-exams

## Содержание

<b>1</b>	<b>Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.</b>	<b>2</b>
1.1	Понятие числового ряда, его частичной суммы. . . . .	2
1.2	Сходимость и расходимость числовых рядов. . . . .	2
1.3	Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. . . . .	2
1.4	Необходимый признак сходимости числового ряда. . . . .	2
<b>2</b>	<b>Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.</b>	<b>3</b>
2.1	Критерий Коши сходимости числового ряда. . . . .	3
2.2	Доказать расходимость гармонического ряда. . . . .	3
<b>3</b>	<b>Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.</b>	<b>4</b>
3.1	Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. . . . .	4
3.2	Теорема о сравнении и предельный признак сравнения. . . . .	4
<b>4</b>	<b>Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда <math>\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}</math> в зависимости от значений <math>\alpha</math> и <math>\beta</math>.</b>	<b>5</b>
4.1	Интегральный признак сходимости числового ряда. . . . .	5
4.2	Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений $\alpha$ и $\beta$ . (TODO) . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.</b>	<b>6</b>
5.1	Примеры. . . . .	6
<b>6</b>	<b>Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.</b>	<b>7</b>
6.1	Примеры. . . . .	7
<b>7</b>	<b>Абсолютно сходящиеся ряды. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>Определение перестановки членов ряда. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.</b>	<b>9</b>
8.1	Определение перестановки членов ряда. . . . .	9
8.2	Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. . . . .	9
<b>9</b>	<b>Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.</b>	<b>11</b>
9.1	Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). . . . .	11
9.2	Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов. . . . .	11
<b>10</b>	<b>Преобразование Абеля. Объясните, почему это преобразование является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям.</b>	<b>12</b>

# 1 Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.

## 1.1 Понятие числового ряда, его частичной суммы.

**Определение 1.** Числовая последовательность  $a_k$ , рассматриваемая вместе с последовательностью

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

ее частичных сумм, называется **числовым рядом**.

## 1.2 Сходимость и расходимость числовых рядов.

**Определение 2.** Числовой ряд называется **сходящимся**, если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \infty$$

и **расходящимся** иначе. Число  $S$  называется **суммой ряда**.

## 1.3 Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  – расходится (гармонический ряд)
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  – сходится
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$  – сходится
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} n$  – расходится

## 1.4 Необходимый признак сходимости числового ряда.

**Теорема 1.** Необходимым условием сходимости числового ряда является стремление к 0 его  $n$ -го члена  $a_n$ .

*Доказательство.* Действительно, в противном случае не выполняется критерий Коши для числовой последовательности  $S_n$ . □

## 2 Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.

### 2.1 Критерий Коши сходимости числового ряда.

**Теорема 2.** Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности  $S_n$ . □

### 2.2 Доказать расходимость гармонического ряда.

**Теорема 3.** Гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится.

*Доказательство.* Воспользуемся критерием Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N \exists p \in \mathbb{N} |S_{n+p} - S_n| \geq \varepsilon$$

Пусть  $p = n$ . Тогда

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

□

### 3 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

#### 3.1 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы.

**Теорема 4.** Ряд с неотрицательными членами  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$  сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм  $\{S_n\}$  ограничена.

*Доказательство.* Необходимость следует из того, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной. Поскольку  $p_n \geq 0$ , то  $\{S_n\}$  монотонно возрастает, а тогда по теореме Вейерштрасса эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является ограниченной сверху. Тем самым доказана достаточность.  $\square$

#### 3.2 Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

**Теорема 5** (первый признак сравнения). Если  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq p_n \leq q_n$ , то

1. Из сходимости  $\sum q_n$  следует сходимость  $\sum p_n$
2. Из расходимости  $\sum p_n$  следует расходимость  $\sum q_n$

*Доказательство.*

1. Напрямую следует из теоремы 4.
2. Предположим, что  $\sum p_n$  расходится, а  $\sum q_n$  сходится. Тогда получаем противоречие с пунктом 1.

$\square$

**Теорема 6** (предельный признак сравнения). Если  $p_n > 0, q_n > 0$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} = l \in (0, +\infty)$ , то ряды  $\sum p_n$  и  $\sum q_n$  сходятся и расходятся одновременно.

*Доказательство.* По определению предела

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{p_n}{q_n} - l \right| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < \frac{p_n}{q_n} < l + \varepsilon \Leftrightarrow q_n(l - \varepsilon) < p_n < q_n(l + \varepsilon).$$

Осталось лишь воспользоваться теоремой 5.

$\square$

## 4 Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений $\alpha$ и $\beta$ .

### 4.1 Интегральный признак сходимости числового ряда.

**Теорема 7.** Пусть при любом  $k \in [1, +\infty)$  выполняется  $f(k) \geq 0$ , причем  $f(k) \searrow 0$ . Тогда сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  эквивалентна сходимости несобственного интеграла  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ .

*Доказательство.* При  $x \in [k, k+1]$ , в силу  $f(x) \searrow$ , имеем  $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ . Возьмем определенный интеграл от всех частей неравенства:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(k+1) dx &\leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx \\ f(k+1) &\leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \end{aligned}$$

Просуммируем теперь это неравенство по всем  $k$  от 1 до  $n$ . Получаем

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

Теперь, если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty}$  сходится, то из правой части неравенства следует, что сходится интеграл. Если же сходится интеграл, то из левой части неравенства вытекает, что сходится ряд. Аналогично с расходимостью.  $\square$

### 4.2 Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений $\alpha$ и $\beta$ . (TODO)

## 5 Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.

**Теорема 8** (признак Даламбера в допредельной форме). Если  $\forall k \in \mathbb{N}$  выполнено

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \left( \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \right),$$

то ряд  $\sum p_k$  сходится (расходится).

*Доказательство.* Положим  $p'_k = q^k$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{p'_{k+1}}{p'_k} &= q < 1 \left( \frac{p'_{k+1}}{p'_k} = 1 \right) \\ \frac{p_{k+1}}{p_k} &\leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \left( \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \right) \end{aligned}$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  сходится (расходится) и, пользуясь первым признаком сравнения (теорема 5), делаем вывод, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  сходится (расходится).  $\square$

**Теорема 9** (признак Даламбера в предельной форме). Пусть существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

Тогда при  $L < 1$  ряд  $\sum p_k$  сходится, при  $L > 1$  расходится, а при  $L = 1$  может как сходиться, так и расходиться.

*Доказательство.* Как мы знаем,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

Это означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geq N$  выполняется

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon$$

Теперь если  $L > 1$ , то мы можем выбрать такое  $\varepsilon$ , что  $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ . Но тогда

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon < 1$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд  $\sum p_k$  сходится. Пусть теперь  $L > 1$ . Выберем такое  $\varepsilon$ , что  $L - \varepsilon = 1$ . Получаем

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд  $\sum p_k$  расходится.

Наконец, рассмотрим ряды  $\sum \frac{1}{k}$  и  $\sum \frac{1}{k^2}$ . В обоих случаях  $L = 1$ , но ряд  $\sum \frac{1}{k}$  расходится, а ряд  $\sum \frac{1}{k^2}$  сходится.  $\square$

### 5.1 Примеры.

1.  $\sum \frac{1}{n!}$  – сходится
2.  $\sum n!$  – расходится

## 6 Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.

**Теорема 10** (признак Коши в допредельной форме). Если  $\forall k \in \mathbb{N}$  выполнено

$$\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geq 1),$$

то ряд  $\sum p_k$  сходится (расходится).

*Доказательство.* Положим  $p'_k = q^k$ . Тогда

$$\sqrt[k]{p'_k} = q < 1 \quad \left( \sqrt[k]{p'_k} = 1 \right)$$

$$\sqrt[k]{p_k} \leq \sqrt[k]{p'_k} \quad \left( \sqrt[k]{p_k} \geq \sqrt[k]{p'_k} \right)$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$  сходится (расходится) и, пользуясь первым признаком сравнения (теорема 5), делаем вывод, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$  сходится (расходится).  $\square$

**Теорема 11** (признак Коши в предельной форме). Пусть существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Тогда при  $L < 1$  ряд  $\sum p_k$  сходится, при  $L > 1$  расходится, а при  $L = 1$  может как сходиться, так и расходиться.

*Доказательство.* Как мы знаем,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Это означает, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geq N$  выполняется

$$L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$$

Теперь если  $L > 1$ , то мы можем выбрать такое  $\varepsilon$ , что  $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ . Но тогда

$$\sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon < 1$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд  $\sum p_k$  сходится.

Пусть теперь  $L > 1$ . Выберем такое  $\varepsilon$ , что  $L - \varepsilon = 1$ . Получаем

$$\sqrt[k]{p_k} > L - \varepsilon = 1$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд  $\sum p_k$  расходится.

Наконец, рассмотрим ряды  $\sum \frac{1}{k}$  и  $\sum \frac{1}{k^2}$ . В обоих случаях  $L = 1$ , но ряд  $\sum \frac{1}{k}$  расходится, а ряд  $\sum \frac{1}{k^2}$  сходится.  $\square$

### 6.1 Примеры.

1.  $\sum \frac{n^n}{e^n}$  — расходится
2.  $\sum \frac{n^2}{e^n}$  — сходится

## 7 Абсолютно сходящиеся ряды. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

**Определение 3.** Будем говорить, что ряд  $\sum u_k$  сходится абсолютно, если  $\sum |u_k|$  сходится.

**Теорема 12.** Абсолютно сходящийся ряд сходится.

*Доказательство.* По критерию Коши имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Осталось лишь воспользоваться неравенством

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

□



## 8 Определение перестановки членов ряда. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

### 8.1 Определение перестановки членов ряда.

**Определение 4.** Говорят, что два ряда  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$  получаются друг из друга перестановкой членов, если существует такое взаимно-однозначное отображение  $\varphi$  множества  $\mathbb{N}$  натуральных чисел на себя, что  $b_n = a_{\varphi(n)}$ .

### 8.2 Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

**Теорема 13.** Если числовой ряд  $\sum u_k$  сходится абсолютно, то любая его перестановка членов сходится к той же самой сумме.

*Доказательство.* Пусть  $\sum u_k$  абсолютно сходится к  $S$ , а  $\sum u'_k$  — некоторая перестановка членов исходного ряда. Требуется доказать, что  $\sum u'_k = S$  и  $\sum u'_k$  сходится абсолютно. Докажем сначала первое утверждение. Для этого достаточно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N \left| \sum_{k=1}^n u'_k - S \right| < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon$ . Поскольку ряд  $\sum u_k$  сходится абсолютно, то по признаку Коши

$$\exists N'_0 \forall p \in \mathbb{N} \sum_{k=N'_0+1}^{N'_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а по определению сходимости ряда

$$\exists N''_0 \left| \sum_{k=1}^{N''_0} u_k - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Напоминаем, что данные неравенства по определениям выполняются и для  $n \geq N'_0, N''_0$ . Примем  $N_0 = \max\{N'_0, N''_0\}$ , чтобы для этого номера выполнялись оба неравенства. Теперь возьмем такое  $N$ , чтобы любая частичная сумма  $S'_n$  ряда  $\sum u'_k$  при  $n \geq N$  содержала все первые  $N_0$  членов ряда  $\sum u_k$ . Заметим, что такое  $N$  всегда можно выбрать, поскольку мы просто переставили некоторые члены исходного ряда. Оценим теперь разность

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - S \right| < \varepsilon.$$

Пусть  $n \geq N$ . Указанную разность можно переписать в виде

$$\sum u'_k - S = \left( \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right) + \left( \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right).$$

Переходя к модулям, получаем

$$\left| \sum u'_k - S \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right|.$$

Если воспользоваться неравенством  $\left| \sum_{k=1}^{N''_0} u_k - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , то достаточно доказать, что

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вспомним теперь, что мы таким образом выбрали  $N$ , что при  $n \geq N$  первая из сумм содержит все  $N_0$  членов второй суммы. Поэтому указанная выше разность представляет собой сумму  $n - N_0$  членов ряда  $\sum u_k$  с номерами, каждый из которых превосходит  $N_0$ .

Тогда выберем такое  $p$ , чтобы номер  $N_0 + p$  превосходил номера всех  $n - N_0$  членов только что указанной суммы. Тогда справедливо

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|$$

Но теперь, пользуясь неравенством

$$\left| \sum_{k=1}^{N_0''} u_k - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

получаем то, что и требовалось доказать. Таким образом, мы доказали, что ряд  $\sum u'_k$  сходится к  $S$ . Осталось лишь доказать, что он сходится абсолютно. Для этого достаточно применить приведенное выше доказательство для рядов  $\sum |u_k|$  и  $\sum |u'_k|$ .

□

## 9 Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

### 9.1 Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства).

**Теорема 14.** Если числовой ряд  $\sum u_k$  сходится абсолютно, то любая его перестановка членов сходится к той же самой сумме.

### 9.2 Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

**Теорема 15.** Если  $\sum u_k$  и  $\sum v_k$  сходятся абсолютно к  $u$  и  $v$  соответственно, то ряд  $\sum w_k$ , составленный из всевозможных произведений  $u_i \cdot v_j$  сходится абсолютно к  $u \cdot v$ .

*Доказательство.* Докажем сначала, что ряд  $\sum w_k$  сходится абсолютно. Возьмем произвольное  $n_0$  и рассмотрим  $\sum_{k=1}^{n_0} |w_k|$ . Эта сумма состоит из членов вида  $|u_i v_j|$ . Найдем среди этих индексов  $i$  и  $j$  наибольший индекс  $m$ , входящий в исследуемую сумму. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n_0} |w_k| \leq (|u_1| + \dots + |u_m|) \cdot (|v_1| + \dots + |v_m|) \leq M_1 M_2$$

$$\left. \begin{array}{l} (|u_1| + \dots + |u_m|) \leq M_1 \\ (|v_1| + \dots + |v_m|) \leq M_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n_0} |w_k| \leq M_1 M_2$$

Ограничения  $M_1$  и  $M_2$  следуют из абсолютной сходимости рядов  $\sum u_k$  и  $\sum v_k$ . Мы ограничили  $n_0$ -ую частичную сумму исследуемого ряда  $\sum |w_k|$ , значит этот ряд сходится. Осталось лишь доказать, что он сходится к  $uv$ .

Пусть данный ряд сходится к  $S$ . Заметим, что в силу теоремы 9.1 мы можем как угодно переставлять члены ряда  $w_i$ , не влияя на сходимость. Иными словами, любая последовательность или подпоследовательность частичных сумм будет сходиться к  $S$ . Тогда рассмотрим последовательность частичных сумм  $\{S_{m^2}\}$ , где  $S_{m^2} = (u_1 + \dots + u_m) \cdot (v_1 + \dots + v_m)$ . Но

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} (u_1 + \dots + u_m) = u \\ \lim_{m \rightarrow \infty} (v_1 + \dots + v_m) = v \end{array} \right\} \Rightarrow S_{m^2} \rightarrow uv$$

□

## 10 Преобразование Абеля. Объясните, почему это преобразование является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям.

Пусть  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$  и  $B_0 = 0$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

Преобразование Абеля является дискретным аналогом интегрирования по частям. Для наглядности рассмотрим следующую таблицу:

$f$	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
$f'$	$\{a_n - a_{n-1}\}_{n=2}^{\infty}$
$\int_a^b f(x) dx$	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
$\left( \int_a^x f(x) dx \right)' = f(x)$	$\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$
$f, g, G = \int_a^x g(t) dt + C$	$\{a_k\}, \{b_k\}, \{B_k = \sum_{j=1}^k b_j + B_0\}$
$\int_a^b f g dx = \int_a^b f dG = f \cdot G _a^b - \int_a^b G f' dx$	$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$