Ответы на билеты по Коллоквиуму1 Теории Вероятностей и Математической Статистики

БПМИ187

16 октября 2019 г.

Билет 1. Дискретное вероятностное пространство. Задача о разделе ставки. Вероятностный алгоритм проверки на простоту. Универсальная Хеш-Функция.

Решение билета 1. ***Дискретное вероятностное пространство.*** *Пусть у нас есть какой-то эксперимент, который содержит n различных исходов, тогда ω_i i-ый из этих неповторяющихся результатов, а $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ - множество всех вохможных различных элементарных исходов этого эксперимента. Всякое $A \subset \Omega$ назют событием. Функция $P: 2^{\Omega} \to [0,1]$, у которой выполняются два свойства:*

- $P(\Omega) = 1$
- $A \cap B = \varnothing \to P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(правило суммы или аддитивность)*

называется вероятностной мерой, а $P(A)$ - вероятностью события A. Веротяностная мера определяется полностью значениями $P(\{\omega_i\}) = p_\omega$. Из определения следует, что $p_\omega \geq 0$ и $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$, вероятность события A высчитывается как $\sum\limits_{\omega \in A} P(\omega)$. Если элементарные исходы равновозможны, то $\forall i$ $P(\omega_i) = \frac{1}{|\Omega|}$. Когда элементарные исходы равновероятны $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Задача о разделе ставки. *Играют двое людей в орел и решку. Подбрасывают до 6 побед(кто первый выиграл, тот и забирает выигрыш). Они сыграли 8 партий, а после им пришлось досрочно завершить игру, при чем в 5-ти играх выиграл первый игрок, а в 3-ех выиграл второй. Как разделить приз? Давайте распишем варианты, как бы могла продолжиться игра, за 0 возьмем, что выиграл первый, а за 1, что второй, тогда получаются такие варианты:*

1)0 0 0

2)0 0 1

3)0 1

4)1

И вроде бы надо делить 1:3, так как в 1 из 4-ех случаев побеждает второй игрок, в остальных первый. Однако эти исходы ***не равновероятны****: у первого случая вероятность его появления: $\frac{1}{8}$, вероятность появления у второго случая тоже $\frac{1}{8}$, в то время, как у третьего случая вероятность появления уже $\frac{1}{4}$, а у четвертого $\frac{1}{2}$, соответственно предлагается делить приз в отношении 1:7*

Вероятностный алгоритм на простоту. *Задача состоит в том, что дано $N > 1$ и нужно сказать, простое оно или нет. Есть вероятностный алгоритм это сделать. По теореме Ферма, если N простое, то $\forall b$: НОД(b, N)=1, число $b^{N-1} - 1$ делится на N. Если же не делится, то N составное. Предположим, что $a \in \mathbb{Z}_N^*$ число N не проходит тест, тогда если для b проходит, для ab уже не будет проходить. Таким образом к каждому b можно сопоставлять ab. Значит оснований, для которых не проходит тест не меньше, чем для тех, для которых тест проходит, тогда искомая вероятность не меньше $\frac{1}{2}$, если же мы выбираем k оснований, то вероятность ошибиться $\leq \frac{1}{2^k}$. Также бывают числа Кармайкла, для которых проходятся все тесты.*

Универсальная Хеш-функция. *Хеш-функция отображает из множества размера n в множество размера m, где в большинстве случаев $n > m$. Универсальная хеш-функция примечательна тем, что она равномерна: $\forall k_1, k_2 \in \{1, 2, ..., n\}, k_1 \neq k_2$ вероятность того, что $h(k_1) = h(k_2)$ не больше $\frac{1}{m}$, однако можно понять, что на любую хеш-функцию можно найти контр-тест, который будет переводить много элементов в один и тот же. Тогда будем саму функцию выбирать случайно: зафиксируем простое*

$p > n$, пусть $a \in \{1, 2, ..., p-1\}$, $b \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ и положим $h_{a,b} = ((ak+b) \pmod p) \pmod m$. И a, и b выбираются случайно и выбор их считаем равновероятным с выбором другого числа. Теперь докажем, что вероятность коллизии $\leq \frac{1}{m}$. Заметим, что $ak_1 + b \equiv ak_2 + b \pmod p$ только при $k_1 = k_2$, кроме того, зная (k_1) и $h(k_2)$ можно восстановить сами коэффициенты a, b в h: $(a, b) \to (ak_1 + b \pmod p), ak_2 + b \pmod p))$ является биекцией множества $\{1, ..., p-1\} \times \{0, ...p-1\} \to \{0, ...p-1\} \times \{0, ..., p-1\}$. Осталось сказать, что выбрать такие $s, t \in \{0, ..., p-1\}, s \neq t$ и $s = t \pmod m$ не превосходит $\frac{p-1}{m}$ или же выбора пары a, b, у которой $h(k_1) = h(k_2)$ не больше $\frac{1}{m}$

Билет 2. Свойста вероятностной меры. Формула включений и исключений. Парадокс распределения подарков. Задача про конференцию.

Решение билета 2. ***Свойства вероятностной меры.***

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$
- $P(\bigcup\limits_k A_k) \leq \sum\limits_k P(A_k)$
- $P(\bigcup\limits_k A_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum\limits_{i_1 < ... < i_k} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k})$

Формула включений и исключений(док-во третьего свойства). *Докажем индуктивно. Для $k = 1$ очевидно, что верно. Для $k = 2$ проверено перывм свойством. Допустим для n верно, докажем для $n+1$: $P(A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(A_1 \cup ... \cup A_n) + P(A_{n+1}) - P((A_1 \cap A_{n+1}) \cup ... \cup (A_n \cap A_{n+1})) = P(A_1) + ... + P(A_n) - \sum\limits_{j<k} P(A_j \cap A_k) + P(A_{n+1}) + P(A_1 \cap A_{n+1}) + ... + P(A_n \cap A_{n+1}) - \sum\limits_{j<k} P(A_j \cap A_k \cap A_{n+1})$ итд. Такие образом, переместив все, где есть A_{n+1} под знаки суммирования, мы получим исходную формулу.*

Парадокс распределения подарков. *Происходит обмен подарками в коллективе: все складывают подарки в мешок и вытягивают потом один подарок. Какова вероятность что человек вытянул свой же подарок? Какова вероятность, что никто не вытянул свой подарок? $\Sigma = S_n$, при чем любая перестановка равновозможна, и $p(\omega_i) = \frac{1}{n!}$. Событие, что человек вытянул свой подарок есть в $(n-1)!$ исходах и следовательно вероятность такокго события равна $\frac{1}{n}$. Теперь подсчитаем вероятность, что никто не вытянул свой же подарок: допустим A_i - событие, что $i-$ый человек вытянул свой подарок, тогда $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum\limits_{(-1)^{k+1}} k! = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} ... \to 1 - \frac{1}{e}$, и вероятность, что никто не вытянул свой же подарок стремится к $\frac{1}{e}$*

Задача про концеренцию. *В университете 60 направлений, в каждом направлении по 7 ученых. Нужно отослать на конференцию в Америку и Канаду так, чтобы на каджой из конференций были специалисты каждой из 60-ти специальностей. Трдуность в том, что один человек может отвечать за несколько направлений.*

Будем для каждого из ученых выбирать бросанием монетки, в какую страну он поедет. Неблагоприятный исход для нас в том, что все направление едет в одну и ту же страну: вероятность этого $\frac{1}{2^7}$, а так как страны две, то для каждого направления шанс неблагоприятного исхода равен $\frac{2}{2^7} = \frac{1}{2^6}$. Теперь просто скажем, что вероятность благоприятного случая у нас равна $1 - \frac{1}{2^6}$, таких событий у нас 60

Билет 3. Условная вероятность. Независимые события. Отличие попарной независимости и независимости в совокупности

Решение билета 3. *Условной вероятностью A при событии B называется число $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Если зафиксировать B, то $P(\cdot|B)$ является вероятностной мерой. Равнество часто записывают как $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$ и называют правилом произведения.*

Независимые события. *События A и B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$*

Отличие попарной независимости и независимости в совокупности. *Если у нас есть какое-то $\{A_k\}_{k=1}^{n}$, то события в множестве этих событий они будут независимы, если $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$. События $\{A_k\}$ будут независимы в совокупности, если $\forall k \in \{2, ..., n\}$ $\bigcap\limits_{i \in \{i_1, .., i_k\}} A_i = \prod\limits_{i \in \{i_1, ..., i_k\}} P(A_{i_j})$*

Билет 4. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Задача о сумасшедшей старушке. Парадокс Байеса.

Решение билета 4. ***Формула полной вероятности.*** *Пусть* $\Omega = \bigcup\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} A_i$ *и* $\forall i,j, i\neq j, A_i\cap A_j = \varnothing$, $P(A_i)>0$, *тогда для всякого события* B *имеет место равенство* $P(B) = \sum\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} P(B|A_i)\cdot P(A_i)$. *В качестве доказательства это раскладывается из* $\sum\limits_{i\in\{1,\dots,n\}} P(B|A_i)$

Формула Байеса. *(идет в нашем курсе сначала задача про старушку, потом формула Байеса)* $P(A) > 0, P(B)>0$, *тогда* $P(B|A) = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}$. *В качестве доказательства домножим на* $P(A)$ *и получим* $P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B) = P(A\cap B)$

Задача о сумасшедшей старушке. *Задача звучит так. Есть очередь в самолет из* N *пассажиров, и среди них есть сумасшедшая старушка. Она вбегает в самолет и садится равновероятно на любое из* N *мест. Тот, на чье место она села сам становится сумасшедшей старушкой и начинает таким же образом, только уже из меньшего кол-ва мест выбирает себе место. Теперь мы хотим узнать вероятность того, что* $N-$*ый пассажир сядет на свое место* (P_N)*. Пусть для* $k<N$ *мы доказали, что* $P_k = \frac{1}{2}$*(для* $k=2$ *и* $k=3$ *так и есть), теперь мы что говорим:* A_k *- старушка села на* $k-$*е место, тогда* $\sum\limits_{k=1}^{N-1} P(N-$*ый сел на свое место*$|A_k)P(A_k)$. *Теперь заметим, что* $P(A_i) = \frac{1}{N}$, *кроме слагаемых, где старушка села на свое место, и где старушка села на наше место (они равно 1 и 0 соответственно). Когда старушка занимает место какого-то пассажира, он равновероятно может сесть и на наше, и на место старушки. Тогда получается сумма* $\frac{N-2}{2N}+\frac{1}{N} = \frac{1}{2}$

Парадокс Байеса. *Допустим у нас есть болезнь, которую болеет всего 1 из 1000 человек(вероятность, что человек болен ею составляет* 0.001*), при этом есть анализ на эту болезнь, который говорит, что человек болеет, если он болеет, с вероятностью* 0.9, *а если человек здоров, то с вероятностью* 0.01 *говорит, что болеет. Какова вероятность, что тест скажет, что человек болеет? Введем обозначения:* I *- человек болен,* H *- человек здоров,* DI *- диагностика показала, что человек болен,* DH *- диагностика показала, что человек здоров. Тогда посчитаем* $P(H|DI) = \frac{P(DI|H)\cdot P(H)}{P(DI)} = \frac{P(DI|H)\cdot P(H)}{P(DI|H)\cdot P(H)+P(DI|I)\cdot P(I)} = \frac{0.01\cdot 0.999}{0.01\cdot 0.999+0.9\cdot 0.001} = 0.92$, *и тогда мы получаем, что вероятность того, что челове здоров, когда ему тест сказал, что он болен,* 0.92

Билет 5. Схема Бернулли. Моделирование бросания правильной монеты. Теорема Мувра-Лапласа. Закон больших чисел для схемы Бернулли.

Решение билета 5. *Схема Бернулли. Допустим у нас есть эксперимент бросания монетки, то, как выпадает монетка не зависит от того, что выпало до этого и не зависит от кол-ва бросков, которые были сделаны. Введем обозначение p - вероятность успеха(выпадения орла/получение единицы),* $q = 1-p$ *- вероятность неудачи(выпадения решки/получения нуля). Допустим в нашем эксперименте было* N *подбрасываний монеты и мы считаем, сколько раз нам повезло. Каждому исходу с* k *выпадениями орла сопоставляется вероятность* $p^k q^{N-k}$. *Построенное вероятностное пространство называется схемой Бернулли. Последовательностей с* k *единицами* C_N^k, *следовательно вероятность* $A_{k,N}$, *что в последовательности длины* N *встретится* k *единиц равна* $A_{k,N} = C_N^k p^k q^{N-k}$. *Также ясно, что* $\sum\limits_{k=0}^{N} A_{k,N} = 1$, *а сам набор вероятностей* $A_{0,N},\dots,A_{N,N}$ *называется распределением Бернулли.*

Моделирование бросания правильной монеты. *При бросании правильной монеты, у нас* $p=q=\frac{1}{2}$ *и мы рассматриваем вероятность того, что кол-во орлов четно. Тогда* $P($*кол-во орлов четно*$) =$*Ч (логично, что такое НЧ). Тогда Ч + НЧ* $= (p+q)^N = 1$. *А можем ли мы посчитать Ч - НЧ? Это будет* $(-p+q)^N$*(так как для четных ничего не изменится, а для нечетных войдет с минусом). Тогда сложим первое со вторым, подулим на 2 и получим* $\frac{1+(1-2p)^N}{2} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2}$

Теперь еще рассмотрим способ, предложенный студентами, где нужно уметь подкидывать монетку бесконечно. Бросаем монетку два раза, и если выпал сначала орел, потом решка, пишем 1, если наоборот, пишем 0, а если не такой исход, ничего не делаем. Тогда $P(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P($*на каком-то* $k-$*м броске не было комбинаций 01 10, а на k-м есть 10*$) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-2pq)k-1\cdot pq = \frac{pq}{1-(1-2pq)} = \frac{1}{2}$

Теорема Муавра Лапласа. *Мы уже знает, что* $P($*число единиц равно* $k) = C_N^k p^k q^{N-k}$. *Обозначим это число за* $P_{N,k}$. *Для простоты будем считать, что* $p=q=\frac{1}{2}$, *хоть мы и сформируем с такими вероятностями, но теорема будет доказана целиком. Давайте посмотрим, как будет выглядеть график наших вероятностей при* $N=5$. $P_{5,0} = \frac{1}{2^5}, P_{5,1} = \frac{5}{2^5}, P_{5,2} = \frac{10}{2^5}, P_{5,3} = \frac{10}{2^5}, P_{5,4} = \frac{5}{2^5}, P_{5,5} = \frac{1}{2^5}$. *получилась "зеркальная гистограмма". Мы видим, что эта линия формируется* C*-шками. А как описать эту линию? Она в точности до масштабирования равна функции* $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Давайте теперь посмотрим на число* $P_{2n,n}$, *но перед этим вспомним формулу Стирлинга, которая говорит, что* $n! =$

$\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n+O(\frac{1}{n})}$. *Теперь заметим, что если прологарифмировать* $ln(n!) = ln(1)+ln(2)+....+ln(n) = \int\limits_1^n ln(x)dx = xln(x)-x\Big|_1^n = nln(n)-n+1$. *Теперь мы что говорим? Что* $P_{2n,n} = C_{2n}^n = \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!\cdot 2^{2n}} = \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-2n+O(\frac{1}{n})}}{(\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{n}}\cdot e^{-n+O(\frac{1}{n})})\cdot(\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n+O(\frac{1}{n})})\cdot 2^{2n}} = \frac{\sqrt{2\pi}\cdot 2^{2n}\cdot\sqrt{2}\cdot n^{2n}\cdot\sqrt{n}\cdot e^{-2n+O(\frac{1}{n})}}{(\sqrt{2\pi}n^n\sqrt{n}\cdot e^{-n+O(\frac{1}{n})})\cdot(\sqrt{2\pi}n^n\sqrt{n}\cdot e^{-n+O(\frac{1}{n})})\cdot 2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}\cdot e^{(\frac{1}{n})}} \to P_{2n,n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. *Таким образом мы нашли центр. Теперь же узнаем, как обстоят дела на* k *от центра, а именно* $P_{2n,n+k}$ *(*$0 < k < n$*, для отрицательных будет аналогично) и хотим узнать, как это относится к* $\frac{P_{2n,n+k}}{P_{2n,n}} = \frac{C_{2n}^{n+k}}{C_{2n}^n} = \frac{\frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!\cdot 2^{2n}}}{\frac{(2n)!}{n!n!\cdot 2^{2n}}} = \frac{n!n!}{(n-k)!(n+k)!} = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{(n+1)(n+2)...(n+k)} = \frac{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k-1}{n})}{(1+\frac{1}{n})...(1+\frac{k}{n})}$. *Теперь скажем, что* $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$*, тогда мы нашу дробь пролагарифмируем, а логарифм нам будет давать сумму:* $\frac{e^{\sum_{m=1}^{k-1} ln(1-\frac{m}{n})}}{e^{\sum_{n=1}^{k} ln(1+\frac{m}{n})}} = e^{\sum_{m=1}^{k-1}(-\frac{m}{n}-\frac{m^2}{2n^2}+O(\frac{m^3}{n^3}))-\sum_{m=1}^{k}(\frac{m}{n}-\frac{m^2}{2n^2}+O(\frac{m^3}{n^3}))} = e^{-\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{k}(m)-\frac{k}{n}+\frac{k^2}{2n^2}-O(\frac{k^3}{n^3})} = e^{-\frac{2}{n}\cdot\frac{(k-1)k}{2}-\frac{k}{n}+\frac{k^2}{2n^2}-O(\frac{k^3}{n^3})} = e^{\frac{k^2}{n}+\frac{k^2}{2n^2}-O(\frac{k^3}{n^3})}$. *Теперь мы можем сказать, что* $\frac{P_{2n,n+k}}{P_{2n,n}} \sim e^{\frac{k^2}{n}+\frac{k^2}{2n^2}}$ *или же* $\frac{P_{2n,n+k}}{P_{2n,n}} = e^{\frac{k^2}{n}+\frac{k^2}{2n^2}-O(\frac{k^3}{n^3})}$. *Теперь, если вспомнить, что* $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$*, то* $P_{N,n} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{3}}}\phi(\sqrt{\frac{N}{4}})$. *Теперь будем менять* k*, сначала* $k = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{4}}}$*, потом* $\frac{2}{\sqrt{\frac{N}{4}}}$ *итд. Напоминает интеграл:* $\sum\limits_{0<k<2\sqrt{\frac{N}{4}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{4}}}\phi(\sqrt{\frac{N}{4}}) \to \int\limits_0^2 \phi(x)dx, \to \sum\limits_{0<k<\sqrt{N}} P_{N,\frac{N}{2}+k} \to \int\limits_0^2 \phi(x)dx$*, когда* $N\to\infty$*. За что же у нас отвечает* k*? Как отходит от середины наша гистограмма. То есть* $P(\frac{N}{2} <$ *число успехов* $< \frac{N}{2}+\sqrt{N}) \to \int\limits_0^2 \phi(x)dx$ *. Поделим в нашем неравенстве на* N*:* $P(\frac{1}{2} <$ *число успехов*$/N < \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{N}}) \to \int\limits_0^2 \phi(x)dx$*. Это значит, что вероятность того, что доля успеха в эксперименте отличается от той доли, которую мы ожидаем на величину не более* $\frac{1}{\sqrt{N}}$*. А теперь сформируем в общем виде:* $X_{N,k} = \frac{k-Np}{\sqrt{Npq}}$*, существует константа* C*, которая не зависит от* N*, такая, что* $X_{N,k} \le C$*, тогда* $P_{N,k} \sim \frac{1}{Npq}\cdot\phi(X_{N,k})$ *при* $N\to\infty$*. Для любых чисел* $a < b$ *имеем при* $N\to\infty$ $P(a \le \frac{k-Np}{Npq} \le b) \to \int\limits_a^b \phi(x)dx$*. В качестве док-во последнего в неравенстве домножим на* $\sqrt{\frac{pq}{N}}$*, и получим при* $N\to\infty$ $P(a\sqrt{\frac{pq}{N}} \le \frac{k}{N} - p \le b\sqrt{\frac{pq}{N}}) \to \int\limits_a^b \phi(x)dx$.

Закон больших чисел для схемы Бернулли. *Для всякого* $\delta > 0, P(|\frac{k}{N}-p| > \delta) \xrightarrow{N\to\infty} 0$*, где* $k-$*число успехов, а p - вероятность успехов. Для доказательства снова домножим обе стороны неравенства на* $\sqrt{\frac{N}{pq}}$*, но также поменяем* $>$ *на* $\le$*:* $P(|\frac{k-Np}{\sqrt{\frac{pq}{N}}} \le \delta\sqrt{\frac{N}{pq}}|)$*. Теперь давайте возьмём* $M > M_0, \exists N_0 : N > N_0$*, такое, что* $\frac{N}{pq} > M$*. Тогда можно сказать* $P(|\frac{k-Np}{\sqrt{\frac{pq}{N}}} \le \delta\sqrt{\frac{N}{pq}}|) \ge P(|\frac{k-Np}{\sqrt{\frac{pq}{N}}} \le M|) \to$ *по т. Муавра Лапласа* $\int\limits_{-M}^{M} \phi(x)dx \to 1$*, а вероятность того, что мы сначала искали таким образом стремится к 0.*

Билет 6. Случайное блуждание: принцип отражения, задача о баллотировке и задача о возвращении в начало координат. Броуновское движение

Решение билета 6. *Для начала покажем, сколько способов у нас попасть из точки* (a,b) *в точку* (x,y)*, передвигаясь за один ход на одну клетку вправо и либо вверх, либо вниз. У нас ходов будет* $x-a$*, и среди этих ходов (для ограничения общности будем считать, что* $b < y$*, если нет, решение аналогично), ходов, которые будут сделаны вверх больше на* $y-b$*. Тогда всевозможных ходов у нас получается* $C_{x-a}^{\frac{(x-a-y+b)}{2}+y-b} = C_{x-a}^{\frac{x-a+y-b}{2}}$

Принцип отражения*. Путей, который стартуют из точки* k *и приходят в точку* m *и при этом не касаются оси* x *ровно столько же, сколько путей из* $-k$ *в* m*.*

Задача о баллатировке. *Звучит она, как сколько путей из точки* $(0,0)$ *в* (s,t)*, которые лежат выше оси* x*. Заметим, что первый ход обязательно будет вверх. А теперь кол-во путей из* $(1,1)$ *в* (s,t)*, которые пересекают ось* x *ровно столько же, сколько путей из* $(-1,-1)$ *в* (s,t)*, а это мы можем подсчитать по уже найденной формуле:* $C_{s+1}^{\frac{s+1+t-1}{2}} = C_{s+1}^{\frac{s+t}{2}}$*. А вообще путей у нас* $C_s^{\frac{s+t}{2}}$*, тогда* $C_{s-1}^{\frac{s+t}{2}-1} - C_{s-1}^{\frac{s+t}{2}} = \frac{(s-1)!}{(\frac{s+t}{2}-1)!\cdot(\frac{s+t}{2})!} - \frac{(s-1)!}{(\frac{s+t}{2})!\cdot(\frac{s-t}{2}-1)!} = \frac{(s-1)!}{(\frac{s-t}{2})!(\frac{s+t}{2})!}\cdot(\frac{s+t}{2}-\frac{s-t}{2}) = \frac{t}{s}C_N^{\frac{s+t}{2}}$

Задача о возвращении в 0. *Во-первых понятно, что для нечетного числа шагов вероятность вер-*

нуться в 0 нулевая. Теперь посчитаем вероятность вернуться на каком-то $2n$-м шаге $= U_{2n} = C_{2n}^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{n!n!2^{2n}} \sim$ (как мы доказали в прошлом билете на теореме Лапласа) $\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Теперь посчитаем вероятность вернуться на $2n$-м шаге первый раз за весь путь (обозначи f_{2n}). Эта вероятность можно трактовать, как сколько путей добраться из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ не пересекав и не задевая кроме начала и конце ось x. Допустим мы считаем то, когда первый шаг точки был вверх (для того случая, когда первый шаг был сделан вниз - аналогично). Тогда это уже кол-во путей, добраться из $(0,0)$ в $(2n-1,1)$ выше x, а это, как мы уже знаем, кол-во всех путей минус кол-во путей которые пересекают. Раньше мы уже считали эту величину, и значем, что она равна $\frac{2k}{N}C_{2n-1}^n =$ у нас еще пути снизу, из-за этого возникает двойка$= \frac{2}{2n-1}C_{2n-1}^n$. Домножив на $\frac{1}{2^{2n}}$ получаем вероятность таких исходов
Броуновское движение. *Давайте рассмотрим задачу. У нас есть броуновская частица и она за время Δt удаляется от своего положения на $\sqrt{\Delta t}$, во все стороны она двигается равновероятно. Предположим, что эта частица расположена в трубке с дистилированной водой и начинает как-то двигаться, находясь изначально в положении 0 в момент времени $t = 0$. Мы не будем пока представлять непрерывное движение, а представим, что частица делает прыжки и перемещается она только по оси x. То есть за время Δt, которое равно одному прыжку перемещается на Δx. Пусть она сделала N прыжков, тогда $t = N\Delta t$. Пусть $x(t)$ - положение частицы от t. Что мы можем сказать? Пусть в положительном направлении было сделано k шагов, тогда $x(t) = k\Delta x + (N-k)(-\Delta x) = \Delta x(k+k-N) = \Delta x(2k-N)$. Из опыта мы знаем, что $|\Delta x|^2 = \sigma|t|$, где $\sigma > 0$ - коэффициент пропорциональности. Также мы знаем, что $t = N\Delta t$, тогда $\Delta t = \frac{t}{N}$, и тогда $\Delta x = \sqrt{\sigma\frac{t}{N}}$. Подставив в формулу получим $x(t) = \frac{2k-N}{\sqrt{N}}\sqrt{\sigma t}$. Устремлять $\Delta t \to 0$ то же самое, что устремить $N \to \infty$ и это бесполезно, так как k может быть любым, но не бесполезно узнать, какова вероятность, что траектория лежала в каком-то промежутке: $P(a < x(t) < b) = P(a < (2k-N)\sqrt{\frac{\sigma t}{N}}) = P(\frac{a}{\sqrt{\sigma t}} < \frac{k-N}{\sqrt{N}} < \frac{b}{\sqrt{\sigma t}})$ и теперь по интегральной теореме Муавра Лапласа можем сказать, что $p = q = \frac{1}{2}$, то при $\xrightarrow{N\to\infty} \int\limits_{\frac{a}{\sqrt{\sigma t}}}^{\frac{b}{\sqrt{\sigma t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. Тогда $x(t)$ - положение Броуновской частицы в момент времени t. Получается $P(a < x(t) < b) =$ проведем замену $x = \frac{y}{\sqrt{\sigma t}} = \int\limits_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}}e^{\frac{-y^2}{2\sigma t}}dy$*

Билет 7. Теорема Пуассона. Распределение Пуассона. Задача про изюм. Пуассоновский процесс.

Решение билета 7. ***Теорема Пуассона(тут вообще как отделять от распрделения Пуассона?).*** *Рассмотрим схему Бернулли с N бросаниями монеты. Вероятность успеха $p_N = \frac{\lambda}{N}$. Тогда вероятность, что у нас ровно k успехов $\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{N^k}$ и называется распределением Пуассона. Теперь докажем: $C_N^k \frac{\lambda^k}{N^k}(1-\frac{\lambda}{n})^{N-k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}\frac{\lambda^k}{N^k}(1-\frac{\lambda}{N})^{-k}_{\to 1}(1-\frac{\lambda}{N})^N_{\to e^{-\lambda}} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$*
Задача про изюм. *Сколько должны в среднем класть изюма в тесто, чтобы вероятность того, что в булочке есть хотя бы одна изюминка была не меньше 0.99? Предположим у нас уже есть тесто на некоторое кол-во булочек и в нем N изюминок, а отношение кол-ва изюминок к кол-ву булочек равно λ (сколько мы хотим в среднем иметь на булочке). Тогда кол-во булочек равно $\frac{N}{\lambda}$. Рассмотрим отдельную булочку. Вероятность попадания отдельной изюминки в эту булочку равна $\frac{\lambda}{N}$, а вероятность того, что хотя бы одна изюминка туда попала равна $1-(1-\frac{\lambda}{N})^N$. По скольку у нас производство и булочек очень много, то можно предполагать, что $N \to \infty$, а это означает то, что кол-во теста и изюминок растет, но плотность λ остается прежней. Как и выше получаем, что $(1-\frac{\lambda}{N})^N \to e^{-\lambda}$, и тогда нам нужно, чтобы $1-e^{\lambda}$ было больше 0.99, что выполняется уже при $\lambda = 5$.*
Пуассоновский процесс. *Это процесс расскидывания точек на плоскости, у которого известно вот что:*

- *P(k точек попали в множество A) зависит от плоплощади $|A|$*
- *Если мы возьмем попарно-непересекающиеся множества $\{A_i\}$, то событие, что в A_i попало k_i точек должны быть независимыми с событием $\forall j \neq i$ в A_j попало k_j точек.*
- *P(множество A содержит более, чем 1 точку) $= \bar{o}(|A|)$*

где все множества - фигуры на плоскости. Если бы мы эти свойства делали не для плоскости, а для прямой, то это был бы Пуассоновский процесс.

Билет 8. Марковские цепи. Существование стационарного распределения и сходимость к стационарному распределению.

Решение билета 8. ***Марковские цепи.*** *Пусть X - конечное множество, $|X| = N$. Это называют множеством состояний цепи. На декартовом произведении $X \times X$ задана функция $P(x, y)$, про которую известно, что $P(x, y) \geq 0, \forall x \in X$, $\sum\limits_{y \in X} P(x, y) = 1$ и называется это стохастическая матрица. Смысл этих чисел таков: $P(x, y)$ это вероятность из точки(состояния) x перейти в точку(состояние) y. Считается, что вы обязаны что-то сделать: либо остаться в этом же состоянии, либо перейти в новое.*

Стационарное распределение существует.(соре, я спать хочу, ничего не понял, ничего не делал, если шо, комментам обводите места неверные) *Возьмем произвольное вероятностное распределение μ. $\sum\limits_{x} \mu(x) = 1$. Рассмотрим новое вероятностное распределение $\sigma^m = \frac{\mu + \mu P + \mu P^2 + \ldots + \mu P^m}{m+1}$. То есть как мы будем искать стационарное распределение? Возьмем любое вероятностное распределение и начнем его гонять под действием этого преобразование, и будем брать среднее арифметическое(называется среднее по времени). Сейчас мы с вами докажем, что $\exists \sigma^{m_k}$, которая сходится к некоторому μ и μ - стационарное распределением. Но за этим должны стоять какие-то слова, иначе непонятно, в каком смысле подпоследовательность сходится в терминах вероятностного распределения. Вот тут полезно смотреть на μ как на вектор в конечно-мерном пространстве. То есть всякое вероятностное распределение μ на X - вектор на $\mathbb{R}^N$, принадлежащий множеству $\{t_1, ..., t_n | \forall i \ t_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{N} t_i = 1\}$, рассмотрим множество на размерность меньше $\{t_1, ..., t_{n-1} | \forall i \ t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N-1} t_i \leq 1\}$. Это множество вам ничего не напоминает?. В двухмерном пространстве на графике это будет треугольник. В трехмерном - пирамидка. Можно воспринимать тогда как R^n, а можно как пирамидку, но в любом случае это множество ограниченное и замкнутое, а то есть компакт. Что такое компакт? Каким он свойством обладает? В компакте можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а значит во всякой последовательности существует сходящаяся подпоследовательность при чем она сходится к элементу этого множества. У нас как раз есть последовательность σ^m, и есть сходящаяся подпоследовательность $\sigma^{m_k} \to \mu$, которое является вероятностным распределением на X. Отображение $\mu \longmapsto \mu P$ - непрерывное отображение $\to \sigma^{m_k} P \xrightarrow{k \to \infty} \mu P$.*

С другой стороны: ${}^{m_k} P = \frac{\nu P + \nu P^2 + \ldots + \nu P^{m_k+1}}{m_k+1} = \sigma^{m_k} - \frac{\nu}{m_k+1}^{\to 0} + \frac{\nu P^{m_k+1}}{m_k+1}^{\to 0} \xrightarrow{k \to \infty} \mu \to \mu = \mu P$