

Зимний коллоквиум по курсу «Теории вероятностей и математическая статистика»

hse-ami-open-exams

Содержание

1	Вероятностное пространство. Сигма алгебра событий. Борелевская сигма алгебра. Вероятностная мера. Непрерывность вероятностной меры.	3
1.1	Вероятностное пространство.	3
1.2	Сигма алгебра событий.	3
1.3	Борелевская сигма алгебра.	3
1.4	Вероятностная мера.	3
1.5	Непрерывность вероятностной меры.	3
2	Случайная величина и ее распределение. Функция распределения случайной величины. Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.	4
2.1	Случайная величина и ее распределение.	4
2.2	Функция распределения случайной величины.	4
2.3	Совместное распределение двух случайных величин.	4
2.4	Свойства функции распределения.	4
3	Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.	5
3.1	Независимые случайные величины.	5
3.2	Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей.	5
3.3	Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.	5
4	Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства: линейность, монотонность, неравенство Чебышева. Математическое ожидание произведения независимых величин.	6
4.1	Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства.	6
4.2	Математическое ожидание произведения независимых величин.	6
5	Общее определение математического ожидания и его корректность. Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.	7
5.1	Общее определение математического ожидания и его корректность.	7
5.2	Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.	7
6	Дисперсия и ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, геометрический смысл.	8
6.1	Дисперсия и ее свойства.	8
6.2	Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин.	8
6.3	Геометрический смысл коэффициента корреляции двух случайных величин.	8
7	Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.	9
7.1	Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.	9

8	Закон больших чисел в слабой форме. Метод Монте-Карло.	10
8.1	Закон больших чисел в слабой форме.	10
8.2	Метод Монте-Карло.	10

1 Вероятностное пространство. Сигма алгебра событий. Борелевская сигма алгебра. Вероятностная мера. Непрерывность вероятностной меры.

1.1 Вероятностное пространство.

Определение 1. Класс множеств, который содержит \emptyset и Ω , замкнутый относительно операций \cap и \cup , содержит вместе с каждым множеством его дополнение и называется **алгеброй множеств** или **алгеброй событий**.

1.2 Сигма алгебра событий.

Определение 2. Если алгебра событий замкнута относительно счетных объединений и пересечений, то ее называют σ -алгеброй.

1.3 Борелевская сигма алгебра.

Определение 3.

- Борелевская σ -алгебра – минимальная σ -алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства.
- Борелевская σ -алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – σ -алгебра, порожденная отрезками, интервалами или полуинтервалами.

1.4 Вероятностная мера.

Пусть A – σ -алгебра.

Определение 4. Функция $P : A \rightarrow [0, 1]$ называется **вероятностной мерой**, если

- $P(\Omega) = 1$
- Для любого набора попарно непересекающихся событий $\{A_n\} \in A$ выполняется $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$.

1.5 Непрерывность вероятностной меры.

Теорема 1. Пусть (Ω, A, P) – вероятностное пространство. Тогда

1. Если $\{A_n\} \in A$, $A_n \subset A_{n+1}$ и $A = \bigcup_n A_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$.
2. Если $\{A_n\} \in A$, $A_{n+1} \subset A_n$ и $A = \bigcap_n A_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$.

Доказательство.

1. Пусть $C_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$, $C_1 = A_1$. Тогда $A = \bigcup_n C_n$ и $A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^n C_k$. По свойству аддитивности вероятностной меры P получаем:

$$P(A) = \sum_n P(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(C_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_{n+1}).$$

2. Пусть $A'_n = \Omega \setminus A_n$. Тогда по закону де Моргана получаем первый пункт.

□

2 Случайная величина и ее распределение. Функция распределения случайной величины. Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.

2.1 Случайная величина и ее распределение.

Пусть (Ω, A, P) – вероятностное пространство.

Определение 5. Функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если для любого промежутка I выполнено:

$$\xi^{-1}(I) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in I\} \in A.$$

Определение 6. Распределением случайной величины ξ называется вероятностная мера μ_ξ на $B = B(\mathbb{R})$, определяемая равенством

$$\mu_\xi(B) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) \in B\}) = P(\xi^{-1}(B)).$$

2.2 Функция распределения случайной величины.

Определение 7. Функцией распределения F_ξ вероятностной меры μ_ξ называется функцией распределения случайной величины ξ , то есть

$$F_\xi(t) = \mu_\xi((-\infty, t]) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) \leq t\}),$$

мера μ_ξ показывает с какой вероятностью ξ принимает те или иные значения.

2.3 Совместное распределение двух случайных величин.

Пусть ξ и η – случайные величины.

Определение 8. Отображение $\omega \mapsto (\xi(\omega), \eta(\omega))$ определяет вероятностную меру $\mu(B) = P(\{\omega \mid (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\})$ – совместное распределение случайных величин ξ и η :

$$F(x, y) = \mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) \leq x \wedge \eta(\omega) \leq y\}).$$

2.4 Свойства функции распределения.

Теорема 2. Если F – функция распределения, то

1. $0 \leq F \leq 1$
2. F неубывает
3. F непрерывна справа, т.е. $\lim_{t \rightarrow s+} F(t) = F(s)$
4. $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$

Доказательство.

1. Очевидно, т.к. $0 \leq P \leq 1$
2. $b > a \Rightarrow F(b) - F(a) = P(a \leq \xi \leq b)$
3. Найдем $\lim_{t \rightarrow s+} F(t)$. Пусть $A_n = (-\infty, s + \frac{1}{n}]$, $A_{n+1} \subset A_n$, $\bigcap_n A_n = (-\infty, s]$. Из непрерывности меры μ следует, что

$$\mu(A_n) \rightarrow \mu\left(\bigcap_n A_n\right) \Rightarrow F\left(s + \frac{1}{n}\right) \rightarrow F(s).$$

4. Доказывается аналогично 3 свойству.

□

3 Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

3.1 Независимые случайные величины.

Определение 9. Случайные величины ξ и η называются независимыми, если для всяких промежутков U и V выполняется равенство

$$P(\{w \mid \xi(w) \in U \wedge \eta(w) \in V\}) = P(\{w \mid \xi(w) \in U\}) \cdot P(\{w \mid \eta(w) \in V\}), \text{ то есть } \mu_\xi(U) = \mu_\eta(V).$$

3.2 Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей.

Теорема 3. Случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда $F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$.

Доказательство. Совместное распределение однозначно определяется функцией распределения F . Если F совпадает с функцией распределения меры $\mu_\xi \times \mu_\eta$, то меры совпадают. \square

Теорема 4. Пусть распределения ξ и η заданы плотностями. Тогда независимость ξ и η равносильна тому, что совместное распределение задано плотностью

$$\rho(x, y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y).$$

Доказательство. По теореме Фубини:

$$\int_a^b \rho_\xi(x) dx \cdot \int_c^d \rho_\eta(x) dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \rho_\xi(x) \rho_\eta(y) dx dy = \mu([a, b] \times [c, d]).$$

\square

3.3 Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

Теорема 5. Пусть ξ и η независимы и их распределение задано плотностями. Тогда распределение суммы $\nu = \xi + \eta$ задано плотностью

$$\rho_\nu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(t) \rho_\eta(x - t) dt.$$

Доказательство.

$$F_\nu(t) = P(\{w \mid \xi(w) + \eta(w) \leq t\}) = \iint_{x+y \leq t} \rho_\xi(x) \rho_\eta(y) dx dy$$

Пусть $u = x + y, v = x$. Тогда, применив теорему Фубини, получим

$$\int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(t) \rho_\eta(x - t) dt \right) du$$

\square

4 Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства: линейность, монотонность, неравенство Чебышева. Математическое ожидание произведения независимых величин.

4.1 Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства.

Пусть ξ – случайная дискретная величина на (Ω, A, P) , принимающая значения $\{x_1, \dots, x_n\}$. Положим $A_i = \xi^{-1}(\{x_i\})$. Тогда

$$\xi = x_1 \mathbb{I}_{A_1} + \dots + x_n \mathbb{I}_{A_n}.$$

Определение 10. Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число

$$E\xi = x_1 P(A_1) + \dots + x_n P(A_n).$$

Теорема 6.

1. $E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta$
2. Если $\xi \geq \eta$ почти наверняка, то $E\xi \geq E\eta$.
3. Если $\xi \geq 0$, то для любого $C > 0$ верно $P(\xi \geq C) \leq \frac{E\xi}{C}$

Доказательство.

1. Следует из определения математического ожидания дискретной случайной величины и разложения случайной величины в сумму произведений значений и индикаторов.
2. $0 \leq E(\eta - \xi) = E\eta - E\xi \Rightarrow E\eta \geq E\xi$
3. Пусть $A = \{\omega \mid \xi \geq C\}$. Тогда

$$\xi \geq C \cdot \mathbb{I}_A.$$

Неравенство выполняется для любых значений \mathbb{I}_A . Применив свойства монотонности и линейности получим:

$$E\xi \geq CE\mathbb{I}_A = CP(A) \Rightarrow \frac{E\xi}{C} \geq P(A).$$

□

4.2 Математическое ожидание произведения независимых величин.

Теорема 7. Если случайные величины ξ и η независимы, то $E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$.

Доказательство. Разложим ξ и η в сумму произведений значений и индикаторов:

$$\xi = \sum_i a_i \mathbb{I}_{A_i}, \eta = \sum_j b_j \mathbb{I}_{B_j} \Rightarrow \xi \cdot \eta = \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{I}_{A_i \cap B_j} \Rightarrow E(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j} a_i b_j P(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} a_i b_j P(A_i) P(B_j) = E\xi \cdot E\eta$$

□

5 Общее определение математического ожидания и его корректность. Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.

5.1 Общее определение математического ожидания и его корректность.

Теорема 8. Для любой случайной величины ξ существует последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ такая, что $\xi_n \Rightarrow \xi$ на Ω .

Доказательство. Пусть $\xi_n = 10^{-n} \cdot \lfloor 10^n \cdot \xi \rfloor$. Тогда $\sup |\xi_n - \xi| \leq 10^{-n} \rightarrow 0$. \square

Определение 11. Пусть множество значений $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ дискретной случайной величины ξ бесконечно. Положим $A_i = \xi^{-1}(\{x_i\})$. Будем говорить, что у ξ существует конечное математическое ожидание если ряд $E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(A_k)$ сходится абсолютно.

Доказательство корректности. Так как перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не влияет на сходимость и сумму ряда, а произведение абсолютно сходящихся рядов сходится к произведению их сумм, то все свойства математического ожидания будут выполняться и для суммы этого ряда. \square

5.2 Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.

Теорема 9. Пусть φ – кусочно-непрерывная функция на \mathbb{R} и $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – случайная величина, распределение которой задано плотностью ρ_ξ , тогда

$$\exists E(\varphi(\xi)) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)\rho_\xi(x)|dx \text{ сходится.}$$

В случае сходимости

$$E(\varphi(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\rho_\xi(x)dx.$$

Доказательство. Докажем для кусочно-постоянных функций. Пусть f – кусочно-постоянная функция, а это значит, что $f(\xi)$ – дискретная величина, тогда

$$E(f(\xi)) = \sum_n C_n P(A_n) = \sum_n C_n \int_{\Delta_n} \rho_\xi(x)dx = \sum_n \int_{\Delta_n} f(x)\rho_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_\xi(x)dx.$$

В общем случае мы можем разбивать числовую прямую на счетное число промежутков таким образом, чтобы каждое такое разбиение задавало кусочно-постоянную функцию $f_n(x)$, и при этом $f_n(\xi) \Rightarrow \varphi(\xi)$, тогда получим то же утверждение для кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$. \square

6 Дисперсия и ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, геометрический смысл.

6.1 Дисперсия и ее свойства.

Определение 12. Дисперсией случайной величины ξ называют число

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2.$$

Утверждение 1. Дисперсия может быть вычислена по формуле

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

Доказательство. Следует из линейности математического ожидания. □

Утверждение 2. При умножении случайной величины на константу c дисперсия увеличивается в c^2 раз.

Доказательство. Следует из линейности математического ожидания. □

Утверждение 3. Дисперсия всегда неотрицательна.

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение 4. $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \text{const}$ почти наверняка.

Доказательство. Очевидно, т.к. если $D\xi = 0$, то $\xi = E\xi$ почти наверняка. □

Утверждение 5. Если случайные величины независимы, то дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий.

Доказательство. Следует из того, что математическое ожидание произведения независимых величин равна произведению математических ожиданий этих величин. □

Утверждение 6. Дисперсия не зависит от сдвига случайной величины на константу.

Доказательство. Следует из предыдущего утверждения. □

Утверждение 7. Для дисперсии справедливо неравенство Чебышева.

Доказательство. Следует из того, что дисперсия является математическим ожиданием. □

6.2 Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин.

Определение 13. Ковариацией $\text{cov}(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η называется число

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)).$$

Она существует если существуют $D\xi$ и $D\eta$.

Определение 14. Коэффициентом корреляции $\rho(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η , дисперсии которых отличны от 0, называется число

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}.$$

6.3 Геометрический смысл коэффициента корреляции двух случайных величин.

Ковариация – "скалярное произведение а коэффициент корреляции – "косинус угла".

- 7 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.
- 7.1 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.

8 Закон больших чисел в слабой форме. Метод Монте-Карло.

8.1 Закон больших чисел в слабой форме.

8.2 Метод Монте-Карло.