

# Зимний коллоквиум по курсу «Теории вероятностей и математическая статистика»

hse-ami-open-exams

## Содержание

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Вероятностное пространство. Сигма алгебра событий. Борелевская сигма алгебра. Вероятностная мера. Непрерывность вероятностной меры.</b>   | <b>3</b> |
| 1.1      | Вероятностное пространство. . . . .  | 3        |
| 1.2      | Сигма алгебра событий. . . . .   | 3        |
| 1.3      | Борелевская сигма алгебра. . . . .   | 3        |
| 1.4      | Вероятностная мера. . . . .  | 3        |
| 1.5      | Непрерывность вероятностной меры. . . . .  | 3        |
| <b>2</b> | <b>Случайная величина и ее распределение. Функция распределения случайной величины. Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.</b>               | <b>4</b> |
| 2.1      | Случайная величина и ее распределение. . . . .   | 4        |
| 2.2      | Функция распределения случайной величины. . . . .  | 4        |
| 2.3      | Совместное распределение двух случайных величин. . . . .   | 4        |
| 2.4      | Свойства функции распределения. . . . .  | 4        |
| <b>3</b> | <b>Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.</b>   | <b>5</b> |
| 3.1      | Независимые случайные величины. . . . .  | 5        |
| 3.2      | Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. . . . .  | 5        |
| 3.3      | Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин. . . . .  | 5        |
| <b>4</b> | <b>Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства: линейность, монотонность, неравенство Чебышева. Математическое ожидание произведения независимых величин.</b> | <b>6</b> |
| 4.1      | Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства. . . . .  | 6        |
| 4.2      | Математическое ожидание произведения независимых величин. . . . .  | 6        |
| <b>5</b> | <b>Общее определение математического ожидания и его корректность. Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.</b>                             | <b>7</b> |
| 5.1      | Общее определение математического ожидания и его корректность. . . . .   | 7        |
| 5.2      | Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью. . . . .   | 7        |
| <b>6</b> | <b>Дисперсия и ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, геометрический смысл.</b>  | <b>8</b> |
| 6.1      | Дисперсия и ее свойства. . . . .   | 8        |
| 6.2      | Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин. . . . .  | 8        |
| 6.3      | Геометрический смысл коэффициента корреляции двух случайных величин. . . . .   | 8        |
| <b>7</b> | <b>Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.</b>  | <b>9</b> |
| 7.1      | Равномерное распределение. . . . .   | 9        |
| 7.2      | Показательное распределение. . . . .   | 9        |
| 7.3      | Нормальное распределение. . . . .  | 9        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>8</b> | <b>Закон больших чисел в слабой форме. Метод Монте-Карло.</b> | <b>10</b> |
| 8.1      | Закон больших чисел в слабой форме. . . . .                   | 10        |
| 8.2      | Метод Монте-Карло. . . . .                                    | 10        |

# 1 Вероятностное пространство. Сигма алгебра событий. Борелевская сигма алгебра. Вероятностная мера. Непрерывность вероятностной меры.

## 1.1 Вероятностное пространство.

**Определение 1.** Набор  $(\Omega, A, P)$ , где  $\Omega$  – множество элементарных исходов,  $A$  –  $\sigma$ -алгебра, а  $P$  – вероятностная мера, называется вероятностным пространством.

**Определение 2.** Класс множеств, который содержит  $\emptyset$  и  $\Omega$ , замкнутый относительно операций  $\cap$  и  $\cup$ , содержит вместе с каждым множеством его дополнение и называется **алгеброй множеств** или **алгеброй событий**.

## 1.2 Сигма алгебра событий.

**Определение 3.** Если алгебра событий замкнута относительно счетных объединений и пересечений, то ее называют  $\sigma$ -алгеброй.

## 1.3 Борелевская сигма алгебра.

**Определение 4.**

- Борелевская  $\sigma$ -алгебра – минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства.
- Борелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  –  $\sigma$ -алгебра, порожденная отрезками/интервалами/полуинтервалами.

## 1.4 Вероятностная мера.

Пусть  $A$  –  $\sigma$ -алгебра.

**Определение 5.** Функция  $P : A \rightarrow [0, 1]$  называется **вероятностной мерой**, если

- $P(\Omega) = 1$
- Для любого набора попарно непересекающихся событий  $\{A_n\} \in A$  выполняется  $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$ .

## 1.5 Непрерывность вероятностной меры.

**Теорема 1.** Пусть  $(\Omega, A, P)$  – вероятностное пространство. Тогда

1. Если  $\{A_n\} \in A$ ,  $A_n \subset A_{n+1}$  и  $A = \bigcup_n A_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$ .
2. Если  $\{A_n\} \in A$ ,  $A_{n+1} \subset A_n$  и  $A = \bigcap_n A_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $C_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$ ,  $C_1 = A_1$ . Тогда  $A = \bigcup_n C_n$  и  $A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^n C_k$ . По свойству аддитивности вероятностной меры  $P$  получаем:

$$P(A) = \sum_n P(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(C_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_{n+1}).$$

2. Пусть  $A'_n = \Omega \setminus A_n$ . Тогда по закону де Моргана получаем первый пункт.

□

## 2 Случайная величина и ее распределение. Функция распределения случайной величины. Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.

### 2.1 Случайная величина и ее распределение.

Пусть  $(\Omega, A, P)$  – вероятностное пространство.

**Определение 6.** Функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется случайной величиной, если для любого промежутка  $I$  выполнено:

$$\xi^{-1}(I) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in I\} \in A.$$

**Определение 7.** Распределением случайной величины  $\xi$  называется вероятностная мера  $\mu_\xi$  на  $B = B(\mathbb{R})$ , определяемая равенством

$$\mu_\xi(B) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) \in B\}) = P(\xi^{-1}(B)).$$

### 2.2 Функция распределения случайной величины.

**Определение 8.** Функцией распределения  $F_\xi$  вероятностной меры  $\mu_\xi$  называется функцией распределения случайной величины  $\xi$ , то есть

$$F_\xi(t) = \mu_\xi((-\infty, t]) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) \leq t\}),$$

мера  $\mu_\xi$  показывает с какой вероятностью  $\xi$  принимает те или иные значения.

### 2.3 Совместное распределение двух случайных величин.

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – случайные величины.

**Определение 9.** Отображение  $\omega \mapsto (\xi(\omega), \eta(\omega))$  определяет вероятностную меру  $\mu(B) = P(\{\omega \mid (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in B\})$  – совместное распределение случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ :

$$F(x, y) = \mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) \leq x \wedge \eta(\omega) \leq y\}).$$

### 2.4 Свойства функции распределения.

**Теорема 2.** Если  $F$  – функция распределения, то

1.  $0 \leq F \leq 1$
2.  $F$  неубывает
3.  $F$  непрерывна справа, т.е.  $\lim_{t \rightarrow s+} F(t) = F(s)$
4.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$

*Доказательство.*

1. Очевидно, т.к.  $0 \leq P \leq 1$
2.  $b > a \Rightarrow F(b) - F(a) = P(a \leq \xi \leq b)$
3. Найдем  $\lim_{t \rightarrow s+} F(t)$ . Пусть  $A_n = (-\infty, s + \frac{1}{n}]$ ,  $A_{n+1} \subset A_n$ ,  $\bigcap_n A_n = (-\infty, s]$ . Из непрерывности меры  $\mu$  следует, что

$$\mu(A_n) \rightarrow \mu\left(\bigcap_n A_n\right) \Rightarrow F\left(s + \frac{1}{n}\right) \rightarrow F(s).$$

4. Доказывается аналогично 3 свойству.

□

### 3 Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

#### 3.1 Независимые случайные величины.

**Определение 10.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  называются независимыми, если для всяких промежутков  $U$  и  $V$  выполняется равенство

$$P(\{w \mid \xi(w) \in U \wedge \eta(w) \in V\}) = P(\{w \mid \xi(w) \in U\}) \cdot P(\{w \mid \eta(w) \in V\}), \text{ то есть } \mu_\xi(U) = \mu_\eta(V).$$

#### 3.2 Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей.

**Теорема 3.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы тогда и только тогда, когда  $F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$ .

*Доказательство.* Совместное распределение однозначно определяется функцией распределения  $F$ . Если  $F$  совпадает с функцией распределения меры  $\mu_\xi \times \mu_\eta$ , то меры совпадают.  $\square$

**Теорема 4.** Пусть распределения  $\xi$  и  $\eta$  заданы плотностями. Тогда независимость  $\xi$  и  $\eta$  равносильна тому, что совместное распределение задано плотностью

$$\rho(x, y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y).$$

*Доказательство.* По теореме Фубини:

$$\int_a^b \rho_\xi(x) dx \cdot \int_c^d \rho_\eta(y) dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \rho_\xi(x) \rho_\eta(y) dx dy = \mu([a, b] \times [c, d]).$$

$\square$

#### 3.3 Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

**Теорема 5.** Пусть  $\xi$  и  $\eta$  независимы и их распределение задано плотностями. Тогда распределение суммы  $\nu = \xi + \eta$  задано плотностью

$$\rho_\nu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(t) \rho_\eta(x - t) dt.$$

*Доказательство.*

$$F_\nu(t) = P(\{w \mid \xi(w) + \eta(w) \leq t\}) = \iint_{x+y \leq t} \rho_\xi(x) \rho_\eta(y) dx dy$$

Пусть  $u = x + y, v = x$ . Тогда, применив теорему Фубини, получим

$$\int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(t) \rho_\eta(x - t) dt \right) du$$

$\square$

## 4 Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства: линейность, монотонность, неравенство Чебышева. Математическое ожидание произведения независимых величин.

### 4.1 Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства.

Пусть  $\xi$  – случайная дискретная величина на  $(\Omega, A, P)$ , принимающая значения  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Положим  $A_i = \xi^{-1}(\{x_i\})$ . Тогда

$$\xi = x_1 \mathbb{I}_{A_1} + \dots + x_n \mathbb{I}_{A_n}.$$

**Определение 11.** Математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  называется число

$$E\xi = x_1 P(A_1) + \dots + x_n P(A_n).$$

**Теорема 6.**

1.  $E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta$
2. Если  $\xi \geq \eta$  почти наверняка, то  $E\xi \geq E\eta$ .
3. Если  $\xi \geq 0$ , то для любого  $C > 0$  верно  $P(\xi \geq C) \leq \frac{E\xi}{C}$

*Доказательство.*

1. Следует из определения математического ожидания дискретной случайной величины и разложения случайной величины в сумму произведений значений и индикаторов.
2.  $0 \leq E(\eta - \xi) = E\eta - E\xi \Rightarrow E\eta \geq E\xi$
3. Пусть  $A = \{\omega \mid \xi \geq C\}$ . Тогда

$$\xi \geq C \cdot \mathbb{I}_A.$$

Неравенство выполняется для любых значений  $\mathbb{I}_A$ . Применив свойства монотонности и линейности получим:

$$E\xi \geq CE\mathbb{I}_A = CP(A) \Rightarrow \frac{E\xi}{C} \geq P(A).$$

□

### 4.2 Математическое ожидание произведения независимых величин.

**Теорема 7.** Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$ .

*Доказательство.* Разложим  $\xi$  и  $\eta$  в сумму произведений значений и индикаторов:

$$\xi = \sum_i a_i \mathbb{I}_{A_i}, \eta = \sum_j b_j \mathbb{I}_{B_j} \Rightarrow \xi \cdot \eta = \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{I}_{A_i \cap B_j} \Rightarrow E(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j} a_i b_j P(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} a_i b_j P(A_i) P(B_j) = E\xi \cdot E\eta$$

□

## 5 Общее определение математического ожидания и его корректность. Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.

### 5.1 Общее определение математического ожидания и его корректность.

**Теорема 8.** Для любой случайной величины  $\xi$  существует последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  такая, что  $\xi_n \Rightarrow \xi$  на  $\Omega$ .

*Доказательство.* Пусть  $\xi_n = 10^{-n} \cdot \lfloor 10^n \cdot \xi \rfloor$ . Тогда  $\sup |\xi_n - \xi| \leq 10^{-n} \rightarrow 0$ .  $\square$

**Определение 12.** Пусть множество значений  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  дискретной случайной величины  $\xi$  бесконечно. Положим  $A_i = \xi^{-1}(\{x_i\})$ . Будем говорить, что у  $\xi$  существует конечное математическое ожидание если ряд  $E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(A_k)$  сходится абсолютно.

*Доказательство корректности.* Так как перестановка членов абсолютно сходящегося ряда не влияет на сходимость и сумму ряда, а произведение абсолютно сходящихся рядов сходится к произведению их сумм, то все свойства математического ожидания будут выполняться и для суммы этого ряда.  $\square$

### 5.2 Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.

**Теорема 9.** Пусть  $\varphi$  – кусочно-непрерывная функция на  $\mathbb{R}$  и  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – случайная величина, распределение которой задано плотностью  $\rho_\xi$ , тогда

$$\exists E(\varphi(\xi)) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)\rho_\xi(x)|dx \text{ сходится.}$$

В случае сходимости

$$E(\varphi(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\rho_\xi(x)dx.$$

*Доказательство.* Докажем для кусочно-постоянных функций. Пусть  $f$  – кусочно-постоянная функция, а это значит, что  $f(\xi)$  – дискретная величина, тогда

$$E(f(\xi)) = \sum_n C_n P(A_n) = \sum_n C_n \int_{\Delta_n} \rho_\xi(x)dx = \sum_n \int_{\Delta_n} f(x)\rho_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_\xi(x)dx.$$

В общем случае мы можем разбивать числовую прямую на счетное число промежутков таким образом, чтобы каждое такое разбиение задавало кусочно-постоянную функцию  $f_n(x)$ , и при этом  $f_n(\xi) \Rightarrow \varphi(\xi)$ , тогда получим то же утверждение для кусочно-непрерывной функции  $\varphi(x)$ .  $\square$

## 6 Дисперсия и ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, геометрический смысл.

### 6.1 Дисперсия и ее свойства.

**Определение 13.** Дисперсией случайной величины  $\xi$  называют число

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2.$$

**Утверждение 1.** Дисперсия может быть вычислена по формуле

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2.$$

*Доказательство.* Следует из линейности математического ожидания. □

**Утверждение 2.** При умножении случайной величины на константу  $c$  дисперсия увеличивается в  $c^2$  раз.

*Доказательство.* Следует из линейности математического ожидания. □

**Утверждение 3.** Дисперсия всегда неотрицательна.

*Доказательство.* Очевидно. □

**Утверждение 4.**  $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \text{const}$  почти наверняка.

*Доказательство.* Очевидно, т.к. если  $D\xi = 0$ , то  $\xi = E\xi$  почти наверняка. □

**Утверждение 5.** Если случайные величины независимы, то дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий.

*Доказательство.* Следует из того, что математическое ожидание произведения независимых величин равна произведению математических ожиданий этих величин. □

**Утверждение 6.** Дисперсия не зависит от сдвига случайной величины на константу.

*Доказательство.* Следует из предыдущего утверждения. □

**Утверждение 7.** Для дисперсии справедливо неравенство Чебышева.

*Доказательство.* Следует из того, что дисперсия является математическим ожиданием. □

### 6.2 Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин.

**Определение 14.** Ковариацией  $\text{cov}(\xi, \eta)$  случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  называется число

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)).$$

Она существует если существуют  $D\xi$  и  $D\eta$ .

**Определение 15.** Коэффициентом корреляции  $\rho(\xi, \eta)$  случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ , дисперсии которых отличны от 0, называется число

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}.$$

### 6.3 Геометрический смысл коэффициента корреляции двух случайных величин.

Ковариация – "скалярное произведение а коэффициент корреляции – "косинус угла".



## 7 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.

### 7.1 Равномерное распределение.

$\xi$  имеет равномерное распределение на  $[a, b]$ , если

$$\rho_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей равномерное распределение:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_{\xi}(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho_{\xi}(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \Rightarrow D(\xi) = E(\xi^2) - E(\xi)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### 7.2 Показательное распределение.

$\xi$  имеет показательное распределение, если

$$\rho_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей показательное распределение:

$$E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \rho_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^k} \Rightarrow E\xi = \frac{1}{\lambda}, D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

### 7.3 Нормальное распределение.

$\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu$  и  $\sigma$ , если

$$\rho_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad E\xi = \mu, \quad D\xi = \sigma^2$$

## 8 Закон больших чисел в слабой форме. Метод Монте-Карло.

### 8.1 Закон больших чисел в слабой форме.

**Теорема 10.** Пусть  $\{\xi_n\}$  – последовательность независимых случайных величин таких, что  $E\xi_n^2 < \infty$ . Обозначим  $E\xi_n = \mu_n$  и  $D\xi_n = \sigma_n^2$ . Тогда

$$\frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2} \rightarrow 0 \Rightarrow P\left(\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{\mu_1 + \dots + \mu_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0$$

*Доказательство.* Из неравенства Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{\mu_1 + \dots + \mu_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2 \varepsilon^2} \rightarrow 0$$

□

### 8.2 Метод Монте-Карло.

Предположим, требуется вычислить определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ . Рассмотрим случайную величину  $\xi$ , равномерно распределенную на отрезке  $[a, b]$ . Тогда  $f(\xi)$  также будет случайной величиной, причем ее математическое ожидание выражается как

$$Ef(\xi) = \int_a^b f(x)\rho_\xi(x)dx = \int_a^b f(x)\frac{1}{b-a}dx$$

Таким образом, интеграл выражается как

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)Ef(\xi) \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$