

Летний экзамен по алгебре

hse-ami-open-exams

Содержание

1	Бинарные операции. Полугруппы, моноиды и группы. Коммутативные группы. Примеры групп. Порядок группы. Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$.	2
1.1	Бинарные операции.	2
1.2	Полугруппы, моноиды и группы.	2
1.3	Коммутативные группы.	2
1.4	Примеры групп.	2
1.5	Порядок группы.	2
1.6	Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$	2
2	Подгруппы. Циклические подгруппы. Циклические группы. Порядок элемента. Связь между порядком элемента и порядком порождаемой им циклической подгруппы.	3
2.1	Циклические подгруппы.	3
2.2	Циклические группы.	3
2.3	Порядок элемента.	3
2.4	Связь между порядком элемента и порядком порождаемой им циклической подгруппы.	3
3	Смежные классы. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа.	4
3.1	Смежные классы.	4
3.2	Индекс подгруппы.	4
3.3	Теорема Лагранжа.	4
4	Пять следствий из теоремы Лагранжа.	5
4.1	Следствие 1.	5
4.2	Следствие 2.	5
4.3	Следствие 3.	5
4.4	Следствие 4.	5
4.5	Следствие 5.	5
5	Нормальные подгруппы и факторгруппы.	6
5.1	Нормальные подгруппы.	6
5.1.1	Эквивалентность условий нормальности группы.	6
5.2	Факторгруппы.	6
5.2.1	Корректность.	6
5.2.2	Примеры факторгрупп.	6
6	Гомоморфизмы групп. Простейшие свойства гомоморфизмов. Изоморфизмы групп. Ядро и образ гомоморфизма групп, их свойства.	7
6.1	Гомоморфизмы групп.	7
6.2	Простейшие свойства гомоморфизмов.	7
6.3	Изоморфизмы групп.	7
6.4	Ядро и образ гомоморфизма групп, их свойства.	7
7	Теорема о гомоморфизме для групп.	8

1 Бинарные операции. Полугруппы, моноиды и группы. Коммутативные группы. Примеры групп. Порядок группы. Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$.

1.1 Бинарные операции.

Определение 1. Множество с бинарной операцией – это множество M с заданным отображением

$$M \times M \rightarrow M, \quad (a, b) \mapsto a \circ b.$$

Множество с бинарной операцией обычно обозначают (M, \circ) .

1.2 Полугруппы, моноиды и группы.

Определение 2. Множество с бинарной операцией (M, \circ) называется **полугруппой**, если данная бинарная операция **ассоциативна**, т.е.

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \text{для всех } a, b, c \in M.$$

Определение 3. Полугруппа (S, \circ) называется **моноидом**, если в ней есть нейтральный элемент, т.е. такой элемент $e \in S$, что $e \circ a = a \circ e = a$ для любого $a \in S$.

Определение 4. Моноид (S, \circ) называется **группой**, если для каждого элемента $a \in S$ найдется обратный элемент, т.е. такой $b \in S$, что $a \circ b = b \circ a = e$.

1.3 Коммутативные группы.

Определение 5. Группа (G, \circ) называется **коммутативной** или **абелевой**, если групповая операция коммутативна, т.е. $a \circ b = b \circ a$ для любых $a, b \in G$.

1.4 Примеры групп.

1. Числовые аддитивные группы: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Z}_n, +)$.
2. Числовые мультипликативные группы: $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$, p – простое.
3. Группы матриц: $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$; $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.
4. Группы подстановок: симметрическая группа S_n – все подстановки длины n , $|S_n| = n!$; знакопеременная группа A_n – четные подстановки длины n , $|A_n| = n!/2$.

1.5 Порядок группы.

Определение 6. **Порядок** группы G – это число элементов в G . Группа называется **конечной**, если ее порядок конечен, и **бесконечной** иначе.

1.6 Описание всех подгрупп в группе $(\mathbb{Z}, +)$.

Определение 7. Подмножество H группы G называется **подгруппой**, если выполнены следующий три условия:

1. $e \in H$
2. $ab \in H$ для любых $a, b \in H$
3. $a^{-1} \in H$ для любого $a \in H$

Утверждение 1. Всякая подгруппа в $(\mathbb{Z}, +)$ имеет вид $k\mathbb{Z} = \{ka \mid a \in \mathbb{Z}\}$ для некоторого целого неотрицательного k .

Доказательство. Пусть H – подгруппа в \mathbb{Z} . Если $H = \{0\}$, положим $k = 0$. Иначе пусть $k = \min(H \cap \mathbb{N})$ – наименьшее натуральное число, лежащее в H . Тогда $k\mathbb{Z} \subseteq H$. С другой стороны, если $a \in H$ и $a = qk + r$ – результат деления a на k с остатком, то $0 \leq r \leq k - 1$ и $r = a - qk \in H$. Отсюда $r = 0$ и $H = k\mathbb{Z}$. \square

2 Подгруппы. Циклические подгруппы. Циклические группы. Порядок элемента. Связь между порядком элемента и порядком порождаемой им циклической подгруппы.

2.1 Циклические подгруппы.

Определение 8. Пусть G – группа и $g \in G$. **Циклической подгруппой**, порожденной элементом g , называется подмножество $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Циклическая подгруппа, порожденная элементом g , обозначается $\langle g \rangle$. Элемент g называется **порождающим** или **образующим** для подгруппы $\langle g \rangle$.

2.2 Циклические группы.

Определение 9. Группа G называется **циклической**, если найдется такой элемент $g \in G$, что $G = \langle g \rangle$.

2.3 Порядок элемента.

Определение 10. Пусть G – группа и $g \in G$. **Порядком элемента g** называется такое наименьшее натуральное число m , что $g^m = e$. Если такого натурального числа m не существует, говорят, что порядок элемента g равен бесконечности. Порядок элемента обозначается $\text{ord}(g)$.

2.4 Связь между порядком элемента и порядком порождаемой им циклической подгруппы.

Утверждение 2. Пусть G – группа и $g \in G$. Тогда $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$.

Доказательство. Заметим, что если $g^k = g^s$, то $g^{k-s} = e$. Поэтому если элемент g имеет бесконечный порядок, то все элементы $g^n, n \in \mathbb{Z}$, попарно различны и подгруппа $\langle g \rangle$ содержит бесконечно много элементов. Если же порядок элемента g равен m , то из минимальности числа m следует, что элементы $e = g^0, g = g^1, g^2, \dots, g^{m-1}$ попарно различны. Далее, для всякого $n \in \mathbb{Z}$ мы имеем $n = mq + r$, где $0 \leq r \leq m-1$, и

$$g^n = g^{mq+r} = (g^m)^q g^r = e^q g^r = g^r.$$

Следовательно, $\langle g \rangle = \{e, g, \dots, g^{m-1}\}$ и $|\langle g \rangle| = m$. □

3 Смежные классы. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа.

3.1 Смежные классы.

Определение 11. Пусть G – группа, $H \subseteq G$ – подгруппа и $g \in G$. **Левым смежным классом** элемента g группы G по подгруппе H называется подмножество

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

3.2 Индекс подгруппы.

Определение 12. Пусть G – группа и $H \subseteq G$ – подгруппа. **Индексом подгруппы H** в группе G называется число левых смежных классов G по H . Индекс группы G по подгруппе H обозначается $[G : H]$.

3.3 Теорема Лагранжа.

Лемма 1. Пусть G – группа, $H \subseteq G$ – ее подгруппа и $g_1, g_2 \in G$. Тогда либо $g_1H = g_2H$, либо $g_1H \cap g_2H = \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$, т.е. $g_1h_1 = g_2h_2$ для некоторых $h_1, h_2 \in H$. Нужно доказать, что $g_1H = g_2H$. Заметим, что $g_1H = g_2h_2h_1^{-1}H \subseteq g_2H$. Обратное включение доказывается аналогично. \square

Лемма 2. Пусть G – группа и $H \subseteq G$ – конечная подгруппа. Тогда $|gH| = |H|$ для любого $g \in G$.

Доказательство. Поскольку $gH = \{gh \mid h \in H\}$, в gH элементов не больше, чем в H . Если $gh_1 = gh_2$, то домножаем слева на g^{-1} и получаем $h_1 = h_2$. Значит, все элементы вида gh , где $h \in H$, попарно различны, откуда $|gH| = |H|$. \square

Теорема 1. Пусть G – конечная группа и $H \subseteq G$ – подгруппа. Тогда

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

Доказательство. Каждый элемент группы G лежит в (своем) левом смежном классе по подгруппе H , разные смежные классы не пересекаются (лемма 1) и каждый из них содержит по $|H|$ элементов (лемма 2). \square

4 Пять следствий из теоремы Лагранжа.

4.1 Следствие 1.

Следствие 1. Пусть G – конечная группа и $H \subseteq G$ – подгруппа. Тогда $|H|$ делит $|G|$.

4.2 Следствие 2.

Следствие 2. Пусть G – конечная группа и $g \in G$. Тогда $\text{ord}(g)$ делит $|G|$.

Доказательство. Это вытекает из следствия 1 и утверждения 2. □

4.3 Следствие 3.

Следствие 3. Пусть G – конечная группа и $g \in G$. Тогда $g^{|G|} = e$.

Доказательство. Согласно следствию 2 мы имеем $|G| = \text{ord}(g) \cdot s$, откуда $g^{|G|} = (g^{\text{ord}(g)})^s = e^s = e$. □

4.4 Следствие 4.

Следствие 4. Пусть G – группа. Предположим, что $|G|$ – простое число. Тогда G – циклическая группа, порождаемая любым своим неединичным элементом.

Доказательство. Пусть $g \in G$ – произвольный неединичный элемент. Тогда циклическая подгруппа $\langle g \rangle$ содержит более одного элемента и $|\langle g \rangle|$ делит $|G|$ по следствию 1. Значит, $|\langle g \rangle| = |G|$, откуда $G = \langle g \rangle$. □

4.5 Следствие 5.

Следствие 5 (малая теорема Ферма). Пусть p – простое число и $\text{НОД}(a, p) = 1$. Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Доказательство. Применим следствие 3 к группе $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$. □

5 Нормальные подгруппы и факторгруппы.

5.1 Нормальные подгруппы.

Определение 13. Подгруппа H группы G называется **нормальной**, если $gH = Hg$ для любого $g \in G$.

5.1.1 Эквивалентность условий нормальности группы.

Утверждение 3. Для подгруппы $H \subseteq G$ следующие условия эквивалентны:

1. H нормальна
2. $gHg^{-1} \subseteq H$ для любого $g \in G$
3. $gHg^{-1} = H$ для любого $g \in G$

Доказательство. (1) \Rightarrow (2) Пусть $h \in H$ и $g \in G$. Поскольку $gH = Hg$, имеем $gh = h'g$ для некоторого $h' \in H$. Тогда $ghg^{-1} = h'gg^{-1} = h' \in H$.

(2) \Rightarrow (3) Так как $gHg^{-1} \subseteq H$, остается проверить обратное включение. Для $h \in H$ имеем $h = gg^{-1}hgg^{-1} = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$, поскольку $g^{-1}hg \in H$ в силу пункта (2), где вместо g взято g^{-1} .

(3) \Rightarrow (1) Для произвольного $g \in G$ в силу (3) имеем $gH = gHg^{-1}g \subseteq Hg$, так что $gH \subseteq Hg$. Аналогично проверяется обратное включение. □

5.2 Факторгруппы.

5.2.1 Корректность.

Обозначим через G/H множество смежных классов группы G по нормальной подгруппе H . На G/H можно определить бинарную операцию следующим образом:

$$(g_1H)(g_2H) := g_1g_2H.$$

Утверждение 4. Указанная выше операция корректна.

Доказательство. Заменим g_1 и g_2 другими представителями g_1h_1 и g_2h_2 тех же смежных классов. Нужно проверить, что $g_1g_2H = g_1h_1g_2h_2H$. Это следует из того, что $g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2(g_2^{-1}h_1g_2)h_2$ и $g_2^{-1}h_1g_2$ лежит в H . Ясно, что указанная операция на множестве G/H ассоциативна, обладает нейтральным элементом eH и для каждого элемента gH есть обратный элемент $g^{-1}H$. □

Определение 14. Множество G/H с указанной операцией называется **факторгруппой** группы G по нормальной подгруппе H .

5.2.2 Примеры факторгрупп.

1. Если $G = (\mathbb{Z}, +)$ и $H = n\mathbb{Z}$, то G/H – это в точности группа вычетов $(\mathbb{Z}_n, +)$.

6 Гомоморфизмы групп. Простейшие свойства гомоморфизмов. Изоморфизмы групп. Ядро и образ гомоморфизма групп, их свойства.

6.1 Гомоморфизмы групп.

Определение 15. Пусть G и F – группы. Отображение $\varphi : G \rightarrow F$ называется **гомоморфизмом**, если $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любых $a, b \in G$.

6.2 Простейшие свойства гомоморфизмов.

Лемма 3. Пусть $\varphi : G \rightarrow F$ – гомоморфизм групп и пусть e_G и e_F – нейтральные элементы групп G и F соответственно. Тогда

$$(a) \quad \varphi(e_G) = e_F$$

$$(б) \quad \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \text{ для любого } a \in G.$$

Доказательство. (а) Имеем $\varphi(e_G) = \varphi(e_G e_G) = \varphi(e_G)\varphi(e_G)$. Теперь умножая крайние части этого равенства на $\varphi(e_G)^{-1}$ (например, слева) получим $e_F = \varphi(e_G)$.

(б) Имеем $\varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(e_G) = e_F$, откуда $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$. \square

6.3 Изоморфизмы групп.

Определение 16. Гомоморфизм групп $\varphi : G \rightarrow F$ называется **изоморфизмом**, если отображение φ биективно.

6.4 Ядро и образ гомоморфизма групп, их свойства.

Определение 17. С каждым гомоморфизмом групп $\varphi : G \rightarrow F$ связаны его ядро

$$\text{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_F\}$$

и образ

$$\text{Im}(\varphi) = \{a \in F \mid \exists g \in G : \varphi(g) = a\}.$$

Ясно, что $\text{Ker}(\varphi) \subseteq G$ и $\text{Im}(\varphi) \subseteq F$ – подгруппы.

Лемма 4. Гомоморфизм групп $\varphi : G \rightarrow F$ инъективен тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$.

Доказательство. Ясно, что если φ инъективен, то $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$. Обратно, пусть $g_1, g_2 \in G$ и $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Тогда $g_1^{-1}g_2 \in \text{Ker}(\varphi)$, поскольку $\varphi(g_1^{-1}g_2) = \varphi(g_1^{-1})\varphi(g_2) = \varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2) = e_F$. Отсюда $g_1^{-1}g_2 = e_G$ и $g_1 = g_2$. \square

Следствие 6. Гомоморфизм групп $\varphi : G \rightarrow F$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$ и $\text{Im}(\varphi) = F$.

Утверждение 5. Пусть $\varphi : G \rightarrow F$ – гомоморфизм групп. Тогда подгруппа $\text{Ker}(\varphi)$ нормальна в G .

Доказательство. Достаточно проверить, что $g^{-1}hg \in \text{Ker}(\varphi)$ для любых $g \in G$ и $h \in \text{Ker}(\varphi)$. Это следует из цепочки равенств

$$\varphi(g^{-1}hg) = \varphi(g^{-1})\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(g^{-1})e_F\varphi(g) = \varphi(g^{-1})\varphi(g) = e_F.$$

\square

7 Теорема о гомоморфизме для групп.

Теорема 2. Пусть $\varphi: G \rightarrow F$ – гомоморфизм групп. Тогда группа $\text{Im}(\varphi)$ изоморфна факторгруппе $G/\text{Ker}(\varphi)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\psi: G/\text{Ker}(\varphi) \rightarrow F$, заданное формулой $\psi(g \text{Ker}(\varphi)) = \varphi(g)$. Проверка корректности: равенство $\varphi(gh_1) = \varphi(gh_2)$ для любых $h_1, h_2 \in \text{Ker}(\varphi)$ следует из цепочки равенств

$$\varphi(gh_1) = \varphi(g)\varphi(h_1) = \varphi(g) = \varphi(g)\varphi(h_2) = \varphi(gh_2).$$

Отображение ψ

□