Летний коллоквиум по математическому анализу

hse-ami-open-exams

Содержание

1 Билет 1.

1.1 Пространство кусочно непрерывных функций на отрезке как пример евклидова пространства.

Определение 1. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется* ***кусочно непрерывной*** *на отрезке, если она непрерывна во всех точках этого отрезка, за исключением конечного числа точек, где она имеет разрывы 1-го рода.*

Определение 2. *Множество $V = \hat{C}([a,b])$ называется пространством кусочно непрерыных функций на $[a,b]$, если $\forall f \in V : f$ является кусочно непрерывной функцией и для операции скалярного произведения $(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ выполняются следующие свойства:*

1. $(f,g) = (g,f)$.
2. $(f,f) \geqslant 0$ *и* $(f,f) \Rightarrow f(x) = 0$ *на* $[a,b]$, *исключая, быть может, конечное число точек* x.
3. $(\alpha f + \beta g, \psi) = \alpha(f,\psi) + \beta(g,\psi)$, *где* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.2 Неравенство Коши-Буняковского в этом пространстве (б.д.).

$$(f,g)^2 \leqslant (x,x) \cdot (y,y)$$

1.3 Ортогональные и ортонормированные системы в евклидовом пространстве.

Определение 3. *Множество $x_i \subset L$ называется ортогональной системой, если элементы этого множества попарно ортогональны, то есть $\forall i,j\ (x_i, x_j) = 0$.*

Определение 4. *Ортогональная система $x_i \subset L$ называется ортонормированной системой, если норма каждого элемента равна 1, то есть $\forall i\ (x_i, x_i) = 1$.*

1.4 Главный пример: тригонометрическая система функций в $\hat{C}([-\pi,\pi])$.

Определение 5. *Множество $L = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\} \subset \hat{C}([-\pi,\pi])$ называется основной тригонометрической системой функций.*

Утверждение 1. *L – ортогональная система.*

Доказательство. Пусть k, l – произвольные натуральные числа. Тогда

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} sinkx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos lx dx &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin(x(k-l)) + \sin(x(k+l)))dx &= 0\\
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} sinkx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin lx dx &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(x(k-l)) - \cos(x(k+l)))dx &= 0\\
\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} coskx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos lx dx &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos(x(k-l)) + \cos(x(k+l)))dx &= 0\\
& \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx &= 0\\
& \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx &= 0
\end{aligned}$$

□

Утверждение 2. *L – ортогональная система.*

Доказательство. Пусть k, l – произвольные натуральные числа. Найдем норму каждого элемента множества:

$$\begin{aligned}
(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}) &= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx &= 1\\
(\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx) &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx &= 1\\
(\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx) &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx &= 1
\end{aligned}$$

□