Зимний коллоквиум по курсу «Теории вероятностей и математическая статистика»

hse-ami-open-exams

Содержание

1 Вероятностное пространство. Сигма алгебра событий. Борелевская сигма алгебра. Вероятностная мера. Непрерывность вероятностной меры.

1.1 Вероятностное пространство.

Определение 1. *Класс множеств, который содержит $\varnothing$ и Ω, замкнутый относительно операций $\cap$ и $\cup$, содержит вместе с каждым множеством его дополнение и называется **алгеброй множеств** или **алгеброй событий**.*

1.2 Сигма алгебра событий.

Определение 2. *Если алгебра событий замкнута относительно счетных объединений и пересечений, то ее называют σ-алгеброй.*

1.3 Борелевская сигма алгебра.

Определение 3.

- *Борелевская σ-алгебра – минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства.*
- *Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – σ-алгебра, порожденная отрезками, интервалами или полуинтервалами.*

1.4 Вероятностная мера.

Пусть A – σ-алгебра.

Определение 4. *Функция $P : A \to [0, 1]$ называется **вероятностной мерой**, если*

- $P(\Omega) = 1$
- *Для любого набора попарно непересекащихся событий $\{A_n\} \in A$ выполняется $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$.*

1.5 Непрерывность вероятностной меры.

Теорема 1. *Пусть (Ω, A, P) – вероятностное пространство. Тогда*

1. *Если $\{A_n\} \in A, A_n \subset A_{n+1}$ и $A = \bigcup_n A_n$, то $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.*
2. *Если $\{A_n\} \in A, A_{n+1} \subset A_n$ и $A = \bigcap_n A_n$, то $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.*

Доказательство.

1. Пусть $C_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n, C_1 = A_1$. Тогда $A = \bigcup_n C_n$ и $A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^n C_k$. По свостbásicas аддитивности вероятностной меры P получаем:

$$P(A) = \sum_n P(C_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n P(C_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_{n+1}).$$

2. Пусть $A'_n = \Omega \setminus A_n$. Тогда по закону де Моргана получаем первый пункт.

□

2 Случайная величина и ее распределение. Функция распределения случайной величины. Совместное распределение двух случайных величин. Свойства функции распределения.

2.1 Случайная величина и ее распределение.

Пусть (Ω, A, P) – вероятностное пространство.

Определение 5. *Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если для любого промежутка I выполнено:*

$$\xi^{-1}(I) = \{w \mid \xi(w) \in I\} \in A.$$

Определение 6. *Распределением случайной величины ξ называется вероятностная мера μ_ξ на $B = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, определяемая равенством*

$$\mu_\xi(B) = P(\{w \mid \xi(w) \in B\}) = P(\xi^{-1}(B)).$$

2.2 Функция распределения случайной величины.

Определение 7. *Функцией распределения F_ξ вероятностной меры μ_ξ называется функцией распределения случайной величины ξ, то есть*

$$F_\xi(t) = \mu_\xi((-\infty, t]) = P(\{w \mid \xi(w) \leqslant t\}),$$

мера μ_ξ показывает с какой вероятностью ξ принимает те или иные значения.

2.3 Совместное распределение двух случайных величин.

Пусть ξ и η – случайные велечины.

Определение 8. *Отображение $w \mapsto (\xi(w), \eta(w))$ определяет вероятностную меру $\mu(B) = P(\{w|(\xi(w), \eta(w)) \in B\})$ – совместное распределение случайных величин ξ и η:*

$$F(x, y) = \mu((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = P(\{w \mid \xi(w) \leqslant x \wedge \eta(w) \leqslant y\}).$$

2.4 Свойства функции распределения.

Теорема 2. *Если F – функция распределения, то*

1. $0 \leqslant F \leqslant 1$
2. *F неубывает*
3. *F непрерывна справа, т.е.* $\lim_{t \to s+} F(t) = F(s)$
4. $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$ *и* $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$

Доказательство.

1. Очевидно, т.к. $0 \leqslant P \leqslant 1$
2. $b > a \Rightarrow F(b) - F(a) = P(a \leqslant \xi \leqslant b)$
3. Найдем $\lim_{t \to s+} F(t)$. Пусть $A_n = \left(-\infty, s + \frac{1}{n}\right], A_{n+1} \subset A_n, \bigcap_n A_n = (-\infty, s]$. Из непрерывности меры μ следует, что
$$\mu(A_n) \to \mu\left(\bigcap_n A_n\right) \Rightarrow F\left(s + \frac{1}{n}\right) \to F(s).$$
4. Доказывается аналогично 3 свойству.

□

3 Независимые случайные величины. Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей. Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

3.1 Независимые случайные величины.

Определение 9. *Случайные величины ξ и η называются независимыми, если для всяких промежутков U и V выполняется равенство*

$$P(\{w \mid \xi(w) \in U \wedge \eta(w) \in V\}) = P(\{w \mid \xi(w) \in U\}) \cdot P(\{w \mid \eta(w) \in V\}), \text{ то есть } \mu_\xi(U) = \mu_\eta(V).$$

3.2 Характеризация независимости в терминах функций распределения и плотностей.

Теорема 3. *Случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда $F(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$.*

Доказательство. Совместное распределение оддноззначно определяется функцией распределения F. Если F совпадает с функцией распределения меры $\mu_\xi \times \mu_\eta$, то меры совпадают. □

Теорема 4. *Пусть распределения ξ и η заданы плотностями. Тогда независимость ξ и η равносильна тому, что совместное распределение задано плотностью*

$$\rho(x, y) = \rho_\xi(x) \cdot \rho_\eta(y).$$

Доказательство. По теореме Фубини:

$$\int\limits_a^b \rho_\xi(x)dx \cdot \int\limits_c^d \rho_\eta(x)dy = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \rho_\xi(x)\rho_\eta(y)dxdy = \mu([a, b] \times [c, d]).$$

□

3.3 Плотность распределения суммы двух независимых случайных величин.

Теорема 5. *Пусть ξ и η независимы и их распределение задано плотностями. Тогда распределение суммы $\nu = \xi + \eta$ задано плотностью*

$$\rho_\nu(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(t)\rho_\eta(x - t)dt.$$

Доказательство.

$$F_\nu(t) = P(\{w \mid \xi(w) + \eta(w) \leqslant t\}) = \iint\limits_{x+y\leqslant t} \rho_\xi(x)\rho_\eta(y)dxdy$$

Пусть $u = x + y, v = x$. Тогда, применив теорему Фубини, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(t)\rho_\eta(x - t)dt \right) du$$

□

4 Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства: линейность, монотонность, неравенство Чебышева. Математическое ожидание произведения независимых величин.

4.1 Математическое ожидание дискретной случайной величины и его свойства.

Пусть ξ – случайная дискретная величина на (Ω, A, P), принимающая значения $\{x_1, ..., x_n\}$. Положим $A_i = \xi^{-1}(\{x_i\})$. Тогда

$$\xi = x_1 \mathbb{I}_{A_1} + ... + x_n \mathbb{I}_{A_n}.$$

Определение 10. *Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число*

$$E\xi = x_1 P(A_1) + ... + x_n P(A_n).$$

Теорема 6.

1. *$E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta$*
2. *Если $\xi \geqslant \eta$ почти наверняка, то $E\xi \geqslant E\eta$.*
3. *Если $\xi \geqslant 0$, то для любого $C > 0$ верно $P(\xi \geqslant C) \leqslant \frac{E\xi}{C}$*

Доказательство.

1. Следует из определения математического ожидания дискретной случайной величины и разложения случайной величины в сумму произведений значений и индикаторов.
2. $0 \leqslant E(\eta - \xi) = E\eta - E\xi \Rightarrow E\eta \geqslant E\xi$
3. Пусть $A = \{w \mid \xi \geqslant C\}$. Тогда

   $$\xi \geqslant C \cdot \mathbb{I}_A.$$

   Неравенство выполняется для любых значений $\mathbb{I}_A$. Применив свойства монотонности и линейности получим:

   $$E\xi \geqslant CE\mathbb{I}_A = CP(A) \Rightarrow \frac{E\xi}{C} \geqslant P(A).$$

□

4.2 Математическое ожидание произведения независимых величин.

Теорема 7. *Если случайные величины ξ и η независимы, то $E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$.*

Доказательство. Разложим ξ и η в сумму произведений значений и индикаторов:

$$\xi = \sum_i a_i \mathbb{I}_{A_i}, \eta = \sum_j b_j \mathbb{I}_{B_j} \Rightarrow \xi \cdot \eta = \sum_{i,j} a_i b_j \mathbb{I}_{A_i \cap B_j} \Rightarrow E(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j} a_i b_j P(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} a_i b_j P(A_i) P(B_j) = E\xi \cdot E\eta$$

□

5 Общее определение математического ожидания и его корректность. Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.

5.1 Общее определение математического ожидания и его корректность.

5.2 Математическое ожидание случайной величины, распределение которое задано плотностью.

6 Дисперсия и ее свойства. Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, геометрический смысл.

6.1 Дисперсия и ее свойства.

6.2 Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, геометрический смысл.

7 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.

7.1 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей нормальное, показательное или равномерное распределение.

8 Закон больших чисел в слабой форме. Метод Монте-Карло.

8.1 Закон больших чисел в слабой форме.

8.2 Метод Монте-Карло.