

Летний коллоквиум по математическому анализу

hse-ami-open-exams

Содержание

1	Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.	3
1.1	Понятие числового ряда, его частичной суммы.	3
1.2	Сходимость и расходимость числовых рядов.	3
1.3	Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.	3
1.4	Необходимый признак сходимости числового ряда.	3
2	Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.	4
2.1	Критерий Коши сходимости числового ряда.	4
2.2	Доказать расходимость гармонического ряда.	4
3	Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.	5
3.1	Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы.	5
3.2	Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.	5
4	Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений α и β.	6
4.1	Интегральный признак сходимости числового ряда.	6
4.2	Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений α и β . (TODO)	6
5	Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.	7
5.1	Примеры.	7
6	Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.	8
6.1	Примеры.	8
7	Абсолютно сходящиеся ряды. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.	9
8	Определение перестановки членов ряда. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.	10
8.1	Определение перестановки членов ряда.	10
8.2	Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.	10
9	Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.	12
9.1	Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства).	12
9.2	Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.	12
10	Условно сходящийся числовой ряд. Признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда вместе с оценкой на его остаток.	13
11	Преобразование Абеля. Объясните, почему это преобразование является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям.	14
12	Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.	15

13 Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда, идея доказательства.	16
14 Дайте определение поточечной и равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.	17
14.1 Дайте определение поточечной и равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.	17
14.2 Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.	17

1 Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.

1.1 Понятие числового ряда, его частичной суммы.

Определение 1. Числовая последовательность a_k , рассматриваемая вместе с последовательностью

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

ее частичных сумм, называется **числовым рядом**.

1.2 Сходимость и расходимость числовых рядов.

Определение 2. Числовой ряд называется **сходящимся**, если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \infty$$

и **расходящимся** иначе. Число S называется **суммой ряда**.

1.3 Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится (гармонический ряд)
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ – сходится
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ – расходится

1.4 Необходимый признак сходимости числового ряда.

Теорема 1. Необходимым условием сходимости числового ряда является стремление к 0 его n -го члена a_n .

Доказательство. Действительно, в противном случае не выполняется критерий Коши для числовой последовательности S_n . \square

2 Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.

2.1 Критерий Коши сходимости числового ряда.

Теорема 2. Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности S_n . □

2.2 Доказать расходимость гармонического ряда.

Теорема 3. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N \exists p \in \mathbb{N} |S_{n+p} - S_n| \geq \varepsilon$$

Пусть $p = n$. Тогда

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

□

3 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

3.1 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы.

Теорема 4. Ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена.

Доказательство. Необходимость следует из того, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной. Поскольку $p_n \geq 0$, то $\{S_n\}$ монотонно возрастает, а тогда по теореме Вейерштрасса эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является ограниченной сверху. Тем самым доказана достаточность. \square

3.2 Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

Теорема 5 (первый признак сравнения). Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq p_n \leq q_n$, то

1. Из сходимости $\sum q_n$ следует сходимость $\sum p_n$
2. Из расходимости $\sum p_n$ следует расходимость $\sum q_n$

Доказательство.

1. Напрямую следует из теоремы 4.
2. Предположим, что $\sum p_n$ расходится, а $\sum q_n$ сходится. Тогда получаем противоречие с пунктом 1.

\square

Теорема 6 (предельный признак сравнения). Если $p_n > 0, q_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} = l \in (0, +\infty)$, то ряды $\sum p_n$ и $\sum q_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. По определению предела

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{p_n}{q_n} - l \right| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < \frac{p_n}{q_n} < l + \varepsilon \Leftrightarrow q_n(l - \varepsilon) < p_n < q_n(l + \varepsilon).$$

Осталось лишь воспользоваться теоремой 5.

\square

4 Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений α и β .

4.1 Интегральный признак сходимости числового ряда.

Теорема 7. Пусть при любом $k \in [1, +\infty)$ выполняется $f(k) \geq 0$, причем $f(k) \searrow 0$. Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ эквивалентна сходимости несобственного интеграла $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Доказательство. При $x \in [k, k+1]$, в силу $f(x) \searrow$, имеем $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. Возьмем определенный интеграл от всех частей неравенства:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(k+1) dx &\leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx \\ f(k+1) &\leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \end{aligned}$$

Просуммируем теперь это неравенство по всем k от 1 до n . Получаем

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

Теперь, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$ сходится, то из правой части неравенства следует, что сходится интеграл. Если же сходится интеграл, то из левой части неравенства вытекает, что сходится ряд. Аналогично с расходимостью. \square

4.2 Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений α и β . (TODO)

5 Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.

Теорема 8 (признак Даламбера в допредельной форме). Если $\forall k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \right),$$

то ряд $\sum p_k$ сходится (расходится).

Доказательство. Положим $p'_k = q^k$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{p'_{k+1}}{p'_k} &= q < 1 \left(\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = 1 \right) \\ \frac{p_{k+1}}{p_k} &\leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \right) \end{aligned}$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится (расходится) и, пользуясь первым признаком сравнения (теорема 5), делаем вывод, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). \square

Теорема 9 (признак Даламбера в предельной форме). Пусть существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

Тогда при $L < 1$ ряд $\sum p_k$ сходится, при $L > 1$ расходится, а при $L = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Как мы знаем,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geq N$ выполняется

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon$$

Теперь если $L > 1$, то мы можем выбрать такое ε , что $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Но тогда

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon < 1$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ сходится. Пусть теперь $L > 1$. Выберем такое ε , что $L - \varepsilon = 1$. Получаем

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ расходится.

Наконец, рассмотрим ряды $\sum \frac{1}{k}$ и $\sum \frac{1}{k^2}$. В обоих случаях $L = 1$, но ряд $\sum \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum \frac{1}{k^2}$ сходится. \square

5.1 Примеры.

1. $\sum \frac{1}{n!}$ – сходится
2. $\sum n!$ – расходится

6 Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.

Теорема 10 (признак Коши в допредельной форме). Если $\forall k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \ (\sqrt[k]{p_k} \geq 1),$$

то ряд $\sum p_k$ сходится (расходится).

Доказательство. Положим $p'_k = q^k$. Тогда

$$\sqrt[k]{p'_k} = q < 1 \left(\sqrt[k]{p'_k} = 1 \right)$$

$$\sqrt[k]{p_k} \leq \sqrt[k]{p'_k} \left(\sqrt[k]{p_k} \geq \sqrt[k]{p'_k} \right)$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится (расходится) и, пользуясь первым признаком сравнения (теорема 5), делаем вывод, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). \square

Теорема 11 (признак Коши в предельной форме). Пусть существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Тогда при $L < 1$ ряд $\sum p_k$ сходится, при $L > 1$ расходится, а при $L = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Как мы знаем,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geq N$ выполняется

$$L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$$

Теперь если $L > 1$, то мы можем выбрать такое ε , что $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Но тогда

$$\sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon < 1$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ сходится.

Пусть теперь $L > 1$. Выберем такое ε , что $L - \varepsilon = 1$. Получаем

$$\sqrt[k]{p_k} > L - \varepsilon = 1$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ расходится.

Наконец, рассмотрим ряды $\sum \frac{1}{k}$ и $\sum \frac{1}{k^2}$. В обоих случаях $L = 1$, но ряд $\sum \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum \frac{1}{k^2}$ сходится. \square

6.1 Примеры.

1. $\sum \frac{n^n}{e^n}$ – расходится
2. $\sum \frac{n^2}{e^n}$ – сходится

7 Абсолютно сходящиеся ряды. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение 3. Будем говорить, что ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно, если $\sum |u_k|$ сходится.

Теорема 12. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство. По критерию Коши имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall p \in N \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Осталось лишь воспользоваться неравенством

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

□

8 Определение перестановки членов ряда. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

8.1 Определение перестановки членов ряда.

Определение 4. Говорят, что два ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ получаются друг из друга перестановкой членов, если существует такое взаимно-однозначное отображение φ множества \mathbb{N} натуральных чисел на себя, что $b_n = a_{\varphi(n)}$.

8.2 Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

Теорема 13. Если числовой ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно, то любая его перестановка членов сходится к той же самой сумме.

Доказательство. Пусть $\sum u_k$ абсолютно сходится к S , а $\sum u'_k$ — некоторая перестановка членов исходного ряда. Требуется доказать, что $\sum u'_k = S$ и $\sum u'_k$ сходится абсолютно. Докажем сначала первое утверждение. Для этого достаточно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N \left| \sum_{k=1}^n u'_k - S \right| < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное ε . Поскольку ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно, то по признаку Коши

$$\exists N'_0 \forall p \in \mathbb{N} \sum_{k=N'_0+1}^{N'_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а по определению сходимости ряда

$$\exists N''_0 \left| \sum_{k=1}^{N''_0} u_k - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Напоминаем, что данные неравенства по определениям выполняются и для $n \geq N'_0, N''_0$. Примем $N_0 = \max\{N'_0, N''_0\}$, чтобы для этого номера выполнялись оба неравенства. Теперь возьмем такое N , чтобы любая частичная сумма S'_n ряда $\sum u'_k$ при $n \geq N$ содержала все первые N_0 членов ряда $\sum u_k$. Заметим, что такое N всегда можно выбрать, поскольку мы просто переставили некоторые члены исходного ряда. Оценим теперь разность

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - S \right| < \varepsilon.$$

Пусть $n \geq N$. Указанную разность можно переписать в виде

$$\sum u'_k - S = \left(\sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right).$$

Переходя к модулям, получаем

$$\left| \sum u'_k - S \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right|.$$

Если воспользоваться неравенством $\left| \sum_{k=1}^{N''_0} u_k - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, то достаточно доказать, что

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вспомним теперь, что мы таким образом выбрали N , что при $n \geq N$ первая из сумм содержит все N_0 членов второй суммы. Поэтому указанная выше разность представляет собой сумму $n - N_0$ членов ряда $\sum u_k$ с номерами, каждый из которых превосходит N_0 .

Тогда выберем такое p , чтобы номер $N_0 + p$ превосходил номера всех $n - N_0$ членов только что указанной суммы. Тогда справедливо

$$\left| \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|$$

Но теперь, пользуясь неравенством

$$\left| \sum_{k=1}^{N_0''} u_k - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

получаем то, что и требовалось доказать. Таким образом, мы доказали, что ряд $\sum u'_k$ сходится к S . Осталось лишь доказать, что он сходится абсолютно. Для этого достаточно применить приведенное выше доказательство для рядов $\sum |u_k|$ и $\sum |u'_k|$.

□

9 Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

9.1 Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства).

Теорема 14. Если числовой ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно, то любая его перестановка членов сходится к той же самой сумме.

9.2 Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 15. Если $\sum u_k$ и $\sum v_k$ сходятся абсолютно к u и v соответственно, то ряд $\sum w_k$, составленный из всевозможных произведений $u_i \cdot v_j$ сходится абсолютно к $u \cdot v$.

Доказательство. Докажем сначала, что ряд $\sum w_k$ сходится абсолютно. Возьмем произвольное n_0 и рассмотрим $\sum_{k=1}^{n_0} |w_k|$. Эта сумма состоит из членов вида $|u_i v_j|$. Найдем среди этих индексов i и j наибольший индекс m , входящий в исследуемую сумму. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n_0} |w_k| \leq (|u_1| + \dots + |u_m|) \cdot (|v_1| + \dots + |v_m|) \leq M_1 M_2$$
$$\left. \begin{array}{l} (|u_1| + \dots + |u_m|) \leq M_1 \\ (|v_1| + \dots + |v_m|) \leq M_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n_0} |w_k| \leq M_1 M_2$$

Ограничения M_1 и M_2 следуют из абсолютной сходимости рядов $\sum u_k$ и $\sum v_k$. Мы ограничились n_0 -ую частичную сумму исследуемого ряда $\sum |w_k|$, значит этот ряд сходится. Осталось лишь доказать, что он сходится к uv .

Пусть данный ряд сходится к S . Заметим, что в силу теоремы 9.1 мы можем как угодно переставлять члены ряда w_i , не влияя на сходимость. Иными словами, любая последовательность или подпоследовательность частичных сумм будет сходиться к S . Тогда рассмотрим последовательность частичных сумм $\{S_{m^2}\}$, где $S_{m^2} = (u_1 + \dots + u_m) \cdot (v_1 + \dots + v_m)$. Но

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow \infty} (u_1 + \dots + u_m) = u \\ \lim_{m \rightarrow \infty} (v_1 + \dots + v_m) = v \end{array} \right\} \Rightarrow S_{m^2} \rightarrow uv$$

□

10 Условно сходящийся числовой ряд. Признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда вместе с оценкой на его остаток.

Определение 5. Будем говорить, что числовой ряд $\sum u_k$ сходится **условно**, если ряд $\sum u_k$ сходится, а ряд $\sum |u_k|$ расходится.

Теорема 16. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $a_k \geq a_{k+1}$, причем $a_k \rightarrow 0$. Тогда числовой ряд (называемый рядом Лейбница) $\sum (-1)^{k+1} a_k$ сходится, причем

$$|r_k| = \left| \sum_{l=k+1}^{\infty} (-1)^{l+1} a_l \right| \leq a_{k+1}$$

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда Лейбница S_{2n} :

$$0 \leq S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

Из этого можно сделать вывод, что последовательность $\{S_{2n}\}$ – ограниченная и монотонно неубывающая. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$. С другой стороны, видно, что $S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n}$. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = S + 0 = S$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Итак, мы доказали, что ряд сходится. Теперь докажем вторую часть теоремы. Для этого заметим, что поскольку $\{S_{2n}\}$ не убывает, а $\{S_{2n-1}\}$ не возрастает (т.к. $S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1})$), то $S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}$, а также $S \leq S_{2n+1}$. По определению остаточного члена $r_{2n} = S - S_{2n}$. Пользуясь этими замечаниями, можно записать

$$r_{2n} = S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1},$$

$$S_{2n-1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \Rightarrow |r_{2n-1}| \leq a_{2n}.$$

Но тогда $|r_n| \leq a_{n+1}$, что и требовалось доказать. □

11 Преобразование Абеля. Объясните, почему это преобразование является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям.

Пусть $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ и $B_0 = 0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

Преобразование Абеля является дискретным аналогом интегрирования по частям. Для наглядности рассмотрим следующую таблицу:

f	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
f'	$\{a_n - a_{n-1}\}_{n=2}^{\infty}$
$\int_a^b f(x) dx$	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
$\left(\int_a^x f(x) dx \right)'_x = f(x)$	$\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$
$f, g, G = \int_a^x g(t) dt + C$	$\{a_k\}, \{b_k\}, \{B_k = \sum_{j=1}^k b_j + B_0\}$
$\int_a^b f g dx = \int_a^b f dG = f \cdot G _a^b - \int_a^b G f' dx$	$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k$

12 Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.

Теорема 17 (Признак Дирихле). Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонна, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, а последовательность $\{B_n\}$ ограничена (например, числом $M > 0$). Тогда $\sum a_k b_k$ сходится.

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

Из условия теоремы следует, что $a_n B_n \rightarrow 0$. Из ограниченности $\{B_n\}$ и монотонности $\{a_n\}$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k (a_{k+1} - a_k)| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| = M \left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) \right| = M \cdot |a_1| \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} B_k (a_{k+1} - a_k) \text{ сходится абсолютно.}$$

А это означает, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k)$. Но тогда данный ряд сходится. \square

Теорема 18 (Признак Абеля). Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонная и ограничена, а $\sum b_k$ сходится. Тогда $\sum a_k b_k$ сходится.

Доказательство. Заметим, что раз $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Тогда $a_n = a + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая, причем в силу монотонности $\{a_n\}$ последовательность $\{\alpha_n\}$ также является монотонной. Тогда

$$\sum a_k b_k = \sum a b_k + \sum \alpha_k b_k.$$

Здесь первый ряд сходится, т.к. сходится ряд $\sum b_k$, а второй ряд сходится по признаку Дирихле ($\{B_k\}$ ограничена, т.к. соответствующий ряд сходится). Значит, $\sum a_k b_k$ сходится. \square

13 Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда, идея доказательства.

Лемма 1. Если $\sum a_k$ сходится условно, то $\sum a^+$ и $\sum a^-$ расходятся.

Доказательство. Пусть $a_k = a_k^+ + a_k^-$. Допустим, что один из $\sum a^+$ или $\sum a^-$ сходится. Тогда сходится и второй (т.к. сходится сумма). Тогда

$$\sum |a_k| = \sum a^+ - \sum a^-$$

тоже сходится. Противоречие с условной сходимостью. \square

Теорема 19. Какого бы ни было число $L \in \mathbb{R}$, члены условно сходящегося ряда $\sum u_n$ можно переставить так, чтобы его сумма стала равной L .

Доказательство. Пусть для определенности $L > 0$. Приведем следующий алгоритм:

1. Будем добавлять неиспользованные положительные члены ряда до тех пор пока сумма не станет больше L . Это всегда возможно по лемме 1.
2. Будем добавлять неиспользованные отрицательные члены ряда до тех пор пока сумма не станет меньше L . Это всегда возможно по лемме 1.
3. Вернемся к первому шагу.

Таким образом, полученный ряд сходится к L . \square

14 Дайте определение поточечной и равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.

14.1 Дайте определение поточечной и равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Определение 6. Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится поточечно* на \mathbb{E} , если $\forall x_0 \in \mathbb{E}$ сходится уже числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$.

Определение 7. Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится на \mathbb{E} равномерно* к функции f , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall x \in \mathbb{E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Для равномерной сходимости принято использовать обозначение $\{f_n(x)\} \Rightarrow f(x)$.

Определение 8. Будем говорить, что функциональный ряд $\{\sum f_n(x)\}$ *сходится поточечно* на \mathbb{E} , если $\forall x_0 \in \mathbb{E}$ сходится уже числовой ряд $\{\sum f_n(x_0)\}$.

Определение 9. Будем говорить, что функциональный ряд $\{\sum f_n(x)\}$ *сходится на \mathbb{E} равномерно* к функции $S(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N \forall x \in \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon.$$

Для равномерной сходимости принято использовать обозначение $\sum f_n(x) \Rightarrow S(x)$.

14.2 Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема 20. Если $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на \mathbb{E} , то $u_k(x) \Rightarrow 0$ на \mathbb{E} .

Доказательство. Просто заметим, что $u_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x) \Rightarrow S(x) - S(x) = 0$, где $U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$. \square