Летний коллоквиум по математическому анализу

hse-ami-open-exams

Содержание

1 Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.

1.1 Понятие числового ряда, его частичной суммы.

Определение 1. *Числовая последовательность a_k, рассматриваемая вкупе с последовательностью*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

*ее частичных сумм, называется **числовым рядом**.*

1.2 Сходимость и расходимость числовых рядов.

Определение 2. *Числовой ряд называется **сходящимся**, если*

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$$

*и **расходящимся** иначе. Число S называется **суммой ряда**.*

1.3 Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится (гармонический ряд)
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ – сходится
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ – расходится

1.4 Необходимый признак сходимости числового ряда.

Теорема 1. *Необходимым условием сходимости числового ряда является стремление к 0 его n-го члена a_n.*

Доказательство. Действительно, в противном случае не выполняется критерий Коши для числовой последовательности S_n. □

2 Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.

2.1 Критерий Коши сходимости числового ряда.

Теорема 2. *Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:*

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geqslant N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности S_n. □

2.2 Доказать расходимость гармонического ряда.

Теорема 3. *Гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *расходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши:

$$\exists\varepsilon > 0 \forall N \exists n \geqslant N \exists p \in \mathbb{N} |S_{n+p} - S_n| \geqslant \varepsilon$$

Пусть $p = n$. Тогда

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

□

3 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

3.1 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы.

Теорема 4. *Ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность частиных сумм $\{S_n\}$ ограничена.*

Доказательство. Необходимость следует из того, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной. Поскольку $p_n \geqslant 0$, то $\{S_n\}$ монотонно возрастает, а тогда по теореме Вейерштрасса эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является ограниченной сверху. Тем самым доказана достаточность. □

3.2 Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

Теорема 5 (первый признак сравнения)**.** *Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leqslant p_n \leqslant q_n$, то*

1. *Из сходимости $\sum q_n$ следует сходимость $\sum p_n$*
2. *Из расходимости $\sum p_n$ следует расходимость $\sum q_n$*

Доказательство.

1. Напрямую следует из теоремы 4.
2. Предположим, что $\sum p_n$ расходится, а $\sum q_n$ сходится. Тогда получаем противоречие с пунктом 1.

□

Теорема 6 (предельный признак сравнения)**.** *Если $p_n > 0, q_n > 0$ и $\exists \lim_{n\to\infty} = l \in (0, +\infty)$, то ряды $\sum p_n$ и $\sum q_n$ сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. По определению предела

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{p_n}{q_n} - l\right| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < \frac{p_n}{q_n} < l + \varepsilon \Leftrightarrow q_n(l-\varepsilon) < p_n < q_n(l+\varepsilon).$$

Осталось лишь воспользоваться теоремой 5. □

4 Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \ln^\beta k}$ в зависимости от значений α и β.

4.1 Интегральный признак сходимости числового ряда.

Теорема 7. *Пусть при любом $k \in [1, +\infty)$ выполняется $f(k) \geqslant 0$, причем $f(k) \searrow 0$. Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ эквивалентна сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^\infty f(x)dx$.*

Доказательство. При $x \in [k, k+1]$, в силу $f(x) \searrow$, имеем $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$. Возьмем определенный интеграл от всех частей неравенства:

$$\int\limits_k^{k+1} f(k+1)dx \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(k)dx$$

$$f(k+1) \leqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k)$$

Просуммируем теперь это неравенство по всем k от 1 до n. Получаем

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Теперь, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$ сходится, то из правой части неравенства следует, что сходится интеграл. Если же сходится интеграл, то из левой части неравенства вытекает, что сходится ряд. Аналогично с расходимостью. □

4.2 Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha \ln^\beta k}$ в зависимости от значений α и β. (TODO)

5 Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.

Теорема 8 (признак Даламбера в допредельной форме)**.** *Если* $\forall k \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant q < 1 \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant 1 \right),$$

то ряд $\sum p_k$ *сходится (расходится).*

Доказательство. Положим $p'_k = q^k$. Тогда

$$\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = q < 1 \left(\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = 1 \right)$$

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqslant \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \right)$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится (расходится) и, пользуясь первым признаком сравнения (теорема 5), делаем вывод, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). □

Теорема 9 (признак Даламбера в предельной форме)**.** *Пусть существует*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

Тогда при $L < 1$ *ряд* $\sum p_k$ *сходится, при* $L > 1$ *расходится, а при* $L = 1$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. Как мы знаем,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geqslant N$ выполняется

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon$$

Теперь если $L > 1$, то мы можем выбрать такое ϵ, что $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Но тогда

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon < 1$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ сходится.
Пусть теперь $L > 1$. Выберем такое ε, что $L - \varepsilon = 1$. Получаем

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \epsilon = 1$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ расходится.
Наконец, рассмотрим ряды $\sum \frac{1}{k}$ и $\sum \frac{1}{k^2}$. В обоих случаях $L = 1$, но ряд $\sum \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum \frac{1}{k^2}$ сходится. □

5.1 Примеры.

1. $\sum \frac{1}{n!}$ – сходится
2. $\sum n!$ – расходится

6 Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.

Теорема 10 (признак Коши в допредельной форме). *Если* $\forall k \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$\sqrt[k]{p_k} \leqslant q < 1\,(\,\sqrt[k]{p_k} \geqslant 1)\,,$$

то ряд $\sum p_k$ *сходится (расходится).*

Доказательство. Положим $p'_k = q^k$. Тогда

$$\sqrt[k]{p'_k} = q < 1 \left(\sqrt[k]{p'_k} = 1\right)$$

$$\sqrt[k]{p_k} \leqslant \sqrt[k]{p'_k} \left(\sqrt[k]{p_k} \geqslant \sqrt[k]{p'_k}\right)$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится (расходится) и, пользуясь первым признаком сравнения (теорема 5), делаем вывод, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). □

Теорема 11 (признак Коши в предельной форме). *Пусть существует*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Тогда при $L < 1$ *ряд* $\sum p_k$ *сходится, при* $L > 1$ *расходится, а при* $L = 1$ *может как сходиться, так и расходиться.*

Доказательство. Как мы знаем,

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geqslant N$ выполняется

$$L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$$

Теперь если $L > 1$, то мы можем выбрать такое ϵ, что $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Но тогда

$$\sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon < 1$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ сходится.
Пусть теперь $L > 1$. Выберем такое ε, что $L - \varepsilon = 1$. Получаем

$$\sqrt[k]{p_k} > L - \epsilon = 1$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ расходится.
Наконец, рассмотрим ряды $\sum \frac{1}{k}$ и $\sum \frac{1}{k^2}$. В обоих случаях $L = 1$, но ряд $\sum \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum \frac{1}{k^2}$ сходится. □

6.1 Примеры.

1. $\sum \frac{n^n}{e^n}$ – расходится
2. $\sum \frac{n^2}{e^n}$ – сходится

7 Абсолютно сходящиеся ряды. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение 3. *Будем говорить, что ряд* $\sum u_k$ *сходится абсолютно, если* $\sum |u_k|$ *сходится.*

Теорема 12. *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. По критерию Коши имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geqslant N \forall p \in N \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

Осталось лишь воспользоваться неравенством

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

□

8 Определение перестановки членов ряда. Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

8.1 Определение перестановки членов ряда.

Определение 4. *Говорят, что два ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ получаются друг из друга перестановкой членов, если существует такое взаимо-однозначное отображение φ множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел на себя, что $b_n = a_{\varphi(n)}$.*

8.2 Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

Теорема 13. *Если числовой ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно, то любая его перестановка членов сходится к той же самой сумме.*

Доказательство. Пусть $\sum u_k$ абсолютно сходится к S, а $\sum u'_k$ – некоторая перестановка членов исходного ряда. Требуется доказать, что $\sum u'_k = S$ и $\sum u'_k$ сходится абсолютно. Докажем сначала первое утверждение. Для этого достаточно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geqslant N \left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - S \right| < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольное ε. Поскольку ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно, то по признаку Коши

$$\exists N'_0 \forall p \in \mathbb{N} \sum_{k=N'_0+1}^{N'_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а по определению сходимости ряда

$$\exists N''_0 \left| \sum_{k=1}^{N''_0} u_k - S \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Напоминаем, что данные неравенства по определениям выполняются и для $n \geqslant N'_0, N''_0$. Примем $N_0 = \max\{N'_0, N''_0\}$, чтобы для этого номера выполнялись оба неравенства. Теперь возьмем такое N, чтобы любая частичная сумма S'_n ряда $\sum u'_k$ при $n \geqslant N$ содержала все первые N_0 членов ряда $\sum u_k$. Заметим, что такое N всегда можно выбрать, поскольку мы просто переставили некоторые члены исходного ряда. Оценим теперь разность

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - S \right| < \varepsilon.$$

Пусть $n \geqslant N$. Указанную разность можно перезаписать в виде

$$\sum u'_k - S = \left(\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right).$$

Переходя к модулям, получаем

$$\left| \sum u'_k - S \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right|.$$

Если воспользоваться неравенством $\left| \sum_{k=1}^{N''_0} u_k - S \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, то достаточно доказать, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вспомним теперь, что мы таким образом выбрали N, что при $n \geqslant N$ первая из сумм содержит все N_0 членов второй суммы. Поэтому указанная выше разность представляет собой сумму $n - N_0$ членов ряда $\sum u_k$ с номерами, каждый из которых превосходит N_0.
Тогда выберем такое p, чтобы номер $N_0 + p$ превосходил номера всех $n - N_0$ членов только что указанной суммы. Тогда справедливо

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u'_k - \sum_{k=1}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|$$

Но теперь, пользуясь неравенством

$$\left|\sum_{k=1}^{N''_0} u_k - S\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

получаем то, что и требовалось доказать. Таким образом, мы доказали, что ряд $\sum u'_k$ сходится к S. Осталось лишь доказать, что он сходится абсолютно. Для этого достаточно применить приведенное выше доказательство для рядов $\sum |u_k|$ и $\sum |u'_k|$.

$\square$

9 Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

9.1 Теорема о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (без доказательства).

Теорема 14. *Если числовой ряд $\sum u_k$ сходится абсолютно, то любая его перестановка членов сходится к той же самой сумме.*

9.2 Теорема о произведении двух абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 15. *Если $\sum u_k$ и $\sum v_k$ сходятся абсолютно к u и v соответственно, то ряд $\sum w_k$, составленный из всевозможных произведений $u_i \cdot v_j$ сходится абсолютно к $u \cdot v$.*

Доказательство. Докажем сначала, что ряд $\sum w_k$ сходится абсолютно. Возьмем произвольное n_0 и рассмотрим $\sum_{k=1}^{n_0} |w_k|$. Эта сумма состоит из членов вида $|u_i v_j|$. Найдем среди этих индексов i и j наибольший индекс m, входящий в исследуемую сумму. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n_0} |w_k| \leqslant (|u_1| + ... + |u_m|) \cdot (|v_1| + ... + |v_m|) \leqslant M_1 M_2$$

$$\left.\begin{array}{l} (|u_1| + ... + |u_m|) \leqslant M_1 \\ (|v_1| + ... + |v_m|) \leqslant M_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n_0} |w_k| \leqslant M_1 M_2$$

Ограничения M_1 и M_2 следуют из абсолютной сходимости рядов $\sum u_k$ и $\sum v_k$. Мы ограничили n_0-ую частичную сумму исследуемого ряда $\sum |w_k|$, значит этот ряд сходится. Осталось лишь доказать, что он сходится к uv.

Пусть данный ряд сходится к S. Заметим, что в силу теоремы 9.1 мы можем как угодно переставлять члены ряда w_i, не влияя на сходимость. Иными словами, любая последовательность или подпоследовательность частичный сумм будет сходиться к S. Тогда рассмотрим последовательность частичных сумм $\{S_{m^2}\}$, где $S_{m^2} = (u_1 + ... + u_m) \cdot (v_1 + ... + v_m)$. Но

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{m\to\infty}(u_1 + ... + u_m) = u \\ \lim_{m\to\infty}(v_1 + ... + v_m) = v \end{array}\right\} \Rightarrow S_{m^2} \to uv$$

□

10 Условно сходящийся числовой ряд. Признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда вместе с оценкой на его остаток.

Определение 5. *Будем говорить, что числовой ряд* $\sum u_k$ *сходится* ***условно****, если ряд* $\sum u_k$ *сходится, а ряд* $\sum |u_k|$ *расходится.*

Теорема 16. *Пусть для любого* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется* $a_k \geqslant a_{k+1}$*, причем* $a_k \to 0$*. Тогда числовой ряд (называемый рядом Лейбница)* $\sum (-1)^{k+1} a_k$ *сходится, причем*

$$|r_k| = \left| \sum_{l=k+1}^{\infty} (-1)^{l+1} a_l \right| \leqslant a_{k+1}$$

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда Лейбница S_{2n}:

$$0 \leqslant S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqslant a_1$$

Из этого можно сделать вывод, что последовательность $\{S_{2n}\}$ – ограниченная и монотонно неубывающая. Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$. С другой стороны, видно, что $S_{2n-1} = S_{2n} + a_{2n}$. Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S + 0 = S$, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.
Итак, мы доказали, что ряд сходится. Теперь докажем вторую часть теоремы. Для этого заметим, что поскольку $\{S_{2n}\}$ не убывает, а $\{S_{2n-1}\}$ не возрастает (т.к. $S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1})$), то $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n-1}$, а также $S \leqslant S_{2n+1}$. По определению остаточного члена $r_{2n} = S - S_{2n}$. Пользуясь этими замечаниями, можно записать

$$r_{wn} = S - S_{2n} \leqslant S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1},$$

$$S_{2n-1} - S \leqslant S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n} \Rightarrow |r_{2n-1}| \leqslant a_{2n}.$$

Но тогда $|r_n| \leqslant a_{n+1}$, что и требовалось доказать. □

11 Преобразование Абеля. Объясните, почему это преобразование является дискретным аналогом формулы интегрирования по частям.

Пусть $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ и $B_0 = 0$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k).$$

Преобразование Абеля является дискретным аналогом интегрирования по частям. Для наглядности рассмотрим следующюю таблицу:

f	$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
f'	$\{a_n - a_{n-1}\}_{n=2}^{\infty}$
$\int\limits_a^b f(x)\,dx$	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
$\left(\int\limits_a^x f(x)\,dx\right)'_x = f(x)$	$\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$
$f, g, G = \int\limits_a^x g(t)\,dt + C$	$\{a_k\}, \{b_k\}, \{B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j + B_0\}$
$\int\limits_a^b fg dx = \int\limits_a^b f dG = f \cdot G\|_a^b - \int\limits_a^b G f' dx$	$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) B_k$

12 Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.

Теорема 17 (Признак Дирихле)**.** *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *монотонна, причем* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, а последовательность* $\{B_n\}$ *ограничена (например, числом* $M > 0$*). Тогда* $\sum a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{k+1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

Из условия теоремы следует, что $a_n B_n \to 0$. Из ограниченности $\{B_n\}$ и монотонности $\{a_n\}$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k(a_{k+1}-a_k)| \leqslant M \sum_{k+1}^{\infty} |a_{k+1}-a_k| = M \left| \sum_{k+1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) \right| = M \cdot |a_1| \Rightarrow \sum_{k+1}^{\infty} B_k(a_{k+1}-a_k) \text{ сходится абсолютно.}$$

А это означает, что $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k+1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k)$. Но тогда данный ряд сходится. $\square$

Теорема 18 (Признак Абеля)**.** *Пусть последовательность* $\{a_n\}$ *монотонная и ограничена, а* $\sum b_k$ *сходится. Тогда* $\sum a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство. Заметим, что раз $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, то $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда $a_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая, причем в силу монотонности $\{a_n\}$ последовательность $\{\alpha_n\}$ также является монотонной. Тогда

$$\sum a_k b_k = \sum a b_k + \sum \alpha_k b_k.$$

Здесь первый ряд сходится, т.к. сходится ряд $\sum b_k$, а второй ряд сходится по признаку Дирихле ($\{B_k\}$ ограничена, т.к. соответствующий ряд сходится). Значит, $\sum a_k b_k$ сходится. $\square$