

Летний коллоквиум по математическому анализу

hse-ami-open-exams

Содержание

1	Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.	2
1.1	Понятие числового ряда, его частичной суммы.	2
1.2	Сходимость и расходимость числовых рядов.	2
1.3	Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.	2
1.4	Необходимый признак сходимости числового ряда.	2
2	Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.	3
2.1	Критерий Коши сходимости числового ряда.	3
2.2	Доказать расходимость гармонического ряда.	3
3	Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.	4
3.1	Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы.	4
3.2	Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.	4
4	Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений α и β.	5
4.1	Интегральный признак сходимости числового ряда.	5
4.2	Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений α и β . (TODO)	5
5	Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.	6
5.1	Примеры.	6
6	Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.	7
6.1	Примеры.	7

1 Понятие числового ряда, его частичной суммы. Сходимость и расходимость числовых рядов. Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.

1.1 Понятие числового ряда, его частичной суммы.

Определение 1. Числовая последовательность a_k , рассматриваемая вместе с последовательностью

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

ее частичных сумм, называется **числовым рядом**.

1.2 Сходимость и расходимость числовых рядов.

Определение 2. Числовой ряд называется **сходящимся**, если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \infty$$

и **расходящимся** иначе. Число S называется **суммой ряда**.

1.3 Примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится (гармонический ряд)
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ – сходится
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ – расходится

1.4 Необходимый признак сходимости числового ряда.

Теорема 1. Необходимым условием сходимости числового ряда является стремление к 0 его n -го члена a_n .

Доказательство. Действительно, в противном случае не выполняется критерий Коши для числовой последовательности S_n . □

2 Критерий Коши сходимости числового ряда. Доказать расходимость гармонического ряда.

2.1 Критерий Коши сходимости числового ряда.

Теорема 2. Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности S_n . □

2.2 Доказать расходимость гармонического ряда.

Теорема 3. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n \geq N \exists p \in \mathbb{N} |S_{n+p} - S_n| \geq \varepsilon$$

Пусть $p = n$. Тогда

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

□

3 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы. Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

3.1 Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами через частичные суммы.

Теорема 4. Ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена.

Доказательство. Необходимость следует из того, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной. Поскольку $p_n \geq 0$, то $\{S_n\}$ монотонно возрастает, а тогда по теореме Вейерштрасса эта последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является ограниченной сверху. Тем самым доказана достаточность. \square

3.2 Теорема о сравнении и предельный признак сравнения.

Теорема 5 (первый признак сравнения). Если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq p_n \leq q_n$, то

1. Из сходимости $\sum q_n$ следует сходимость $\sum p_n$
2. Из расходимости $\sum p_n$ следует расходимость $\sum q_n$

Доказательство.

1. Напрямую следует из теоремы 4.
2. Предположим, что $\sum p_n$ расходится, а $\sum q_n$ сходится. Тогда получаем противоречие с пунктом 1.

\square

Теорема 6 (предельный признак сравнения). Если $p_n > 0, q_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} = l \in (0, +\infty)$, то ряды $\sum p_n$ и $\sum q_n$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. По определению предела

$$\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n \geq N \Rightarrow \left| \frac{p_n}{q_n} - l \right| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < \frac{p_n}{q_n} < l + \varepsilon \Leftrightarrow q_n(l - \varepsilon) < p_n < q_n(l + \varepsilon).$$

Осталось лишь воспользоваться теоремой 5.

\square

4 Интегральный признак сходимости числового ряда. Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений α и β .

4.1 Интегральный признак сходимости числового ряда.

Теорема 7. Пусть при любом $k \in [1, +\infty)$ выполняется $f(k) \geq 0$, причем $f(k) \searrow 0$. Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ эквивалентна сходимости несобственного интеграла $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Доказательство. При $x \in [k, k+1]$, в силу $f(x) \searrow$, имеем $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. Возьмем определенный интеграл от всех частей неравенства:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(k+1) dx &\leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx \\ f(k+1) &\leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \end{aligned}$$

Просуммируем теперь это неравенство по всем k от 1 до n . Получаем

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

Теперь, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}$ сходится, то из правой части неравенства следует, что сходится интеграл. Если же сходится интеграл, то из левой части неравенства вытекает, что сходится ряд. Аналогично с расходимостью. \square

4.2 Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ в зависимости от значений α и β . (TODO)

5 Признак Даламбера в простой и предельной формах. Примеры.

Теорема 8 (признак Даламбера в допредельной форме). Если $\forall k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \right),$$

то ряд $\sum p_k$ сходится (расходится).

Доказательство. Положим $p'_k = q^k$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{p'_{k+1}}{p'_k} &= q < 1 \left(\frac{p'_{k+1}}{p'_k} = 1 \right) \\ \frac{p_{k+1}}{p_k} &\leq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{p'_{k+1}}{p'_k} \right) \end{aligned}$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится (расходится) и, пользуясь первым признаком сравнения (теорема 5), делаем вывод, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). \square

Теорема 9 (признак Даламбера в предельной форме). Пусть существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

Тогда при $L < 1$ ряд $\sum p_k$ сходится, при $L > 1$ расходится, а при $L = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Как мы знаем,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geq N$ выполняется

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon$$

Теперь если $L > 1$, то мы можем выбрать такое ε , что $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Но тогда

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon < 1$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ сходится. Пусть теперь $L > 1$. Выберем такое ε , что $L - \varepsilon = 1$. Получаем

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ расходится.

Наконец, рассмотрим ряды $\sum \frac{1}{k}$ и $\sum \frac{1}{k^2}$. В обоих случаях $L = 1$, но ряд $\sum \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum \frac{1}{k^2}$ сходится. \square

5.1 Примеры.

1. $\sum \frac{1}{n!}$ – сходится
2. $\sum n!$ – расходится

6 Признак Коши в простой и предельной формах. Примеры.

Теорема 10 (признак Коши в допредельной форме). Если $\forall k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geq 1),$$

то ряд $\sum p_k$ сходится (расходится).

Доказательство. Положим $p'_k = q^k$. Тогда

$$\sqrt[k]{p'_k} = q < 1 \quad \left(\sqrt[k]{p'_k} = 1 \right)$$

$$\sqrt[k]{p_k} \leq \sqrt[k]{p'_k} \quad \left(\sqrt[k]{p_k} \geq \sqrt[k]{p'_k} \right)$$

Но теперь, учитывая тот факт, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ сходится (расходится) и, пользуясь первым признаком сравнения (теорема 5), делаем вывод, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится). \square

Теорема 11 (признак Коши в предельной форме). Пусть существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Тогда при $L < 1$ ряд $\sum p_k$ сходится, при $L > 1$ расходится, а при $L = 1$ может как сходиться, так и расходиться.

Доказательство. Как мы знаем,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geq N$ выполняется

$$L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon$$

Теперь если $L > 1$, то мы можем выбрать такое ε , что $L + 2\varepsilon = 1 \Leftrightarrow L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Но тогда

$$\sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon < 1$$

Тем самым получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ сходится.

Пусть теперь $L > 1$. Выберем такое ε , что $L - \varepsilon = 1$. Получаем

$$\sqrt[k]{p_k} > L - \varepsilon = 1$$

Снова получили допредельный вариант теоремы, из которого следует, что ряд $\sum p_k$ расходится.

Наконец, рассмотрим ряды $\sum \frac{1}{k}$ и $\sum \frac{1}{k^2}$. В обоих случаях $L = 1$, но ряд $\sum \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum \frac{1}{k^2}$ сходится. \square

6.1 Примеры.

1. $\sum \frac{n^n}{e^n}$ – расходится
2. $\sum \frac{n^2}{e^n}$ – сходится