続 写真測量の基礎数学

第2回

共線条件式
回転と共線条件式の導出

国土地理院　小白井 亮一

平面（2次元空間）での回転

回転は，数式ではどのように表されるのでしょうか。高校数学で習ったように，ベクトルの回転は，回転行列による変換として表されます。例えば，図-2.1のような平面でのベクトルAの角度 α の回転は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

と書けます。

このあたりのことは，前回連載の第１回～第３回（2010年10月号，2011年１月号，2011年３月号）で，三角関数の基礎中の基礎から説明しましたので，適宜参考にしてください。

(2.1)を使って，回転行列の重要な特徴を押さえておきましょう。この逆回転は，角度 $-\alpha$ の回転です。式では，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

となり，三角関数の負角の公式を使えば，これは

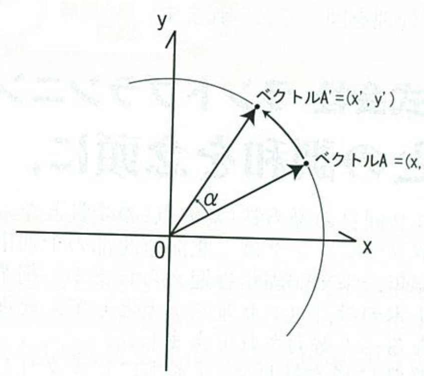
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

と書けます。(2.1)と(2.3)の回転行列を見比べてください。行列の，互いの行と列が入れ替わった関係になっています。このように行と列を入れ替えた行列を転置行列といいます。

ところで，逆回転させるとは，逆変換をかけることです。ある行列による変換（一次変換）の逆変換はその逆行列で与えられます。したがって，回転行列の逆行列は，その転置行列となります。これは重要な特徴であり，３次元での回転でも成り立ち，共線条件式を導出するときに活躍します（３次元の回転でのこの特徴は，前回連載の第５回（2011年７月号）で説明してあります）。

空間（3次元空間）での回転

３次元空間での回転は，図-1.8のように３つの座標軸での回転で表されます。ここでは，図-1.8cに示したz軸のまわりでの回転について数式で表すことを考えましょう。回転させるものは，図-2.2のベクトルAです。



ベクトルAは回転前、ベクトルA' は回転後のものである。

図-2.1　平面でのベクトルの回転

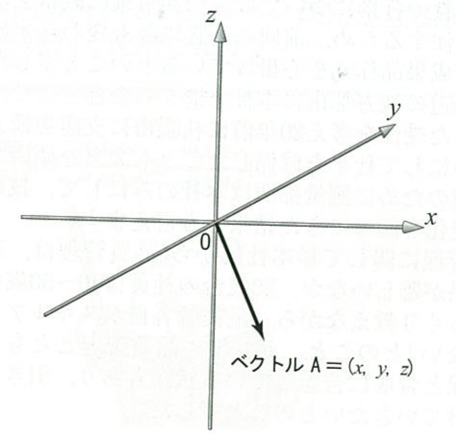


図-2.2　回転させるベクトル

このベクトルを図-2.3aのベクトルA′へと回転させるのです。そして，この回転を図2.3bとcのように見立てていきます。この際，z成分が不変という点が重要です。この回転を数式で表すと，次のようになります。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa \\ \sin\kappa & \cos\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$z' = z \tag{2.5}$$

(2.4)と(2.5)を併せて，一つの回転行列で表示するようにしましょう。これらを次のように書いて見ると，比較的すんなり，目的の行列表示ができます。

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\kappa - y\sin\kappa + 0\times z \\ y' &= x\sin\kappa + y\cos\kappa + 0\times z \\ z' &= 0\times x + 0\times y + 1\times z \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

同様に考えると，y軸，x軸での回転に関する変換式は，次のようになります。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

なお，これらの詳細は，前回連載の第５回で説明してありますので，参照してください（y軸での回転がちょっとくせ者です）。

図-1.8のような回転（z軸，y軸，x軸の順の回転）の回転行列 $R_{\omega\phi\kappa}$ は，各軸の回転行列をそれぞれ R_κ，R_ϕ，R_ω とすれば，それらの積で表されます（高校数学での一次変換の合成変換を思い出してください）。したがって，$R_{\omega\phi\kappa}$ は，次のようになります。

$$R_{\omega\phi\kappa} = R_\omega R_\phi R_\kappa = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

ただし

$r_{11}=\cos\phi\cos\kappa$

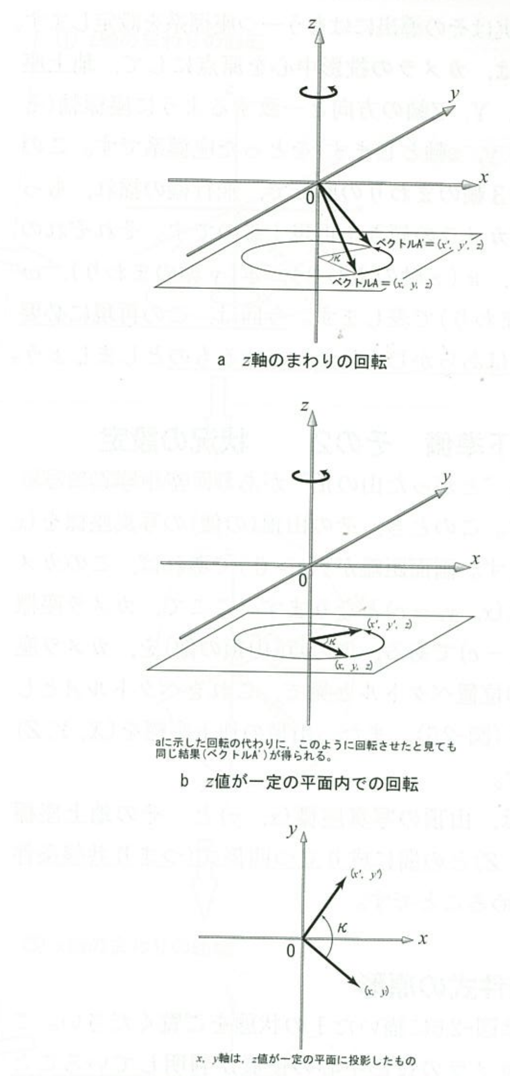


図-2.3　z軸のまわりの回転

$r_{12}=-\cos\phi\sin\kappa$

$r_{13}=\sin\phi$

$r_{21}=\cos\omega\sin\kappa+\sin\omega\sin\phi\cos\kappa$

$r_{22}=\cos\omega\cos\kappa-\sin\omega\sin\phi\sin\kappa$

$r_{23}=-\sin\omega\cos\phi$

$r_{31}=\sin\omega\sin\kappa-\cos\omega\sin\phi\cos\kappa$

$r_{32}=\sin\omega\cos\kappa+\cos\omega\sin\phi\sin\kappa$

$r_{33}=\cos\omega\cos\phi$

(2.9)のただし書から，共線条件式が大変重い式になることが想像されますね。

導出の下準備　その1　もう一つの座標系

共線条件式を求めましょう。でもその前に準備がまだ必要です。関係する座標系については，前回紹介しま