

TAREA — Números Duales Funciones Especiales

1. Obtenga el valor de la derivada de la función, en el punto $x = 0.5$

$$f(x) = x^2 \sin(x)$$

Primero se cambia la expresión a números duales

$$x^2 = (x)(x) = (x, 1) * (x, 1) = (x^2, 2x)$$

$$\sin(x) = \sin((x, 1)) = (\sin(x), \cos(x))$$

$$f(x) = (x^2, 2x) * (\sin(x), \cos(x)) = (x^2 \sin(x), x^2 \cos(x) + 2x \sin(x))$$

Se evalúa en $x = 0.5 \Rightarrow (0.5, 1)$

$$f((0.5, 1)) = (0.25 \sin(0.5), 0.25 \cos(0.5) + \sin(0.5)) = 0.6988211$$

La derivada en el punto $x = 0.5$, es 0.6988211

2. Calcule la segunda derivada de la función, en el punto $x = 0.004$

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Primero se cambia la expresión a números duales

$$f(x) = \frac{[1, 0] - [\cos(x), -\sin(x)]}{[x^2, 2x]} = \frac{[1 - \cos(x), \sin(x)]}{(x^2, 2x)}$$

$$= \left[\frac{1 - \cos(x)}{x^2}, \frac{x^2 \sin(x) - 2x(1 - \cos(x))}{x^4} \right]$$

$$= \left[\frac{1 - \cos(x)}{x^2}, \frac{x^2 \sin(x) - 2x + 2x \cos(x)}{x^4} \right]$$

$$= \left[\frac{1 - \cos(x)}{x^2}, \frac{x \sin(x) - 2 + 2 \cos(x)}{x^3} \right]$$

Se evalúa en $x = 0.004 \Rightarrow (0.004, 1)$

$$f((0.004, 1)) = \left[\frac{1 - \cos(0.004)}{(0.004)^2}, \frac{0.004 \sin(0.004) - 2 + 2\cos(0.004)}{(0.004)^3} \right]$$

$$= -3.33125 \times 10^{-4}$$

La derivada primera derivada en el punto $x = 0.004$, es -3.33125×10^{-4}

Para segunda derivada se usa la expresion que se obtuvo arriba como nueva función.

$$f(x) = \frac{x \sin(x) - 2 + 2\cos(x)}{x^3}$$

se pasa esta expresión a números duales

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{[x, 1] * [\sin(x), \cos(x)] - [2, 0] + [2, 0] * [\cos(x), -\sin(x)]}{[x^3, 3x^2]} \\ &= \frac{[x \sin(x), x \cos(x) + \sin(x)] - [2, 0] + [2 \cos(x), -2 \sin(x)]}{[x^3, 3x^2]} \\ &= \frac{[x \sin(x) - 2 + 2 \cos(x), x \cos(x) + \sin(x) - 2 \sin(x)]}{[x^3, 3x^2]} \\ &= \left[\frac{x \sin(x) - 2 + 2 \cos(x)}{x^3}, \frac{x^3(x \cos(x) + \sin(x) - 2 \sin(x)) - 3x^2(x \sin(x) - 2 + 2 \cos(x))}{x^6} \right] \\ &= \left[\frac{x \sin(x) - 2 + 2 \cos(x)}{x^3}, \frac{x^2[x(x \cos(x) + \sin(x) - 2 \sin(x)) - 3(x \sin(x) - 2 + 2 \cos(x))]}{x^6} \right] \\ &= \left[\frac{x \sin(x) - 2 + 2 \cos(x)}{x^3}, \frac{x^2 \cos(x) + x \sin(x) - 2x \sin(x) - 3x \sin(x) + 6 - 6 \cos(x)}{x^4} \right] \\ &= \left[\frac{x \sin(x) - 2 + 2 \cos(x)}{x^3}, \frac{x^2 \cos(x) - 4x \sin(x) + 6 - 6 \cos(x)}{x^4} \right] \\ &= \left[\frac{x \sin(x) - 2 + 2 \cos(x)}{x^3}, \frac{\cos(x)(x^2 - 6) - 4x \sin(x) + 6}{x^4} \right] \end{aligned}$$

Se evalúa en $x = 0.004 \Rightarrow (0.004, 1)$

$$f((0.004, 1)) = \left[\frac{0.004 \sin(0.004) - 2 + 2 \cos(0.004)}{(0.004)^3}, \frac{\cos(0.004)[(0.004)^2 - 6] - 4(0.004) \sin(0.004) + 6}{(0.004)^4} \right] = -0.083359375$$

La derivada segunda derivada en el punto $x = 0.004$, es -0.083359375

Submitted by Gómez Bustamante Norma Gabriela on 12 de marzo de 2024.