Aufgabe 1.3

1. Es gilt $n^2 > n+1$ für alle $n \geq 2$.
   Induktionsanfang: Sei $n_0 = 2$. Dann gilt $2^2 > 2+1 \Rightarrow 4 > 3$

   Induktionsannahme: Für ein $n \geq 2$ gilt $n^2 > n+1$

   Induktionsschritt: Zu zeigen ist

   $$n^2 > n+1 \Rightarrow (n+1)^2 > (n+1)+1 = n+2$$

   Es gilt

   $$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2+2n+1 > n+1+2n+1 \\ &\geq (n+1)+5, \text{ denn } n \geq 2 \\ &> n+2.\end{aligned}$$

   Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $n^2 > n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt.

2. Es gilt $n^2 \geq 2n+3$ für alle $n \geq 3$.
   Induktionsanfang: Sei $n_0 = 3$. Dann gilt $3^2 \geq 6+3 \Rightarrow 9 > 9$

   Induktionsannahme: Für ein $n \geq 3$ gilt $n^2 \geq 2n+3$

   Induktionsschritt: Zu zeigen ist

   $$n^2 \geq 2n+3 \Rightarrow (n+1)^2 \geq 2(n+1)+3 = 2n+5$$

   Es gilt

   $$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2+2n+1 \geq 2n+3+2n+1 \\ &\geq 2n+3+7, \text{ denn } n \geq 3 \\ &> 2n+5.\end{aligned}$$

   Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass $n^2 > 2n+3$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ gilt.

Aufgabe 1.4

1. zum Beispiel:
   $X = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $AB = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

   $BA = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1.5

1. Sei f definiert durch $f(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn n ungerade, und $f(n) = \frac{n}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn n gerade. Dann ist f surjektiv, da ganz $\mathbb{N}$ in der Bildmenge enthalten ist, und 1 wird unendlich oft getroffen, da alle ungeraden Zahlen auf 1 abgebildet werden.

2. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(n) = 2n$. Dann ist f injektiv, da jedes Element Bild von f nur von einem Element des Urbildes getroffen wird. Und die unendlich vielen ungeraden Zahlen sind nicht im Bild von f.

Aufgabe 1.6

Sei $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ eine Matrix, sodass $XA = 0 \in M_{mn}(\mathbb{K})$ für alle Matrizen $X \in M_{mm}(\mathbb{K})$. Dann gilt insbesondere: $E_{ii}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$