Solution des équations usuelles du MGI

- Le tableau ci-dessous récapitule les équations usuellement rencontrées

Type 1	$X\, r_i = Y$
Type 2	$X\, S\theta_i + Y\, C\theta_i = Z$
Type 3	$X1\, S\theta_i + Y1\, C\theta_i = Z1$ $X2\, S\theta_i + Y2\, C\theta_i = Z2$
Type 4	$X1\, r_j\, S\theta_i = Y1$ $X2\, r_j\, C\theta_i = Y2$
Type 5	$X1\, S\theta_i = Y1 + Z1\, r_j$ $X2\, C\theta_i = Y2 + Z2\, r_j$
Type 6	$W\, S\theta_j = X\, C\theta_i + Y\, S\theta_i + Z1$ $W\, C\theta_j = X\, S\theta_i - Y\, C\theta_i + Z2$
Type 7	$W1\, C\theta_j + W2\, S\theta_j = X\, C\theta_i + Y\, S\theta_i + Z1$ $W1\, S\theta_j - W2\, C\theta_j = X\, S\theta_i - Y\, C\theta_i + Z2$
Type 8	$X\, C\theta_i + Y\, C(\theta_i + \theta_j) = Z1$ $X\, S\theta_i + Y\, S(\theta_i + \theta_j) = Z2$

ri : variable de l'articulation prismatique i,
Sθi, Cθi : sinus et cosinus de la variable θi de l'articulation rotoïde i.

Source : Modélisation, identification et commande des robots. W. Khalil & E. Dombre. Collection robotique. Editions Hermès.

Solution des équations usuelles du MGI

- Equations de type 2 : 4 cas

1. Si $X = 0$ et $Y \neq 0$ $\quad \theta_i = ATAN2(\pm\sqrt{1 - (C\theta_i)^2}, C\theta_i)$

2. Si $Y = 0$ et $X \neq 0$, $\quad \theta_i = ATAN2(S\theta_i, \pm\sqrt{1 - (S\theta_i)^2})$

3. Si X et Y sont non nuls et $Z = 0$
$$\begin{cases} \theta_i = ATAN2(-Y, X) \\ \theta_i' = \theta_i + 180° \end{cases}$$

4. Si X et Y sont non nuls et $Z \neq 0$,

$$\begin{cases} S\theta_i = \dfrac{XZ + \varepsilon Y\sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2} \\ C\theta_i = \dfrac{YZ - \varepsilon X\sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2} \end{cases} \qquad \varepsilon = \pm 1 \qquad \theta_i = ATAN2(S\theta_i, C\theta_i)$$

Source : Modélisation, identification et commande des robots. W. Khalil & E. Dombre. Collection robotique. Editions Hermès.

Solution des équations usuelles du MGI

- Equations de type 3 :
  - Cas général :

$$S\theta_i = \frac{Z1\ Y2 - Z2\ Y1}{X1\ Y2 - X2\ Y1} \qquad \theta_i = \mathrm{ATAN2}(S\theta_i, C\theta_i)$$

$$C\theta_i = \frac{Z2\ X1 - Z1\ X2}{X1\ Y2 - X2\ Y1}$$

Si X1 Y2 = X2 Y1, choisir une des équations et résoudre une équation de type 2

  - Si Y1 et X2 sont nuls :

$$\theta_i = \mathrm{ATAN2}\left(\frac{Z1}{X1}, \frac{Z2}{Y2}\right)$$

- Equations de type 4

$$\begin{cases} r_j = \pm\sqrt{(Y1/X1)^2 + (Y2/X2)^2} \\ \theta_i = \mathrm{ATAN2}\left(\dfrac{Y1}{X1\ r_j}, \dfrac{Y2}{X2\ r_j}\right) \end{cases}$$

Source : Modélisation, identification et commande des robots. W. Khalil & E. Dombre. Collection robotique. Editions Hermès.

Solution des équations usuelles du MGI

- Equations de type 5 :
  - Normaliser les équations :

$$\begin{cases} S\theta_i = V1 + W1\ r_j \\ C\theta i = V2 + W2\ r_j \end{cases} \qquad Vi = Yi/Xi,\ Wi = Zi/Xi$$

  - Elever au carré et additionner les deux équations
  - La résolution du système ainsi obtenu donne r_j et θ_i s'obtient en résolvant un système d'équations de type 3.
  - Ce système ne peut se résoudre que si :

$$[W1^2 + W2^2 - (V1\ W2 - V2\ W1)^2] > 0$$

Source : Modélisation, identification et commande des robots. W. Khalil & E. Dombre. Collection robotique. Editions Hermès.

Solution des équations usuelles du MGI

- Equations de type 6 :
  - Le système peut se ré-écrire sous la forme suivante :

$$B1\, S\theta_i + B2\, C\theta_i = B3 \qquad \begin{aligned} B1 &= 2\,(Z1\, Y + Z2\, X) \\ B2 &= 2\,(Z1\, X - Z2 Y) \\ B3 &= W^2 - X^2 - Y^2 - Z1^2 - Z2^2 \end{aligned}$$

  - Déterminer θ_i en résolvant l'équation de type 2 précédente.
  - A partir de θ_i on peut déduire θ_j en résolvant un système d'équations de type 3.

Source : Modélisation, identification et commande des robots. W. Khalil & E. Dombre. Collection robotique. Editions Hermès.

Solution des équations usuelles du MGI

- Equations de type 7 :
  - Le système peut se ré-écrire sous la forme suivante :

$$B1\, S\theta_i + B2\, C\theta_i = B3 \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} B1 &= 2\,(Z1\, Y + Z2\, X) \\ B2 &= 2\,(Z1\, X - Z2 Y) \\ B3 &= W1^2 + W2^2 - X^2 - Y^2 - Z1^2 - Z2^2 \end{aligned}$$

  - Déterminer θ_i en résolvant l'équation de type 2 précédente.
  - A partir de θ_i on peut déduire θ_j en résolvant un système d'équations de type 3.

Source : Modélisation, identification et commande des robots. W. Khalil & E. Dombre. Collection robotique. Editions Hermès.

Solution des équations usuelles du MGI

- Equations de type 8 :
  - Déterminer θ_j

$$C\theta_j = \frac{Z1^2 + Z2^2 - X^2 - Y^2}{2XY} \quad \Rightarrow \quad \theta_j = \mathrm{ATAN2}\left(\pm\sqrt{1 - (C\theta j)^2},\ C\theta j\right)$$

  - Déduire θ_i

$$\begin{cases} S\theta_i = \dfrac{B1Z2 - B2\,Z1}{B1^2 + B2^2} \\ C\theta_i = \dfrac{B1Z1 + B2Z2}{B1^2 + B2^2} \end{cases} \quad \text{avec } B1 = X + Y\,C\theta_j \text{ et } B2 = Y\,S\theta_j$$

$$\Rightarrow \quad \theta_i = \mathrm{ATAN2}(S\theta_i, C\theta_i)$$

Source : Modélisation, identification et commande des robots. W. Khalil & E. Dombre. Collection robotique. Editions Hermès.