KRR1 Feuille de TD n^o 3

Incertitude

I Des paris “à 20 balles”

Une urne contient 20 balles. Les balles sont vertes (v), bleues (b) ou rouges (r) et portent des numéros différents (elles sont numérotées de 1 à 20).
On sait que seulement 20% des balles sont bleues
On propose à un parieur les paris suivants sur la couleur et le numéro de la balle qui va être tirée.

- Pari A : Gagner 10 si la balles est rouge, rien sinon.
- Pari B : Gagner 10 si la balle porte un numéro pair, 0 si son numéro est impair.
- Pari C : Gagner 5 si la balles est rouge, 2 si elle est bleue, 0 sinon.
- Pari D : Gagner 5 si la balle porte un numéro pair, 1 si son numéro est impair.
- Pari E : Gagner 3 si la balles est rouge ou verte, 0 sinon.

On considère un problème à 6 états : (r, p), (r, i), (b, p), etc (où p=pair et i=impair).

1) Représenter l'information disponible en termes de probabilités imprécises et classer les paris du meilleur au moins bon selon leur utilité espérée UE_* (correspondant à l'utilité dans le cas le plus défavorable, c'est à dire par rapport à la mesure de probabilité inférieure P_* compatible avec l'information).

Corrigé

On sait que $P(\{(b,p),(b,i)\}) = 0.2$ (la proba de l'évènement "la boule est bleue" est de 20 %) et que les évènements "pair" et "impairs" ont la même probabilité, 1/2 : $P(\{(r,p),(v,p),(b,p)\}) = P(\{(r,i),(v,i),(b,i)\}) = 1/2$.
On considère donc la famille de probabilité :
$\mathscr{F} = \{p \text{ t.q } P(\{(b,p),(b,i)\}) = 0.2, P(\{(r,p),(v,p),(b,p)\}) = 1/2 \text{ et } P(\{(r,i),(v,i),(b,i)\}) = 1/2\}$
On note :
$R = \{(r,i),(r,p)\}$ l'évènement "la balle est rouge",
$B = \{(b,i),(b,p)\}$, l'évènement "la balle est bleue",
$P = \{(r,p),(b,p),(v,p)\}$ l'évènement "la balle est paire";
etc.
On ne connaît pas bien la proba de R mais ont sait qu'elle peut etre nulle (pour le cas 20% de rouge et le reste bleues) : $P_*(R) = 0$
Par contre on connaît la proba de P ($P_*(P) = P^*(P) = P(P) = 1/2$)

Le paris à considerer sont : $A = (10\{(r,i),(r,p)\}0)$,
$B = (10\{(r,p),(v,p),(b,p)\}0)$,
$C = (5\{(r,p),(r,i)\}2\{(b,p),(b,i)\}0)$,
$D = (5\{(r,p),(v,p),(b,p)\}1)$,
$E = (3\{(r,p),(r,i),(b,p),(b,i)\}0)$.
On veut calculer pour chaque Paris X $UE_*(X) = \inf_{p\in\mathscr{F}} UE_p(X)$. On préférera le pari qui maximise $UE_*(X)$.

- $UE_*(A) = \inf_{p\in\mathscr{F}}(P(R)\times 10 + 0 + P(\neg R)\times 0) = \inf_{p\in\mathscr{F}} P(R)\times 10 = 10\times P_*(R) = 0$
- $UE_*(B) = \inf_{p\in\mathscr{F}}(P(P)\times 10 + P(I)\times 0) = P(P)\times 10 = 0.5\times 10 = 5$. Remarque, ici, $UE_*(B) = UE(B) = UE^*(B)$.
- $UE_*(C) = \inf_{p\in\mathscr{F}}(P(R)\times 5 + P(B)\times 2 + P(V)\times 0)$. La distribution de $\mathscr{F}$ qui minimise cette expression est celle où il y a 0 balles rouges, donc $UE_*(C) = 0\times 5 + 0.2\times 2 = 0.4$.
- $UE_*(D) = \inf_{p\in\mathscr{F}}(P(P)\times 5 + P(I)\times 1) = P(P)\times 5 + P(I)\times 1 = 0.25 + 0.5 = 0.75$. Ici on a $UE(D) == UE_*(D) = UE^*(D)$ car $P(P)$ et $P(I)$ sont connues.
- $UE_*(E) = \inf_{p\in\mathscr{F}}((1-P(B))\times 3 + P(B)\times 0) = (1-P(B))\times 3 + P(B)\times 0 = 0.8\times 3 = 0.24 = UE^*(E) = UE(E)$

Ce qui donne : $UE_*(A) = 0$, $UE_*(B) = 5$, $UE_*(C) = 0.4$, $UE_*(D) = 0.75$, $UE_*(E) = 0.24$. On préfère $B > D > C > E > A$

2) Même question en considérant maintenant que les balles ont été numérotées n'importe comment sans unicité des nombres de 1 à 20 (peut etre qu'aucune n'est paire, ou impaire, on ne

sait pas). Exprimez les croyances avec une fonction de masse m sur les sous-ensembles d'états puis calculez l'utilité pessimiste U_{pes} de chaque pari.

Corrigé

Fonction de masse $m(\{(b,p),(b,i)\} = 0.2$, $m(\{(r,p),(r,i),(v,p),(v,i)\}) = 0.8$,
On rappele que pour tout acte X, $U_{pes}(X) = \sum_{S' \subseteq S} m(X).\min_{s \in S'} u(X(s))$

- $U_{pes}(A) = \sum_{X \subseteq S} m(X).\min_{s \in X} u(A(s))$,
  ici $u(A(s)) = 0$ pour tout s différent de (r,i) et (r,p).
  Donc $U_{pes}(A) = 0.2 \times min(0,0) + 0.8 \times min(10,10,0,0) = 0$
- $U_{pes}(B) = 0$,
- $U_{pes}(C) = 0.2 \times 2 = 0.4$,
- $U_{pes}(D) = 0.2 \times 1 + 0.8 \times 1 = 1$,
- $U_{pes}(E) = 0.8 \times 3 = 0.24$.

On préfère $D > C > E > A \sim B$

Interprétation alternative : les paris sont des investissements financiers. Les paris 2 et 4 représentent des investissements sur le marché de l'acier, qui peut soit partir à la hausse (balles paires) soit baisser (balles impaires). Les paris 1, 3 et 5 sont des investissements sur l'aluminium, dont les stocks peuvent soit monter (balles rouges), soit rester stable (balles vertes) soit s'écrouler (balles bleues).

II Assassinat

Un juge sait ceci :
- Big Boss a décidé que M. Jones devait mourir ;
- 3 tueurs possibles : Peter, Paul, Mary ;
- Big Boss désigne à pile ou face le sexe du tueur (pièce non truquée) ;
- Aucune idée sur le choix entre Peter et Paul, dans le cas où un homme est choisi ;
- M. Jones est tué par un tueur de Big Boss.

Qui a tué M. Jones ?

1) Modéliser le problème dans un cadre adéquat ;

Corrigé

On utilise le cadre des fonction de croyances, sur le référentiel $S = \{Peter, Paul, Mary\}$ (pour "Peter est coupable", "Paul est coupable", "Mary est coupable"). La distribution m comporte deux éléments focaux, $\{Mary\}$ (l'ensemble des filles) et $\{Paul, Peter\}$ (l'ensemble des garçons), chacun de poids $\frac{1}{2}$ puisque Big Boss tire à pile ou face avec une pièce non truquée. D'où la distribution :
$m(\{Mary\}) = \frac{1}{2}, \quad m(\{Paul, Peter\}) = \frac{1}{2}$

2) Dans quelle mesure peut on penser que Marie est coupable ?

Corrigé

On calcule la plausibilité et la certitude de l'évènement Mary :
$Bel(\{Mary\}) = Pl(\{Mary\}) = m(\{Mary\}) = \frac{1}{2}$

3) idem pour que le coupable soit Paul ou Peter.

Corrigé

$Bel(\{Paul, Peter\}) = Pl(\{Paul, Peter\}) = m(\{Paul, Peter\}) = \frac{1}{2}$

4) idem pour que le coupable soit Paul ou Mary.

Corrigé

$Bel(\{Paul, Mary\}) = m(\{Mary\}) = \frac{1}{2} \quad Pl(\{Paul, Mary\}) = m(\{Mary\}) + m(\{Paul, Peter\}) = 1$

5) En estimant l'utilité de condamner un coupable à 100, celle de condamner un innocent à -100, celle de laisser courir un coupable à -50, quelle serait la meilleure décision entre Condamner Mary, Condamner Peter, Condamner Paul, Ne condamner personne, Condamner Paul et Peter ?

Corrigé

On calcule les utilités des décisions "condamner Mary", "condamner Paul" , "Condamner Peter", "Ne condamner personne" pour les différents états :

	Mary	Paul	Peter
Condamner Mary	100	-150	-150
Condamner Peter	-150	-150	100
Condamner Paul	-150	100	-150
Ne Condamner personne	-50	-50	-50
Condamner Paul et Peter	-250	0	0

Corrigé

On a affaire à une capacité additive (Bel pour le cas pessimiste) et une utilité additive.Ce qui donne :

$U_{pes}(CondamnerMary) = \frac{1}{2} \times 100 + \frac{1}{2} \times min(-150, -150) = -25.$

$U_{pes}(CondamnerPeter) = \frac{1}{2} \times (-150) + \frac{1}{2} \times min(-150, 100)) = -150.$

$U_{pes}(CondamnerPaul) = \frac{1}{2} \times (-150) + \frac{1}{2} \times min(-150, 100) = -150$

$U_{pes}(NeCondamnerPersonne) = \frac{1}{2} \times (-50) + \frac{1}{2} \times min(-50, -50) = -50$

$U_{pes}(CondamnerPauletPeter) = \frac{1}{2} \times (-250) + \frac{1}{2} \times min(0, 0) = -125.$

Étant donné la connaissance qu'on a (il y a une chance sur deux que Mary soit coupable) et les utilités données, la meilleure décision est de condamner Mary.

III Immobilier locatif

Un investisseur souhaite placer son capital dans un placement immobilier locatif. Il a ciblé un quartier en pleine rénovation à proximité d'une zone en développement. La population attendue dans ce nouveau quartier serait composée d'*étudiants* (E), de jeunes professionnels *cadres moyens* (M) et de professionnels *cadres supérieurs* (S). Les logements bâtis dans ce quartier comportent des *appartements* en immeubles ou des logements plus cossus en *villas*.
Compte tenu des prêts qu'il peut obtenir sur 10 ans, le montant de l'opération pour l'investisseur est plafonné, et pour ce montant, la rentabilité du placement dépend des loyers perçus sur la période.
Selon la nature de la population qui se logerait dans le quartier les estimations de remplissage des logements donneraient les gains (rentabilités exprimées en pourcentage %) suivants :

$Population \setminus Logement:$	$appartements$	$villas$
E	200	0
M	300	220
S	30	400

L'investisseur veut utiliser les prévisions sur le quartier en considérant les probabilités respectives des composantes de la population pour anticiper les chances qu'il a de trouver des locataires E, M ou S.
Il s'adresse à un cabinet de conseil en immobilier qu'il connaît et dont il sait évaluer la fiabilité des prévisions selon la catégorie de population prédite : le cabinet est plus fiable quand il conseille C_S="'*investir pour S*"' ou C_E="'*investir pour E*"'. En effet :

— Lorsque le cabinet conseille C_E, il y a une probabilité $3/4$ que des *étudiants* viennent effectivement s'installer, et une probabilité $1/4$ que ce soient des cadres moyens ou supérieurs
— Lorsque le cabinet conseille C_S, il y a une probabilité $3/4$ que des *cadres supérieurs* viennent effectivement s'installer, et une probabilité $1/4$ que ce soient des cadres moyens ou des étudiants
— Lorsque le cabinet conseille C_M, il y a une probabilité $1/2$ que des *cadres moyens* viennent effectivement s'installer, et une probabilité $1/2$ que des étudiants ou au contraire des cadres supérieurs.

1) Si le cabinet conseille C_M, quelle est la plausibilité des évènements suivants : $\{S\}$, $\{M, S\}$, $\{M, S, E\}$? quelle est la certitude de ces évènements ?

Corrigé

Quand le cabinet conseille C_M, on considere la fonction de masse $m(\{M\}) = \frac{1}{2}$ $m(\{E,S\}) = \frac{1}{2}$
$Pl(\{S\}) = 0.5$, $Pl(\{M,S\}) = 1$, $Pl(\{M,S,E\}) = 1$ $Bel(\{S\}) = 0$, $Bel(\{M,S\}) = 0.5$, $Bel(\{M,S,E\}) = 1$

2) Déterminer le meilleur choix pour l'investisseur lorsque le conseil est C_M

Corrigé

$U_{pes}(appart) = 0.5 \times 300 + 0.5 \times \min(200, 30) = 165$
$U_{pes}(villas) = 0.5 \times 220 + 0.5 \times \min(0, 400) = 110$. l'investisseur va choisir d acheter des appartements

3) Pour lequel des trois avis du cabinet l'investisseur va t il décider d'investir dans des villas ? Justifiez votre réponse

Corrigé

Quand le cabinet conseille C_E, on considere la fonction de masse $m(\{E\}) = \frac{3}{4}$ $m(\{M,S\}) = \frac{1}{4}$
$U_{pes}(appart) = 0.75 \times 200 + 0.25 \times \min(300, 30) = 165$
$U_{pes}(villas) = 0.75 \times 0 + 0.25 \times \min(220, 400) = 55$

Quand le cabinet conseille C_S, on considere la fonction de masse $m(\{S\}) = \frac{3}{4}$ $m(\{E,M\}) = \frac{1}{2}$
$U_{pes}(appart) = 0.75 \times 30 + 0.25 \times \min(200, 300) = 72.5$
$U_{pes}(villas) = 0.75 \times 400 + 0.25 \times \min(0, 220) = 300$

pour l'avis C_S, l'investisseur choisira les villas.

IV Possibilités

Soient π une distribution de possibilité normalisée sur un ensemble S, Π et N les mesures de possibilité et de nécessité associées.
On rappelle qu'une distribution de possiblité est *normalisée* sur un ensemble S s'il existe un état complètement possible dans S, c'est-à-dire qu'il existe $s \in S$ t.q. $\pi(s) = 1$.
On rappelle qu'*une mesure de possibilité* Π *associée à une distribution de possibilité* π est définie par :

$$\Pi(A) = \sup_{s \in A} \pi(s)$$

La mesure de nécessité $N(A)$ est définie par

$$N(A) = 1 - \Pi(\overline{A})$$

1.1 Montrer que $\forall A \subseteq S : N(A) > 0 \implies \Pi(A) = 1$

Corrigé

$N(A) = 1 - \Pi(\bar{A})$. Puisque la distribution est normalisée, il existe un état de degré de possibilité égal à 1. Si il appartenait à $\bar{A}$, on aurait $\Pi(\bar{A}) = 1$, donc $N(A) = 0$, ce qui contredit $N(A) > 0$. Donc il n'appartient pas à $\bar{A}$. Donc il appartient à A. Donc $\Pi(A) = 1$.

1.2 Un examen comporte deux exercices, chacun devant durer environ 1h30, ce que l'on peut représenter par un intervalles flou trapézoïdal de noyau $[1h15, 1h45]$ et de support $[0h45, 2h15]$, soit un noyau de $[2h30, 3h30]$ et un support de $[1h30, 4h30]$ pour la totalité de l'examen Calculer Π et N pour les trois évènements F : "l'examen est fini en 3h", G : "l'examen est fini en 4h" et H : "L'examen n'est pas fini en 4h". Sur lequel de ces évènements engageriez vous un pari ?

Corrigé

On modélise ces informations par une distribution de possibilité trapézoïdale :

$$\pi(s) = 1 \text{ ssi } s \in [2h30, 3h30]$$

$$\pi(s) > 0 \text{ ssi } s \in [1h30, 4h30]$$

$\Pi(F) = \Pi(fin \leqslant 3) = 1$ car 3 est dans le noyau. $N(F) = 1 - \Pi(fin > 3) = 1 - \pi(3)$.
$\Pi(G) = \Pi(fin \leqslant= 4)1$ car 3 est dans le noyau. $N(G) = 1 - \Pi(fin > 4) = 1 - \pi(4) = 0.5$
$\Pi(H) = \Pi(fin > 4) = \pi(4) = 0.5$. $N(H) = 1 - \Pi(fin \leqslant 4) = 1 - 1 = 0$ (car $\pi(3) = 1$ et $3 \leqslant 4$)