

Examen de Traitement du signal et de l'image

Master 1 d'Informatique, parcours IAFA, 1ere Session, Avril 2022, durée 1h30

N.B.

Ce sujet comporte des exercices INDEPENDANTS. Il est demandé de JUSTIFIER les réponses.
Documents autorisés : 4 pages A4 de résumé

RAPPELS

On rappelle les signaux élémentaires suivants :

L'impulsion de Dirac

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'échelon unité

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle la transformée de Fourier d'un signal discret $x(n)$ et sa transformée inverse :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-2j\pi n f}$$

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{2j\pi n f} df$$

EXERCICE 1 :

La réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant temporellement (SLIT) est donnée par :

$$h(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 2 & \text{si } n = 1, \\ 1 & \text{si } n = 2, \\ 3 & \text{si } n = 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- 1) Exprimer $h(n)$ en fonction de plusieurs "Dirac" $\delta(n)$.
- 2) Exprimer $h(n)$ en fonction de plusieurs échelons unités $u(n)$.
- 3) Ce système est-il stable ? Justifier.
- 4) Ce système est-il causal ? Justifier.
- 5) Calculer la réponse de ce système à une entrée $x_0(n) = \cos(\pi n) + \sin(2\pi n/3)$.

Dans la suite, on considère que h est constituée que de ses valeurs non nulles.

- 6) Soit le signal $x = [1 \ 2 \ -1 \ 1]$. Calculer la convolution complète $z = h * x$, entre h et x .
- 7) Quelle est la taille de z ?
- 8) Aurait-on pu prévoir cette taille avant le calcul ? Justifier.
- 9) Calculer la convolution circulaire $w = h \circ x$, entre h et x .
- 10) Quelle est la taille de w ?
- 11) Donner la matrice C telle que $w = Cx$.

EXERCICE 2

- 1) Pourquoi dans la définition de la transformée de Fourier inverse (voir Rappels) les bornes de l'intégrale sont $-1/2$ et $1/2$?

Soient les signaux $x(n) = \cos(2\pi n/4)$ et $h(n) = \frac{\sin(2\pi f_0 n)}{\pi n}$.

- 2) Donner les transformées de Fourier $X(f)$ et $H(f)$ resp. de $x(n)$ et $h(n)$.
 3) Donner l'expression de $y(n) = (h * x)(n)$.
 4) Discuter les valeurs de $y(n)$ selon les valeurs de f_0 .

EXERCICE 3

Pour les deux questions suivantes, on peut répondre directement sur la feuille d'énoncé et la rendre avec sa copie.
 Soit le signal $x(n) = 3\delta(n+1) - 5\delta(n) + 3\delta(n-1)$, on note $X(f)$ sa **transformée de Fourier continue**. Ainsi par exemple $X(0) = X(f)$ pour $f = 0$

- 1) Compléter le tableau suivant

n	-2	-1	0	1	2
$x(n)$					

- 2) Sans calculer explicitement $X(f)$, compléter le tableau suivant

$X(0)$	$\int_{-1/2}^{1/2} X(f) df$	$\int_{-1/2}^{1/2} X(f) ^2 df$	$X(1/2)$	$X(-1/2)$

I. EXERCICE 4

- 1) Quelle est la taille d'une image numérique de 128 lignes \times 128 colonnes où chaque pixel est codé sur 8 bits ?
 2) La taille d'une image numérique de 256×256 est 64Ko (Kilo-octets), quel est le nombre Nb de bits utilisés pour coder chaque pixel ?
 3) Quelle est la nouvelle taille si chaque pixel est codé sur $Nb - 1$ bits ?
 4) Perçoit-on une différence ?
 5) Expliquer votre réponse précédente.
 6) Que se passe-t-il si on réduit la taille de sorte à avoir $Nb = 2$?

EXERCICE 5

On considère sur la figure 1, une image originale et sa transformée de Fourier.
 On s'intéresse dans la question suivante uniquement aux 3 images filtrées dans le domaine de Fourier et appelées *image filtrée 1*, *image filtrée 2* et *image filtrée 3*.

- 1) Quel type de filtre a-t-on utilisé pour obtenir chacune de ces trois images (*image filtrée 1*, *2* et *3*).
 2) Donner une expression de chacun de ces trois filtres utilisés. On les notera respectivement H_1, H_2 et H_3 .
 3) Donner les équations qui permettent d'obtenir *image filtrée 1* à partir de l'image originale.
 On s'intéresse dans la question suivante uniquement aux 3 dernières images qui sont dans le domaine spatiale et appelées *image filtrée a*, *image filtrée b* et *image filtrée c*.
 4) Les images filtrées a, b et c correspondent-elles respectivement aux images filtrée (1,2,3) obtenues dans le domaine fréquentiel ?
 5) Expliquer soigneusement votre réponse

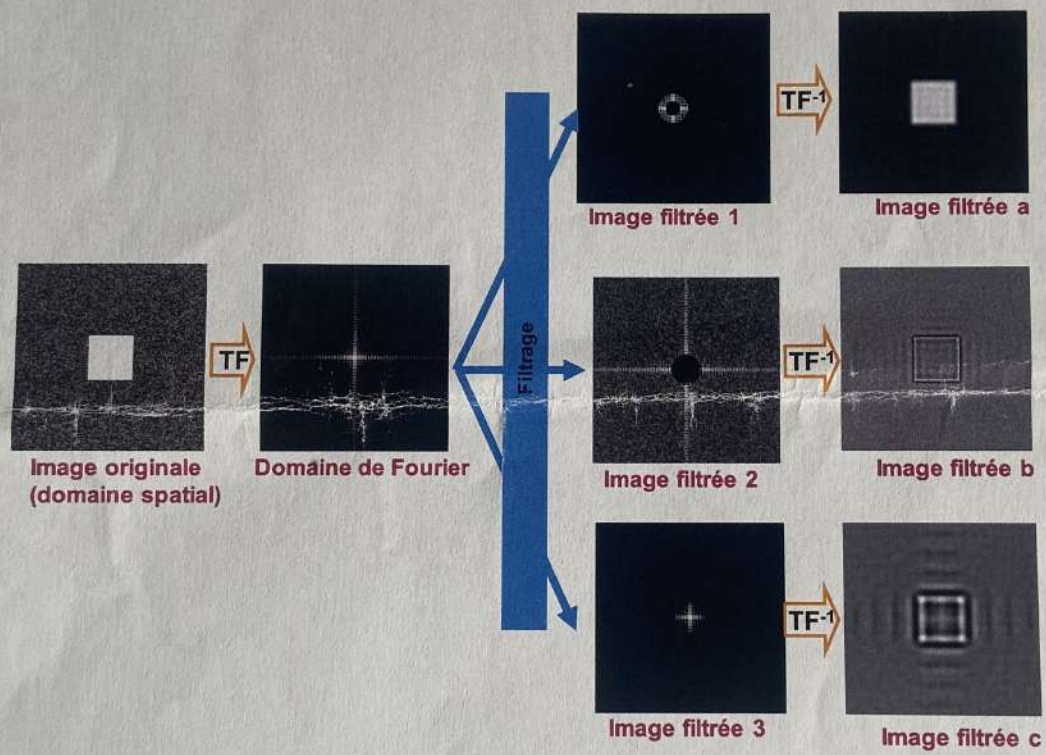


FIGURE 1. Filtrage