TD1
TS

duong-hung.pham@univ.fr

Système discret

Exercice 1:

1) a) $y(n) = x(n) + x(n-1)$
linéaire ? causal ? invariant par translation ? stable

. linéaire ? $T(\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n))$

$y_1(n) = T[x_1(n)] \Rightarrow x_1(n) + x_1(n-1)$

$y_2(n) = T[x_2(n)] \Rightarrow x_2(n) + x_2(n-1)$

Montrer : $T(\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)) = \alpha_1 T(x_1(n)) + \alpha_2 T[x_2(n)]$

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)) &= \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \alpha_1 x_1(n-1) + \alpha_2 x_2(n-1) \\ &= \alpha_1 [x_1(n) + x_1(n-1)] + \alpha_2 [x_2(n) + x_2(n-1)] \\ &= \alpha_1 T(x_1(n)) + \alpha_2 T(x_2(n)) \end{aligned}$$

Le sys est linéaire

. Causal ? $y(n)$ est exprimé comme un combinaison des entrées (x) aux instants $\leq n$
donc sys est causal

Inva par translation ? $T(x(n-n_0)) = x(n-n_0) + x(n-1-n_0) = y(n-n_0)$

oui

(1)

. stable ? On suppose que $x(n)$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|x(n)| \leq A < +\infty$$

Alors $y(n) = |x(n) + x(n-1)|$

$$\leq |x(n)| + |x(n-1)|$$

$$\leq A + A = 2A = B < +\infty$$

~~Assez~~ Sys A est stable si sa sortie est bornée par une valeur.

Donc sys a est stable

b) $y(n) = \exp[x(n)]$

. linéaire ?

$y_1(n) = \exp(x(n_1))$

$y_2(n) = \exp(x(n_2))$

$T(\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n))$

$= \exp[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)]$

$= \exp(\alpha_1 x_1(n)) \times \exp(\alpha_2 x_2(n))$

$= T(\alpha_1 x_1(n)) \times T(\alpha_2 x_2(n))$

$\Rightarrow$ sys b pas linéaire

. Causal ? . Oui car sortie ne dépend que de n en entrées.

. invariant par trans ? . $T[x(n-n_0)] = \exp[x(n-n_0)]$

$= y(n-n_0)$

donc oui.

stable ? On suppose que $x(n)$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$

$|x(n)| \leq A < \infty$ alors

$|y(n)| = |\exp[x(n)]|$ car $\exp(x)$ est croissant

$\leq |\exp(A)|$

$\leq e^A < \infty$

donc y est stable

TD1 TS

Exo 1 : $y(n) = x(-n) = T[x(n)]$

c) $y(n) = x(-n)$

$T(\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n))$

$= \alpha_1 x_1(-n) + \alpha_2 x_2(-n)$

$= \alpha_1 T(x_1(n)) + \alpha_2 T(x_2(n))$

donc linéaire

- $T[\cdot]$ n'est pas causal car $-n$

- ~~$y(n-n_0) = x(-n-n_0)$~~

On veut évaluer : $T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$?

On pose $x_1(n) = x(n-n_0)$

$T(x_1(n)) = x_1(-n) = x(-n-n_0)$

. Mais, on a $y(n-n_0) = x(-(n-n_0))$

$= x(-n+n_0)$

$\neq T[x(n-n_0)]$

d) A faire

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

2) Réponse impulsionnelle du système.

On remplace $x(n)$ par $\delta(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

a) $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$

b) $h(n) = \exp(\delta(n)) = \begin{cases} e^1 & \text{si } n = 0 \\ e^0 & \text{sinon} \end{cases}$

c) $h(n) = \delta(-n) = \delta(n)$

3) En effet, on a $h(-1) = 1$. Mais c'est .

diapo 24

5) $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

Si l'entrée est $u(n)$: $s(n) = n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} u(n)$

// // $u(n-1)$ $s(n-1)$

$= (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n-1)$

Donc si l'entrée est un Dirac $\delta(n)$, on peut avoir

$h(n) = n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n-1)$

Exercice 2 : Convolution

- $x(n) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-6} u(n)$. $h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n-3)$

$$(h * x)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-6} u(k) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u(n-k-3)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} u(n-k-3)$$

- Si $n < 3 \Rightarrow n-3 < 0$, $u(n-k-3) = 0$ $\forall k \geq 0$
$\Rightarrow y(n) = 0$
- Si $n \geq 3 \Rightarrow n-3 \geq 0 \Rightarrow u(n-k-3) = 1$
si $k \leq n-3$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n-3} 6^{6-k}\, 3^{k}$$

$$= 6^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n-3} 6^{-k}\, 3^{k}$$

$$= \underline{\qquad\qquad} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

TD1 TS

$$6^6 \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 6^6 \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-1/2}$$

$$= 6^6 \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 2 \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)$$

$$= 2 . 6^6 \, 3^{-n} \left(1 - 4 \times 2^{2-n}\right) \; u(n-3)$$

2) . Convol complète entre x et y

$x [5, 3, -4]$ $y = [2, -1, 6]$

	x: 5	3	-4
6	30	18	-24
-1	-5	-3	4
2	10	6	-8

$(x * y) = [10 \quad 1 \quad 19 \quad 22 \quad -24]$

. Convol circulaire x et y

$N = 3$

$$z(n) = (x \circ y)(n) = \sum_{k=0}^{2} y(k)\, x_3(n-k)$$

$x_3(n) = x(n+3p)$, $p = 0, \pm 1, \pm 2$

$$z(n) = y(0)\, x_3(n) + y(1)\, x_3(n-1) + y_2\, x_3(n-2)$$

$n = 0$

$z(0) = 2 \times 5 + (-1) \times (-4) + (3) \times 6$
$= 32$

$z(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 5 + 6 \times (-4) = -23$

$z(2) = 19$

$z(n) = (x \circ y)(n) = [32, -23, 19]$

TD 2
TS

1)

Fiche TD1 suite :
$x = [5, 3, -4]^T$; $y = [2, -1, 6]^T$

Convolution complète entre x et y :

Exercice 2 :
3) $h = [1\ 2\ 3\ 4\ 5]^T$ et $x = [x(0)\ x(1)\ x(2)\ x(3)\ x(4)]^T$

a) Convolution circulaire entre h et x :

$z = [z(0)\ \ z(1)\ \ z(2)\ \ z(3)\ \ z(4)]^T$

$z(0) = x(0) +$

convolution circulaire :
$x \to$ périodiser $\Rightarrow x_N$ ($N = 5$ ici)

$z(n) = \sum_{k=0}^{4} h(k)\, x_5(n-k) = x_5(n) + 2x_5(n-1) \ldots + 5x_5(n-4)$

$z(0) = 1x(0) + 2x(4) + 3x(3) + 4x(2) + 5x(1)$
$z(1) = 1x(1) + 2x(0) + 3x(4) + 4x(3) + 5x(2)$
$z(2) = 1x(2) + 2x(1) + 3x(0) + 4x(4) + 5x(3)$
$z(3) = 1x(3) + 2x(2) + 3x(1) + 4x(0) + 5x(4)$
$z(4) = 1x(4) + 2x(3) + 3x(2) + 4x(1) + 5x(0)$

b) Trouver la matricielle C telle que
$\cancel{z} = h \circledast C = Cx$

C est une matrice circulante (peut être déterminée à partir de la première ligne ou ...

$$z = \begin{bmatrix} z(0) \\ z(1) \\ z(2) \\ z(3) \\ z(4) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x}$$

TD2
T8

TD2]

1) Expression de la transformée de Fourier continue d'un signal discret 1D $x(n)$.

$$x(n) \xrightarrow{TFC} X(f)$$

⚠ $$\left[X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-2\pi j n f} \right.$$

ici on a $X(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) e^{-2\pi j n f}$

$$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$$

- Comment peut-on effectuer un produit de convol dans le domaine de Fourier ?

$$y(n) \xrightarrow{TFC} Y(f)$$

$$x(n) * y(n) \xrightarrow{TFC} X(f)\,Y(f)$$

2)

1er cas : $x(n) = 0, 1, 2, \dots N-1$: $x(n) = 1$ si $n = \dots$

TFC ⚠

$$x(n) \xrightarrow{TFC} X(f)$$

$$\cancel{X(f) = \sum_{n=0}^{N}} \quad X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j n f}$$

$$= \cancel{N e^{-2\pi j n f}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi j n f}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-2\pi j f}\right)^n$$

$$= \frac{1 - \left(e^{-2\pi j f}\right)^N}{1 - e^{-2\pi j f}}$$

$\left\{ -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} \right\} \setminus \{0\}$

et $x(0) = N$

$$\sum_{n=0}^{p} a^n = \frac{1 - a^{p+1}}{1 - a}$$

$$X(f) = \frac{1 - \left(e^{-2\pi j f N}\right)}{1 - e^{-2\pi j f}}$$

$$X(0) = N$$

TD2
TS

2) cas où $x(n) = 2^n$ pour $n \in [0, N-1]$

δ = delta

$\Delta[n] = 0$ sauf 1 quand $n = 0$

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N} x(n)\, e^{-2\pi j f n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} 2^n\, e^{-2\pi j f n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left(2^{\cancel{x}} e^{-2\pi j f}\right)^{n}$$

$$= \frac{1 - \left(2^{\cancel{x}} e^{-2\pi j f}\right)^{N+1}}{1 - 2^{\cancel{x}} e^{-2\pi j f}}$$

corr :
$$X(f) = \frac{1 - 2^N e^{-2\pi j N f}}{1 - 2 e^{-2\pi j f}}$$

⚠ 3)

	$x(n)$ $\xrightleftharpoons{TFC}$	$X(f)$
exp complexe	$e^{2\pi j n f_0}$ f_0 fixé $-\frac{1}{2} \leq f_0 \leq \frac{1}{2}$	$\delta(f - f_0)$
Dirac	$\delta(n)$	1
porte	$P_N(n) = \begin{cases} 1 & -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1 - e^{-2\pi j (2N+1) f}}{1 - e^{-2\pi j f}}$
	$\cos 2\pi f_0 n$	$\frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$
	$\sin 2\pi f_0 n$	$\frac{1}{2j}\left[\Delta(f - f_0) - \Delta(f + f_0)\right]$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

porte :
$$X(f) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-2\pi j n f}$$ on pose $p = n+N$

$$X(f) = \sum_{p=0}^{2N} e^{-2\pi j (p-N) f}$$

$$X(f) = e^{2\pi j N f} \sum_{p=0}^{2N} e^{-2\pi j p f}$$

③

Calculons la TFC inverse de $\Delta(f-f_0)$

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)\, e^{+2\pi j n f}\, df$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \Delta(f-f_0)\, e^{+2\pi j n f}\, df = e^{+2\pi j n f_0}$$

4) TFD = discrète

⚠ elle s'applique à des signaux discret de longueur finie.

$$x(n) \xrightarrow{TFD} X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-2\pi j \frac{n m}{N}}$$

longueur N

si $x(n) \xrightarrow{TFD} X(m)$

$y(n) \xrightarrow{TFD} Y(m)$

$\hookrightarrow$ $x(n)\, y(n) \xrightarrow{TFD} X(m) \circ Y(m)$

(convol circulaire)

5) a) $h_1 = [1\ 1\ 1]$

$$X(m) = \sum_{n=0}^{2} h_1(n)\, e^{-2\pi j \frac{n m}{3}}$$

$$= \sum_{n=0}^{2} e^{-2\pi j \frac{n m}{3}} = \frac{1 - e^{-2\pi j m}}{1 - e^{-2\pi j \frac{m}{3}}}$$

$X(0) = 3$

$X(1) = 0$

$X(2) = 0$

$$e^{-2\pi j m}$$

$$= \cos(2\pi m) - j \sin(2\pi m)$$