Internetrecherche: Probleme der Kombinatorik

Informiere dich über die Typen von Urnenziehungen:

a) Ziehen mit Zurücklegen
b) Ziehen ohne Zurücklegen
c) Ziehen auf einen Griff

Nenne je ein Beispiel.

---

a) Ziehen mit Zurücklegen

k-mal wird eine Kugel gezogen u. wieder zurückgelegt

$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ Faktoren}} = n^k$ Möglichkeiten

b) Ziehen ohne Zurücklegen

n unterscheidbare Kugeln
k-mal wird gezogen u. nicht wieder zurückgelegt.

$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ Faktoren}}$ Möglichkeiten

c) Ziehen auf einen Griff

n unterscheidbare Kugeln
k Kugeln werden auf einen Griff entnommen)
(Es wird eine k-elementige Teilmenge aus einer n-elementigen Grundmenge auf einmal entnommen.)

$\frac{n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \cdot \ldots \cdot 1}$ Möglichkeiten

Kurzschreibweise: $\binom{n}{k}$ („n über k")

Bsp.: $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}$

Bsp.:
a) Würfeln (Augenzahl verschwindet bei erneutem Würfeln nicht)
b) Lose (können nach Öffnen nicht mehr verwendet werden)
c) Lotto (6 Kugeln werden gezogen, Reihenfolge egal)

Beispiel: 27 Schüler in der Klasse
5 Freikarten sollen vergeben werden.

1. Fall: 5 Karten haben unterschiedliche Qualität

1. Karte: 27 Möglichkeiten
2. : 26
3. : 25
4. : 24
5. : 23

Da alle Möglichkeiten miteinander kombiniert werden können:
$27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 9687600$ Möglichkeiten

→ Bsp. für b)

2. Fall Karten haben gleiche Qualität

→ alle Karten können auf einmal ausgelost werden („ziehen auf einen Griff" → c))
→ spielt keine Rolle, wer die 1., 2., 3., 4. oder 5. Karte bekommt
→ man könnte einem der 5 ausgelosten Schüler alle 5 Karten geben und ihn bitten, sie innerhalb der Gruppe zu verteilen
(Dafür gibt es:
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten

→ Insgesamt gibt es dann:

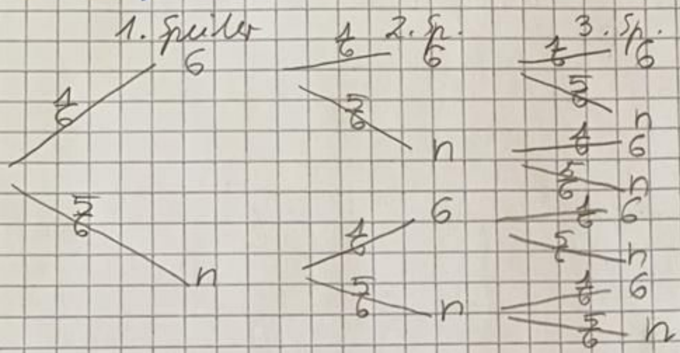
$$\frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 80730 \text{ Möglichkeiten}$$

kurz: $\binom{27}{25}$ „27 über 5"

Bernoulli-Ketten, Bernoulli-Experimente (Lb. S. 186)

Beispiel: 3 Personen, Würfelspiel, es kommt nur raus, wer eine 6 würfelt, jeder nur ein Versuch

Baumdiagramm: n... nicht sechs



mögliche Ergebnisse

666
66n
6n6
6nn
n66
n6n
nn6
nnn

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner, einer, zwei, drei eine 6 würfeln?

keiner: $P(X=0) = P(nnn) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 57{,}9\%$

einer: $P(X=1) = P(6nn) + P(n6n) + P(nn6)$
$= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$
$= 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 34{,}7\%$

zwei: $P(X=2) = P(66n) + P(6n6) + P(n66)$
$= 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6} = 6{,}9\%$

drei: $P(X=3) = P(666) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0{,}5\%$

$\Longrightarrow$ Hier geht es nur darum, ob jemand eine 6 würfelt oder nicht.

6 gewürfelt: „Erfolg"
keine 6: „Misserfolg"

Definition: Bernoulli-Experiment

1.) Ein Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ergebnissen: „Erfolg" oder „Misserfolg" heißt Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und der Misserfolgswahrsch. 1-p

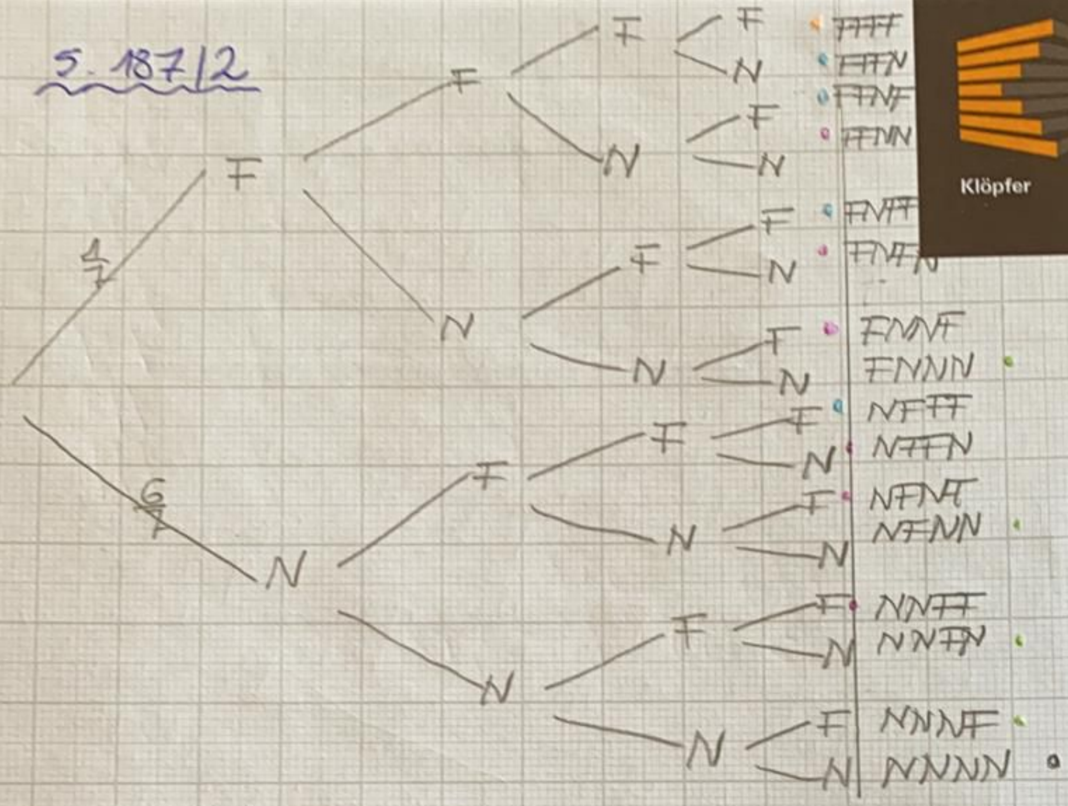
BRUNNEN

2.) Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal durchgeführt und ändert sich die Erfolgswahrsch. von Stufe zu Stufe nicht, spricht man von einer n-stufigen Bernoulli-Kette.

Jakob Bernoulli (1654–1705)
Mitbegründer der Wahrsch.rechn.

S. 187/2

S. 187/2



$$\left.\begin{aligned}
P(X=0) &= \left(\tfrac{6}{7}\right)^4 &&= 53{,}98\% \\
P(X=1) &= 4 \cdot \tfrac{1}{7} \cdot \left(\tfrac{6}{7}\right)^3 &&= 35{,}99\% \\
P(X=2) &= 6 \cdot \left(\tfrac{1}{7}\right)^2 \left(\tfrac{6}{7}\right)^2 &&= 8{,}99\% \\
P(X=3) &= 4 \cdot \left(\tfrac{1}{7}\right)^3 \cdot \tfrac{6}{7} &&= 0{,}9996\% \\
P(X=4) &= \left(\tfrac{1}{7}\right)^4 &&= 0{,}04\%
\end{aligned}\right\} \Sigma\ 100\%$$

-7- S. 196 / 12 $n = 5$ $p = 0{,}6$

$P(X=5) = \binom{5}{5}^{=1} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^0 = 7{,}6\%$

$P(X=4) = \binom{5}{4}^{=5} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^1 = 25{,}9\%$

$P(X=3) = \binom{5}{3}^{=10} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 34{,}6\%$

$P(X=2) = \binom{5}{2}^{=10} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 23{,}04\%$

$P(X=1) = \binom{5}{1}^{=5} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^4 = 7{,}7\%$

$P(X=0) = \binom{5}{0}^{=1} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^5 = 1{,}02\%$