$P(X=5) = \binom{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \ldots$

$$\left.\begin{aligned}
P(X=4) &= \binom{12}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^8 = 0{,}2384 \\
P(X=3) &= \binom{12}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^9 = 0{,}2112 \\
P(X=2) &= \binom{12}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{10} = 0{,}1272 \\
P(X=1) &= \binom{12}{1} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{11} = 0{,}0462 \\
P(X=0) &= \binom{12}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{12} = 0{,}0077
\end{aligned}\right\} 0{,}8215$$

$\rightarrow P(X \geq 6) = 1 - 0{,}8215 = \underline{\underline{17{,}85\%}}$

11) a) $P(X=3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 15{,}5\%$

b) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 4)$

$$\left.\begin{aligned}
P(X=0) &= \binom{10}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{10} = 0{,}1615 \\
P(X=1) &= \binom{10}{1} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{9} = 0{,}3230 \\
P(X=2) &= \binom{10}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{8} = 0{,}2907 \\
P(X=3) &= \binom{10}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{7} = 0{,}155 \\
P(X=4) &= \binom{10}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^{6} = 0{,}054
\end{aligned}\right\} 0{,}9845$$

$\rightarrow P(X \geq 4) = 1 - 0{,}9845 = \underline{\underline{1{,}55\%}}$

c) Augenzahl $> 4 \rightarrow p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \underline{\underline{5{,}7\%}}$

d) Augenzahl $< 6 \rightarrow p = \frac{5}{6}$

$P(X=3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 = \underline{\underline{0{,}025\%}}$

e) Augenzahl $> 2$ : $p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(3 < X < 7) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$

$$\left.\begin{aligned}
P(X=4) &= \binom{10}{4} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^6 = 0{,}0569 \\
P(X=5) &= \binom{10}{5} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^5 = 0{,}1366 \\
P(X=6) &= \binom{10}{6} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 = 0{,}2276
\end{aligned}\right\} \underline{\underline{42{,}11\%}}$$

12)

1\. Weg: P(höchstens 10 fahren mit)
$= 1 - P$(11 oder 12 fahren mit)

$p = 0{,}8$ (80% fahren mit)

$P(X=11) = \binom{12}{11} \cdot 0{,}8^{11} \cdot 0{,}2^{1} = 0{,}2062$

$P(X=12) = \binom{12}{12} \cdot 0{,}8^{12} \cdot 0{,}2^{0} = 0{,}0687$

$1 - 0{,}2062 - 0{,}687 = \underline{72{,}51\%}$

2\. Weg: P(2 bis 12 von 12 Aktien zurück)

$p = 0{,}2$ (20% Aktien zurück)

$P(X \geq 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1))$

$$\left.\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{12}{0} \cdot 0{,}2^{0} \cdot 0{,}8^{12} = 0{,}0687 \\ P(X=1) &= \binom{12}{1} \cdot 0{,}2^{1} \cdot 0{,}8^{11} = 0{,}2062 \end{aligned}\right\} 0{,}275$$

$\rightarrow 1 - 0{,}275 = \underline{72{,}51\%}$

# Elemente der beurteilenden Statistik

## 1. Aufstellen und Prüfen von Hypothesen, Fehler 1. und 2. Art

Bsp.: Schulfest für 2070 Schüler
2 Schüler bereiten eine Tombola vor, bei der alle Lose gleich aussehen.
Keiner kann mehr sehen, welche die „richtige" ist.

Tombola 1 : 2070 Lose mit Gewinnanteil von $\frac{1}{2}$

2 : 2070 -"- $\frac{1}{6}$

Es wurden nur 345 Gewinne gekauft ($\frac{1}{6}$ Gewinne)
→ T 2 wäre die „richtige"

Test: Einer Tombola werden 5 Lose entnommen u. geprüft.
Festlegung: Ist höchstens 1 Gewinn dabei, so soll das als Tombola 2 gelten.

→ 2 Vermutungen / Hypothesen:
Nullhypothese $H_0$ : $p_0 = \frac{1}{6}$

Gegenhypothese $H_1$ : $p_1 = \frac{1}{2}$

Bei der Zufallsstichprobe werden d. Gewinnlose als binomial verteilte Zufallsgröße $X$ mit $n=5$ und $p_0 = \frac{1}{6}$ oder $p_1 = \frac{1}{2}$ angenommen.

Bei $X \leq 1$ (höchstens 1 Gewinnlos) fällt folgende Entscheidung für $H_0$:

<u>Annahmebereich</u> $A$ für $H_0$ : $A = \{0; 1\}$

<u>Ablehnungsbereich</u> $\bar{A}$ für $H_0$ : $\bar{A} = \{2; 3; 4; 5\}$

Folgende <u>Fehlentscheidungen</u> möglich:

| aufgrund der Stichprobe / in der Grundgesamtheit gilt: | $H_0$ ist wahr | $H_0$ ist falsch |
|---|---|---|
| wird $H_0$ abgelehnt | Entscheidung falsch Fehler 1. Art | Entscheidung richtig |
| wird $H_0$ nicht abgelehnt | Entscheidung richtig | Entscheidung falsch Fehler 2. Art |

Ziel: Aufwand der Stichprobenuntersuchung und Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. und 2. Art gegeneinander abwägen

bei der
chtig" ist.
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{6}$
me)
men u.
bei, so
gelten.
als
5
de





Zurück zum Tombola-Bsp.:

**Fehler 1. Art:**

$H_0$ trifft in Wirklichkeit zu, es ist T2, d.h. $p=\frac{1}{6}$ gilt, aber die Stichprobe liefert mehr als 1 Gewinnlos, d.h. $H_0$ wird abgelehnt.

$n=5 \quad p=\frac{1}{6}$

$$P(X\geq 2) = 1-(P(X=0)+P(X=1))$$
$$= 1-\left(\binom{5}{0}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\tfrac{5}{6}\right)^4\right)$$
$$= 1-(0{,}4019+0{,}4019) = \underline{\underline{19{,}6\,\%}}$$

**Fehler 2. Art:**

$H_1$ trifft in Wirklichkeit zu, es ist T1, d.h. $p=\frac{1}{2}$ gilt, aber die Stichprobe liefert max. 1 Gewinnlos und $H_0$ wird nicht abgelehnt.

$n=5 \quad p=\frac{1}{2}$

$$P(X\leq 1) = P(X=0)+P(X=1)$$
$$= \binom{5}{0}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \underline{\underline{18{,}75\,\%}}$$

Gut ist, dass Fehler 1. und 2. Art ausgeglichen sind.

* Probiere durch Veränderung des Testkriteriums, ob sich „bessere" Ergebnisse erzielen lassen, z.B. Veränderung von n.

---