

Theoretische Informatik

Beweise 101

Nicolas Wehrli, ETH Zurich

November 2, 2023

Contents

1	Grundbegriffe	3
1.1	Alphabet	3
1.2	Wort	3
1.3	Sprache	6
2	Algorithmische Probleme	7
3	Kolmogorov Komplexität	9
3.1	Theorie	9
3.2	How To Kolmogorov	13
4	Endliche Automaten - Einführung	15
4.1	Erster Ansatz zur Modellierung von Algorithmen	15
4.2	Reguläre Sprachen	16
4.3	Produktautomaten - Simulationen	17
5	Beweise für Nichtregularität	19
5.1	Einführung und grundlegende Tipps	19
5.2	Theorie für Nichtregularitätsbeweise	19
5.2.1	Lemma 3.3 Methode	19
5.2.2	Pumping Lemma Methode	20
5.2.3	Kolmogorov Methode	21
5.3	Weitere Aufgaben	22
6	Nichtdeterministische Endliche Automaten	24
6.1	Definitionen	24
6.2	Äquivalenz von NEA und EA	27
6.3	Exponentiell mehr Zustände - manchmal	28
6.4	Mindestanzahl Zustände	29
7	Turing Maschinen	31
7.1	Motivation und Überblick	31
7.2	Turing Maschinen - Formalisierung von Algorithmen	32
7.3	Wichtige Klassen	33
7.4	Mehrband-Turingmaschine	34
7.5	Äquivalenz von Maschinen (TM, MTM)	34
7.6	Nichtdeterministische Turingmaschinen	36
8	Einstieg Berechenbarkeit	37

8.1	Diagonalisierung	37
9	Midterm Prep	40

1 Grundbegriffe

Für eine Menge A bezeichnet $|A|$ die Kardinalität von A und $\mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$ die Potenzmenge von A .

In diesem Kurs definieren wir $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

1.1 Alphabet

Definition Alphabet

Eine endliche, nichtleere Menge Σ heisst **Alphabet**. Die Elemente eines Alphabets werden **Buchstaben (Zeichen, Symbole)** genannt.

Beispiele

- $\Sigma_{\text{bool}} = \{0, 1\}$
- $\Sigma_{\text{lat}} = \{a, \dots, z\}$
- $\Sigma_{\text{Tastatur}} = \Sigma_{\text{lat}} \cup \{A, \dots, Z, _, >, <, (,), \dots, !\}$
- $\Sigma_{\text{logic}} = \{0, 1, (,), \wedge, \vee, \neg\}$
- $\Sigma_{abc} = \{a, b, c\}$ (**unser Beispiel für weitere Definitionen**)

1.2 Wort

Definition Wort

- Sei Σ ein Alphabet. Ein **Wort** über Σ ist eine endliche (eventuell leere) Folge von Buchstaben aus Σ .
- Das **leere Wort** λ ist die leere Buchstabenfolge.
- Die **Länge** $|w|$ eines Wortes w ist die Länge des Wortes als Folge, i.e. die Anzahl der Vorkommen von Buchstaben in w .
- Σ^* ist die Menge aller Wörter über Σ . $\Sigma^+ := \Sigma^* \setminus \{\lambda\}$ ist Menge aller nichtleeren Wörter über Σ .
- Seien $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$. Dann ist $|x|_a$ definiert als die Anzahl der Vorkommen von a in x .

Achtung Metavariablen! I.e. Das a in der Definition ist steht für einen beliebigen Buchstaben aus Σ und **nicht** nur für den Buchstaben 'a', der in Σ sein könnte.

Bemerkungen

- Wir schreiben Wörter ohne Komma, i.e. eine Folge x_1, x_2, \dots, x_n schreiben wir $x_1x_2\dots x_n$.
- $|\lambda| = 0$ aber $|_| = 1$ von Σ_{Tastatur} .
- Der Begriff **Wort** als Fachbegriff der Informatik entspricht **nicht** der Bedeutung des Begriffs Wort in natürlichen Sprachen!
- E.g. Mit $_$ kann der Inhalt eines Buches oder ein Programm als ein Wort über Σ_{Tastatur} betrachtet werden.

Beispiel Verschiedene Wörter über Σ_{abc} :

$a, aa, aba, cba, caaaab$ etc.

Die **Verkettung (Konkatenation)** für ein Alphabet Σ ist eine Abbildung $\text{Kon}: \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, so dass

$$\text{Kon}(x, y) = x \cdot y = xy$$

für alle $x, y \in \Sigma^*$.

- Die Verkettung Kon (i.e. Kon von einem Kon (über das gleiche Alphabet Σ)) ist eine assoziative Operation über Σ^* .

$$\text{Kon}(u, \text{Kon}(v, w)) = \text{Kon}(\text{Kon}(u, v), w), \quad \forall u, v, w \in \Sigma^*$$

- $x \cdot \lambda = \lambda \cdot x = x, \quad \forall x \in \Sigma^*$
- $\implies (\Sigma^*, \text{Kon})$ ist ein Monoid mit neutralem Element λ .
- Kon nur kommutativ, falls $|\Sigma| = 1$.
- $|xy| = |x \cdot y| = |x| + |y|$. (Wir schreiben ab jetzt xy statt $\text{Kon}(x, y)$)

Beispiel

Wir betrachten wieder Σ_{abc} . Sei $x = abba$, $y = cbc bc$, $z = aaac$.

- $\text{Kon}(x, \text{Kon}(y, z)) = \text{Kon}(x, yz) = xyz = abbacbcbaaac$
- $|xy| = |abbacbc bc| = 9 = 4 + 5 = |abba| + |cbcbc| = |x| + |y|$

Für ein Wort $a = a_1 a_2 \dots a_n$, wobei $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. a_i \in \Sigma$, bezeichnet $a^R = a_n a_{n-1} \dots a_1$ die **Umkehrung (Reversal)** von a .

Sei Σ ein Alphabet. Für alle $x \in \Sigma^*$ und alle $i \in \mathbb{N}$ definieren wir die i -te **Iteration** x^i von x als

$$x^0 = \lambda, x^1 = x \text{ und } x^i = x x^{i-1}.$$

Beispiel

Wir betrachten wieder Σ_{abc} . Sei $x = abba$, $y = cbc bc$, $z = aaac$.

- $z^R = (aaac)^R = caaa$
- $x^R = (abba)^R = abba$
- $x^0 = \lambda$
- $y^2 = y y^{2-1} = yy = cbc bc bc bc$
- $z^3 = z z^2 = z z z = aaacaaacaaac$
- $(x^R z^R)^R = ((abba)^R (aaac)^R)^R = (abbacaaa)^R = aaacabba$

Seien $v, w \in \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ .

- v heisst ein **Teilwort** von $w \iff \exists x, y \in \Sigma^* : w = xvy$
- v heisst ein **Präfix** von $w \iff \exists y \in \Sigma^* : w = vy$
- v heisst ein **Suffix** von $w \iff \exists x \in \Sigma^* : w = xv$
- $v \neq \lambda$ heisst ein **echtes** Teilwort (Präfix, Suffix) von $w \iff v \neq w$ und v Teilwort (Präfix, Suffix) von w

Beispiel

Wir betrachten wieder Σ_{abc} . Sei $x = abba$, $y = cbcb$, $z = aaac$.

- bc ist ein echtes Suffix von y
- $abba$ ist kein echtes Teilwort von x .
- $cbcb$ ist ein echtes Teilwort und echtes Präfix von y .
- ac ist ein echtes Suffix.
- $abba$ ist ein Suffix, Präfix und Teilwort von x .

Aufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet und sei $w \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wie viele unterschiedliche Teilwörter kann w höchstens haben?

Lösung

Wir haben $w = w_1 w_2 \dots w_n$ mit $w_i \in \Sigma$ für $i = 1, \dots, n$. Wie viele Teilwörter beginnen mit w_1 ? Wie viele Teilwörter beginnen mit w_2 ?

Wir haben also $n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ Teilwörter. Etwas fehlt aber in unserer Berechnung...

Das leere Wort λ ist auch ein Teilwort! Also haben wir $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Teilwörter.

Aufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Bestimme die Anzahl der Wörter aus Σ^n , die das Teilwort a enthalten.

Lösung

In solchen Aufgaben ist es manchmal einfach, das Gegenteil zu berechnen und so auf die Lösung zu kommen. Wie viele Wörter aus Σ^n enthalten das Teilwort a **nicht**?

Da wir jetzt die Anzahl Wörter der Länge n wollen, die nur b und c enthalten, kommen wir auf $|\{b, c\}|^n = 2^n$.

Daraus folgt, dass genau $|\Sigma|^n - 2^n = 3^n - 2^n$ Wörter das Teilwort a enthalten.

Aufgabe 3

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Bestimme die Anzahl der Wörter aus Σ^n , die das Teilwort aa nicht enthalten.

Lösung

Wir bezeichnen die Menge aller Wörter mit Länge n über Σ , die aa nicht enthalten als L_n .

Schauen wir mal die ersten zwei Fälle an:

- $L_1 = \{a, b, c\} \implies |L_1| = 3$
- $L_2 = \{ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\} \implies |L_2| = 8$

Nun können wir für $m \geq 3$ jedes Wort $w \in L_m$ als Konkation $w = x \cdot y \cdot z$ schreiben, wobei wir zwei Fälle unterscheiden:

(a) $z \neq a$

In diesem Fall kann $y \in \{a, b, c\}$ sein, ohne dass die Teilfolge aa entsteht und somit ist xy ein beliebiges Wort aus L_{m-1} .

Dann könnten wir alle Wörter in diesem Case durch $L_{m-1} \cdot \{b, c\}$ beschreiben, was uns die Kardinalität $2 \cdot |L_{m-1}|$ gibt.

(b) $z = a$

In diesem Fall muss $y \neq a$ sein, da sonst aa entstehen würde.

Somit kann xy nur in b oder c enden. x kann aber ein beliebiges Wort der Länge $m - 2$ sein.

Deshalb können wir alle Wörter in diesem Case durch $L_{m-2} \cdot \{b, c\} \cdot \{a\}$ beschreiben. Kardinalität: $2 \cdot |L_{m-2}|$.

Daraus folgt

$$|L_n| = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ 8 & n = 2 \\ 2|L_{n-1}| + 2|L_{n-2}| & n \geq 3 \end{cases}$$

Sei $\Sigma = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, $m \geq 1$, ein Alphabet und sei $s_1 < s_2 < \dots < s_m$ eine Ordnung auf Σ . Wir definieren die **kanonische Ordnung** auf Σ^* für $u, v \in \Sigma^*$ wie folgt:

$$u < v \iff |u| < |v| \vee (|u| = |v| \wedge u = x \cdot s_i \cdot u' \wedge x \cdot s_j \cdot v') \\ \text{für irgendwelche } x, u', v' \in \Sigma^* \text{ und } i < j.$$

Sei $\Sigma_{abc} = \{a, b, c\}$ und wir betrachten folgende Ordnung auf Σ_{abc} : $c < a < b$.

Was wäre die kanonische Ordnung folgender Wörter?

$c, abc, aaac, aaab, bacc, a, \lambda$

$\lambda, c, a, abc, aaac, aaab, bacc$

1.3 Sprache

Eine **Sprache** L über einem Alphabet Σ ist eine Teilmenge von Σ^* .

- Das Komplement L^c der Sprache L bezüglich Σ ist die Sprache $\Sigma^* \setminus L$.
- $L_\emptyset = \emptyset$ ist die **leere Sprache**.
- $L_\lambda = \{\lambda\}$ ist die einelementige Sprache, die nur aus dem leeren Wort besteht.

Konkatenation von Sprachen

Sind L_1 und L_2 Sprachen über Σ , so ist

$$L_1 \cdot L_2 = L_1 L_2 = \{vw \mid v \in L_1 \text{ und } w \in L_2\}$$

die **Konkatenation** von L_1 und L_2 .

Ist L eine Sprache über Σ , so definieren wir

$$L^0 := L_\lambda \text{ und } L^{i+1} := L^i \cdot L \text{ für alle } i \in \mathbb{N},$$

$$L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i \text{ und } L^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} L^i = L \cdot L^*.$$

L^* nennt man den **Kleene'schen Stern** von L .

Man bemerke, dass $\Sigma^i = \{x \in \Sigma^* \mid |x| = i\}$, $L_\emptyset L = L_\emptyset = \emptyset$ und $L_\lambda \cdot L = L$.

Mögliche Sprachen über Σ_{abc}

- $L_1 = \emptyset$
- $L_2 = \{\lambda\}$
- $L_3 = \{\lambda, ab, baca\}$
- $L_4 = \Sigma_{abc}^*$, $L_5 = \Sigma_{abc}^+$, $L_6 = \Sigma_{abc}$ oder $L_7 = \Sigma_{abc}^{27}$
- $L_8 = \{c\}^* = \{c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- $L_9 = \{a^p \mid p \text{ ist prim.}\}$
- $L_{10} = \{c^i a^{3i^2} b a^i c \mid i \in \mathbb{N}\}$

λ ist ein Wort über jedes Alphabet. Aber es muss nicht in jeder Sprache enthalten sein!

Seien L_1, L_2 und L_3 Sprachen über einem Alphabet Σ . Dann gilt

$$L_1 L_2 \cup L_1 L_3 = L_1 (L_2 \cup L_3) \tag{1}$$

$$L_1 (L_2 \cap L_3) \subseteq L_1 L_2 \cap L_1 L_3 \tag{2}$$

Weshalb nicht '=' bei (2)?

Sei $\Sigma = \Sigma_{\text{bool}} = \{0, 1\}$, $L_1 = \{\lambda, 1\}$, $L_2 = \{0\}$ und $L_3 = \{10\}$.

Dann haben wir $L_1 (L_2 \cap L_3) = \emptyset \neq \{10\} = L_1 L_2 \cap L_1 L_3$.

Beweise im Buch/Vorlesung

Homomorphismus

Seien Σ_1 und Σ_2 zwei beliebige Alphabete. Ein Homomorphismus von Σ_1^* nach Σ_2^* ist jede Funktion $h : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $h(\lambda) = \lambda$ und
- (ii) $h(uv) = h(u) \cdot h(v)$ für alle $u, v \in \Sigma_1^*$.

Wir können Probleme etc. in anderen Alphabeten kodieren. So wie wir verschiedenste Konzepte, die wir auf Computer übertragen in Σ_{bool} kodieren.

2 Algorithmische Probleme

Mathematische Definition folgt in Kapitel 4 (Turingmaschinen).

Algorithmen - Provisorische Definition

Vorerst betrachten wir Programme, die **für jede zulässige Eingabe halten und eine Ausgabe liefern**, als Algorithmen.

Wir betrachten ein Programm (Algorithmus) A als Abbildung $A : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ für beliebige Alphabete Σ_1 und Σ_2 . Dies bedeutet, dass

- (i) die Eingaben als Wörter über Σ_1 kodiert sind,
- (ii) die Ausgaben als Wörter über Σ_2 kodiert sind und
- (iii) A für jede Eingabe eine eindeutige Ausgabe bestimmt.

A und B äquivalent \iff Eingabealphabet Σ gleich, $A(x) = B(x), \forall x \in \Sigma^*$

Ie. diese Notion von "Äquivalenz" bezieht sich nur auf die Ein und Ausgabe.

Entscheidungsproblem

Das **Entscheidungsproblem** (Σ, L) für ein gegebenes Alphabet Σ und eine gegebene Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist, für jedes $x \in \Sigma^*$ zu entscheiden, ob

$$x \in L \text{ oder } x \notin L.$$

Ein Algorithmus A **löst** das Entscheidungsproblem (Σ, L) , falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L, \\ 0, & \text{falls } x \notin L. \end{cases}$$

Wir sagen auch, dass A die Sprache L erkennt.

Rekursive Sprachen

Wenn für eine Sprache L ein Algorithmus existiert, der L erkennt, sagen wir, dass L **rekursiv** ist.

Wir sind oft an spezifischen Eigenschaften von Wörtern aus Σ^* interessiert, die wir mit einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ beschreiben können.

Dabei sind dann L die Wörter, die die Eigenschaft haben und $L^c = \Sigma^* \setminus L$ die Wörter, die diese Eigenschaft nicht haben.

Jetzt ist die allgemeine Formulierung von Vorteil!

i. Primzahlen finden:

Entscheidungsproblem $(\Sigma_{\text{bool}}, L_p)$ wobei
 $L_p = \{x \in (\Sigma_{\text{bool}})^* \mid \text{Nummer}(x) \text{ ist prim}\}.$

ii. Syntaktisch korrekte Programme:

Entscheidungsproblem $(\Sigma_{\text{Tastatur}}, L_{C++})$ wobei
 $L_{C++} = \{x \in (\Sigma_{\text{Tastatur}})^* \mid x \text{ ist ein syntaktisch korrektes C++ Programm}\}.$

iii. Hamiltonkreise finden:

Entscheidungsproblem (Σ, HK) wobei $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ und
 $\text{HK} = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ kodiert einen Graphen, der einen Hamiltonkreis enthält.}\}$

Äquivalenzprobleme \subset Entscheidungsprobleme

Seien Σ und Γ zwei Alphabete.

- Wir sagen, dass ein Algorithmus A eine **Funktion (Transformation)** $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ **berechnet (realisiert)**, falls

$$A(x) = f(x) \text{ für alle } x \in \Sigma^*$$

- Sei $R \subseteq \Sigma^* \times \Gamma^*$ eine Relation in Σ^* und Γ^* . Ein Algorithmus A **berechnet** R (bzw. **löst das Relationsproblem** R), falls für jedes $x \in \Sigma^*$, für das ein $y \in \Gamma^*$ mit $(x, y) \in R$ existiert, gilt:

$$(x, A(x)) \in R$$

Optimierungsproblem

Ein **Optimierungsproblem** ist ein 6-Tupel $\mathcal{U} = (\Sigma_I, \Sigma_O, L, M, \text{cost}, \text{goal})$, wobei:

- (i) Σ_I ist ein Alphabet (genannt **Eingabealphabet**),
- (ii) Σ_O ist ein Alphabet (genannt **Ausgabealphabet**),
- (iii) $L \subseteq \Sigma_I^*$ ist die Sprache der **zulässigen Eingaben** (als Eingaben kommen nur Wörter in Frage, die eine sinnvolle Bedeutung haben). Ein $x \in L$ wird ein **Problemfall (Instanz)** von \mathcal{U} genannt.
- (iv) M ist eine Funktion von L nach $\mathcal{P}(\Sigma_O^*)$, und für jedes $x \in L$ ist $M(x)$ die **Menge der zulässigen Lösungen für** x ,
- (v) **cost** ist eine Funktion, **cost**: $\bigcup_{x \in L} (\mathcal{M}(x) \times \{x\}) \rightarrow \mathbb{R}^+$, genannt **Kostenfunktion**,
- (vi) **goal** $\in \{\text{Minimum}, \text{Maximum}\}$ ist das **Optimierungsziel**.

Eine zulässige Lösung $\alpha \in \mathcal{M}(x)$ heisst **optimal** für den Problemfall x des Optimierungsproblems \mathcal{U} , falls

$$\text{cost}(\alpha, x) = \mathbf{Opt}_{\mathcal{U}}(x) = \text{goal}\{\text{cost}(\beta, x) \mid \beta \in \mathcal{M}(x)\}.$$

Ein Algorithmus A **löst** \mathcal{U} , falls für jedes $x \in L$

- (i) $A(x) \in \mathcal{M}(x)$
- (ii) $\text{cost}(A(x), x) = \text{goal}\{\text{cost}(\beta, x) \mid \beta \in \mathcal{M}(x)\}.$

3 Kolmogorov Komplexität

3.1 Theorie

Algorithmen generieren Wörter

Sei Σ ein Alphabet und $x \in \Sigma^*$. Wir sagen, dass ein Algorithmus A das Wort x **generiert**, falls A für die Eingabe λ die Ausgabe x liefert.

Beispiel:

```

An:  begin
        for i = 1 to n;
            write(01);
        end

```

A_n generiert $(01)^n$.

Aufzählungsalgorithmus

Sei Σ ein Alphabet und sei $L \subseteq \Sigma^*$. A ist ein **Aufzählungsalgorithmus für L** , falls A für jede Eingabe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Wortfolge x_1, \dots, x_n ausgibt, wobei x_1, \dots, x_n die kanonisch n ersten Wörter in L sind.

Aufgabe 2.21

Beweisen Sie, dass eine Sprache L genau dann rekursiv ist, wenn ein Aufzählungsalgorithmus für L existiert.

Das **Entscheidungsproblem** (Σ, L) für ein gegebenes Alphabet Σ und eine gegebene Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist, für jedes $x \in \Sigma^*$ zu entscheiden, ob

$$x \in L \text{ oder } x \notin L.$$

Ein Algorithmus A **löst** das Entscheidungsproblem (Σ, L) , falls für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L, \\ 0, & \text{falls } x \notin L. \end{cases}$$

Wir sagen auch, dass A die Sprache L erkennt.

L rekursiv (\implies) existiert Aufzählungsalgorithmus:

Sei A ein Algorithmus, der L erkennt. Wir beschreiben nun einen Aufzählungsalgorithmus B konstruktiv.

Algorithm 1 $B(\Sigma, n)$

```

i ← 0
while i ≤ n do
  w ← kanonisch nächstes Wort über Σ*
  if A(w) = 1 then
    print(w)
    i ← i + 1
  end if
end while

```

Aufzählungsalgorithmus $B \implies L$ rekursiv:

Algorithm 2 $A(\Sigma, w)$

```

n ← |Σ||w|+1
L ← B(Σ, n)
if w ∈ L then
  print(1)
else
  print(0)
end if

```

Es gibt ein kleines Problem. B könnte unendlich lange laufen, falls $n > |L|$.

Es sollte nicht so schwierig sein, B zu modifizieren, dass es die Berechnung aufhört, falls es keine weiteren Wörter in L gibt.

Information messen Wir beschränken uns auf Σ_{bool}

*Beweis im Buch/Vorlesung***Ein zufälliges Wort**

Ein Wort $x \in (\Sigma_{\text{bool}})^*$ heisst **zufällig**, falls $K(x) \geq |x|$.

Eine Zahl n heisst **zufällig**, falls $K(n) = K(\text{Bin}(n)) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1$.

Jede Binär-Darstellung beginnt immer mit einer 1, deshalb können wir die Länge der Binär-Darstellung um 1 verkürzen.

Zufälligkeit hier bedeutet, dass ein Wort völlig unstrukturiert ist und sich nicht komprimieren lässt. Es hat nichts mit Wahrscheinlichkeit zu tun.

Satz 2.2

Sei L eine Sprache über Σ_{bool} . Sei für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, z_n das n -te Wort in L bezüglich der kanonischen Ordnung. Wenn ein Programm A_L existiert, das das Entscheidungsproblem $(\Sigma_{\text{bool}}, L)$ löst, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dass

$$K(z_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + c$$

wobei c eine von n unabhängige Konstante ist.

Beweisidee

Wir können aus A_L , ein Programm entwerfen, das das kanonisch n -te Wort generiert, indem wir in der kanonischen Reihenfolge alle Wörter $x \in (\Sigma_{\text{bool}})^*$ durchgehen und mit A_L entscheiden, ob $x \in L$. Dann können wir einen Counter c haben und den Prozess abbrechen, wenn der Counter $c = n$ wird und dann dieses Wort ausgeben.

Wir sehen, dass dieses Programm ausser der Eingabe n immer gleich ist. Sei die Länge dieses Programms c , dann können wir für das n -te Wort der Sprache L , z_n , die Kolmogorov-Komplexität auf n reduzieren, bzw:

$$K(z_n) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + c$$

■

Primzahlsatz

Für jede positive ganz Zahl n sei $\text{Prim}(n)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Prim}(n)}{n / \ln n} = 1$$

Nützliche Ungleichung

$$\ln n - \frac{3}{2} < \frac{n}{\text{Prim}(n)} < \ln n - \frac{1}{2}$$

für alle $n \geq 67$.

Lemma 2.6 - schwache Version des Primzahlsatzes

Sei n_1, n_2, n_3, \dots eine steigende unendliche Folge natürlicher Zahlen mit $K(n_i) \geq \lceil \log_2 n_i \rceil / 2$. Für jedes $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei q_i die grösste Primzahl, die die Zahl n_i teilt. Dann ist die Menge $Q = \{q_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ unendlich.

Beweis: Wir beweisen diese Aussage per Widerspruch:

Nehmen wir zum Widerspruch an, dass die Menge $Q = \{q_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ sei endlich.

Sei q_m die grösste Primzahl in Q . Dann können wir jede Zahl n_i eindeutig als

$$n_i = q_1^{r_{i,1}} \cdot q_2^{r_{i,2}} \cdot \dots \cdot q_m^{r_{i,m}}$$

für irgendwelche $r_{i,1}, r_{i,2}, \dots, r_{i,m} \in \mathbb{N}$ darstellen. Sei c die binäre Länge eines Programms, dass diese $r_{i,j}$ als Eingaben nimmt und n_i erzeugt (A ist für alle $i \in \mathbb{N}$ bis auf die Eingaben $r_{i,1}, \dots, r_{i,m}$ gleich).

Dann gilt:

$$K(n_i) \leq c + 8 \cdot (\lceil \log_2(r_{i,1} + 1) \rceil + \lceil \log_2(r_{i,2} + 1) \rceil + \dots + \lceil \log_2(r_{i,m} + 1) \rceil)$$

Die multiplikative Konstante 8 kommt daher, dass wir für die Zahlen $r_{i,1}, r_{i,2}, \dots, r_{i,m}$ dieselbe Kodierung, wie für den Rest des Programmes verwenden (z.B. ASCII-Kodierung), damit ihre Darstellungen eindeutig voneinander getrennt werden können. Weil $r_{i,j} \leq \log_2 n_i, \forall j \in \{1, \dots, m\}$ erhalten wir

$$K(n_i) \leq c + 8m \cdot \lceil \log_2(\log_2 n_i + 1) \rceil, \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Weil m und c Konstanten unabhängig von i sind, kann

$$\lceil \log_2 n_i \rceil / 2 \leq K(n_i) \leq c + 8m \cdot \lceil \log_2(\log_2 n_i + 1) \rceil$$

$$\lceil \log_2 n_i \rceil / 2 \leq c + 8m \cdot \lceil \log_2(\log_2 n_i + 1) \rceil$$

nur für endlich viele $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gelten.

Dies ist ein Widerspruch!

Folglich ist die Menge Q unendlich.

■

3.2 How To Kolmogorov

Aufgabentyp 1

Sei $w_n = (010)^{3^{2n^3}} \in \{0,1\}^*$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Gib eine möglichst gute obere Schranke für die Kolmogorov-Komplexität von w_n an, gemessen in der Länge von w_n .

Lösung Typ 1

Wir zeigen ein Programm, dass n als Eingabe nimmt und w_n druckt:

```

Wn:      begin
           M := n;
           M := 2 × M × M × M;
           J := 1;
           for I = 1 to M
             J := J × 3;
           for I = 1 to J;
             write(010);
           end

```

Der einzige variable Teil dieses Algorithmus ist n . Der restliche Code ist von konstanter Länge. Die binäre Länge dieses Programms kann von oben durch

$$\lceil \log_2(n + 1) \rceil + c$$

beschränkt werden, für eine Konstante c .

Somit folgt

$$K(w_n) \leq \log_2(n) + c'$$

Wir berechnen die Länge von w_n als $|w_n| = |010| \cdot 3^{2n^3} = 3^{2n^3+1}$.

Mit ein wenig umrechnen erhalten wir

$$n = \sqrt[3]{\frac{\log_3 |w_n| - 1}{2}}$$

und die obere Schranke

$$K(w_n) \leq \log_2 \left(\sqrt[3]{\frac{\log_3 |w_n| - 1}{2}} \right) + c' \leq \log_2 \log_3 |w_n| + c''$$

Aufgabentyp 2

Geben Sie eine unendliche Folge von Wörtern $y_1 < y_2 < \dots$ an, so dass eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $i \geq 1$

$$K(y_i) \leq \log_2 \log_2 \log_3 \log_2(|y_i|) + c$$

Lösung Typ 2

Wir definieren die Folge y_1, y_2, \dots mit $y_i = 0^{2^{3^{2^i}}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da $|y_i| < |y_{i+1}|$ folgt die geforderte Ordnung. Es gilt

$$i = \log_2 \log_3 \log_2 |y_i| \text{ für } i \geq 1$$

Wir zeigen ein Programm, dass i als Eingabe nimmt und y_i druckt:

```
begin
  M := i;
  M := 2 ^ ( 3 ^ ( 2 ^ M ) );
  for I = 1 to M;
    write ( 0 1 0 );
  end
```

Das \wedge für die Exponentiation ist nicht Teil der originalen Pascal Syntax, aber wir verwenden es um unser Programm lesbarer zu machen.

Der einzige variable Teil dieses Programms ist das i . Der Rest hat konstante Länge. Demnach kann die Länge dieses Programms für eine Konstante c' durch

$$\lceil \log_2(i+1) \rceil + c'$$

von oben beschränkt werden.

Somit folgt

$$\begin{aligned} K(y_i) &\leq \log_2(i) + c \\ &\leq \log_2 \log_2 \log_3 \log_2 |y_i| + c \end{aligned}$$

für eine Konstante c .

Aufgabentyp 3

Sei $M = \{7^i \mid i \in \mathbb{N}, i \leq 2^n - 1\}$. Beweisen Sie, dass mindestens sieben Achtel der Zahlen in M Kolmogorov-Komplexität von mindestens $n - 3$ haben.

Lösung Typ 3

Wir zeigen, dass höchstens $\frac{1}{8}$ der Zahlen $x \in M$ eine Kolmogorov-Komplexität $K(x) \leq n - 4$ haben.

Nehmen wir zum Widerspruch an, dass M mehr als $\frac{1}{8}|M|$ Zahlen x enthält, mit $K(x) \leq n - 4$.

Die Programme, die diese Wörter generieren, müssen paarweise verschieden sein, da die Wörter paarweise verschieden sind.

Es gibt aber höchstens

$$\sum_{k=0}^{n-4} 2^k = 2^{n-3} - 1 < \frac{1}{8}|M|$$

Bitstrings mit Länge $\leq n - 4$. **Widerspruch.**

4 Endliche Automaten - Einführung

4.1 Erster Ansatz zur Modellierung von Algorithmen

Ein (deterministischer) **endlicher Automat (EA)** ist ein Quintupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei

- (i) Q eine endliche Menge von **Zuständen** ist,
- (ii) Σ ein Alphabet, genannt **Eingabealphabet**, ist,
- (iii) $q_0 \in Q$ der Anfangszustand ist,
- (iv) $F \subseteq Q$ die **Menge der akzeptierenden Zustände** ist und
- (v) $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ die **Übergangsfunktion** ist.

Konfigurationen

Eine **Konfiguration** von M ist ein Tupel $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$.

- " M befindet sich in einer Konfiguration $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$, wenn M im Zustand q ist und noch das Suffix w eines Eingabewortes lesen soll."
- Die Konfiguration $(q_0, x) \in \{q_0\} \times \Sigma^*$ heisst die **Startkonfiguration von M auf x** .
- Jede Konfiguration aus $Q \times \{\lambda\}$ nennt man **Endkonfiguration**.

Ein **Schritt** von M ist eine Relation (auf Konfigurationen) $\mid_M \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$, definiert durch

$$(q, w) \mid_M (p, x) \iff w = ax, a \in \Sigma \text{ und } \delta(q, a) = p.$$

Berechnungen

Eine **Berechnung** C von M ist eine endliche Folge $C = C_0, C_1, \dots, C_n$ von Konfigurationen, so dass

$$C_i \mid_M C_{i+1} \text{ für alle } 0 \leq i \leq n - 1.$$

C ist die **Berechnung von M auf einer Eingabe $x \in \Sigma^*$** , falls $C_0 = (q_0, x)$ und $C_n \in Q \times \{\lambda\}$ eine Endkonfiguration ist.

Falls $C_n \in F \times \{\lambda\}$, sagen wir, dass C eine **akzeptierende Berechnung** von M auf x ist, und dass M das Wort x **akzeptiert**.

Falls $C_n \in (Q \setminus F) \times \{\lambda\}$, sagen wir, dass C eine **verwerfende Berechnung** von M auf x ist, und dass M **das Wort x verwirft (nicht akzeptiert)**.

Transitivität von \mid_M^* und δ

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein endlicher Automat. Wir definieren \mid_M^* als die reflexive und transitive Hülle der Schrittrelation \mid_M von M ; daher ist

$$(q, w) \mid_M^* (p, u) \iff (q = p \wedge w = u) \text{ oder } \exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

so dass

(i) $w = a_1 a_2 \dots a_k u, a_i \in \Sigma$ für $i = 1, 2, \dots, k$, und

(ii) $\exists r_1, r_2, \dots, r_{k-1} \in Q$, so dass

$$(q, w) \mid_M (r_1, a_2 \dots a_k u) \mid_M \dots \mid_M (r_{k-1}, a_k u) \mid_M (p, u)$$

Wir definieren $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ durch:

(i) $\hat{\delta}(q, \lambda) = q$ für alle $q \in Q$ und

(ii) $\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$ für alle $a \in \Sigma, w \in \Sigma^*, q \in Q$.

$$\hat{\delta}(q, w) = p \iff (q, w) \mid_M^* (p, \lambda)$$

4.2 Reguläre Sprachen

Die **von M akzeptierte Sprache** $L(M)$ ist definiert als

$$\begin{aligned} L(M) &= \{w \in \Sigma^* \mid \text{Berechnung von } M \text{ auf } w \text{ endet in } (p, \lambda) \in F \times \{\lambda\}\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \mid_M^* (p, \lambda) \wedge p \in F\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_{\text{EA}} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein EA}\}$ ist die Klasse der Sprachen, die von endlichen Automaten akzeptiert werden.

\mathcal{L}_{EA} bezeichnet man auch als die **Klasse der regulären Sprachen**, und jede Sprache $L \in \mathcal{L}_{\text{EA}}$ wird **regulär** genannt.

Klassen für alle Zustände im Endlichen Automaten

Für alle $p \in Q$ definieren wir die Klasse

$$\begin{aligned} \mathbf{Kl}[p] &= \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) = p\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \mid_M^* (p, \lambda)\} \end{aligned}$$

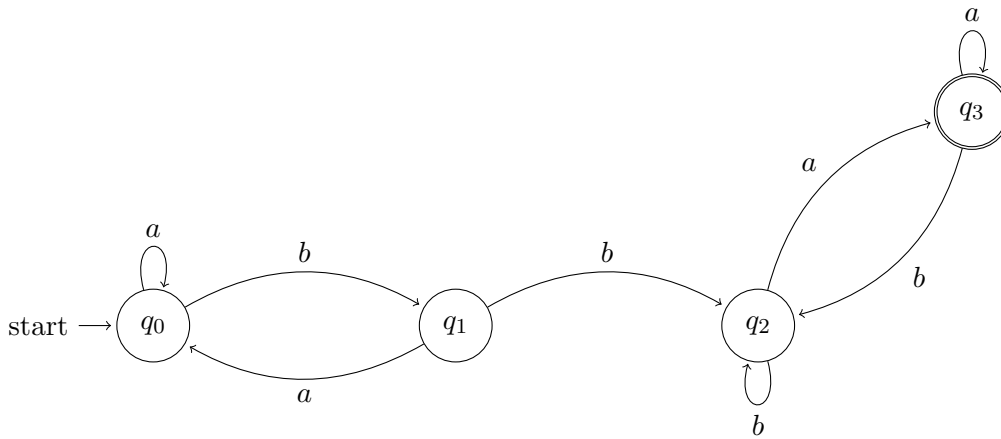
Wir bemerken dann

$$\begin{aligned} \bigcup_{q \in Q} \mathbf{Kl}[q] &= \Sigma^* \\ \mathbf{Kl}[q] \cap \mathbf{Kl}[p] &= \emptyset, \forall p, q \in Q, p \neq q \\ L(M) &= \bigcup_{q \in F} \mathbf{Kl}[q] \end{aligned}$$

EA Konstruktion - Beispielaufgabe

Entwerfen sie für folgende Sprache einen Endlichen Automaten und geben Sie eine Beschreibung von $\text{Kl}[q]$ für jeden Zustand $q \in Q$.

$$L_1 = \{xbbya \in \{a, b\}^* \mid x, y \in \{a, b\}^*\}$$



Wir beschreiben nun die Klassen für die Zustände q_0, q_1, q_2, q_3 :

$\text{Kl}[q_0] = \{wa \in \{a, b\}^* \mid \text{Das Wort } w \text{ enthält nicht die Teilfolge } bb\} \cup \{\lambda\}$

$\text{Kl}[q_1] = \{wb \in \{a, b\}^* \mid \text{Das Wort } w \text{ enthält nicht die Teilfolge } bb\}$

$\text{Kl}[q_3] = \{wa \in \{a, b\}^* \mid \text{Das Wort } w \text{ enthält die Teilfolge } bb\} = L_1$

$\text{Kl}[q_2] = \{a, b\}^* - (\text{Kl}[q_0] \cup \text{Kl}[q_1] \cup \text{Kl}[q_3])$

4.3 Produktautomaten - Simulationen

Lemma 3.2

Sei Σ ein Alphabet und seien $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$ und $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$ zwei EA. Für jede Mengenoperation $\odot \in \{\cup, \cap, -\}$ existiert ein EA M , so dass

$$L(M) = L(M_1) \odot L(M_2).$$

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F_\odot)$, wobei

- (i) $Q = Q_1 \times Q_2$
- (ii) $q_0 = (q_{01}, q_{02})$
- (iii) für alle $q \in Q_1, p \in Q_2$ und $a \in \Sigma$, $\delta((q, p), a) = (\delta_1(q, a), \delta_2(p, a))$,
- (iv) falls $\odot = \cup$, dann ist $F = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$
 falls $\odot = \cap$, dann ist $F = F_1 \times F_2$, und
 falls $\odot = -$, dann ist $F = F_1 \times (Q_2 - F_2)$.

Produktautomat - Beispielaufgabe

Verwenden Sie die Methode des modularen Entwurfs (Konstruktion eines Produktautomaten), um einen endlichen Automaten (in Diagrammdarstellung) für die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 2 \text{ oder } w = ya\}$$

zu entwerfen. Zeichnen Sie auch jeden der Teilautomaten und geben Sie für die Teilautomaten für jeden Zustand q die Klasse $\text{Kl}[q]$ an.

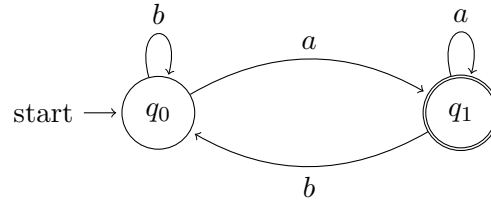
Wir teilen L wie folgt auf:

$L = L_1 \cup L_2$ wobei gilt:

$$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = ya\}$$

$$L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 2\}$$

Zuerst zeichnen wir die 2 einzelnen Teilautomaten und geben für jeden Zustand q bzw. p die Klasse $\text{Kl}[q]$ respektive $\text{Kl}[p]$ an:



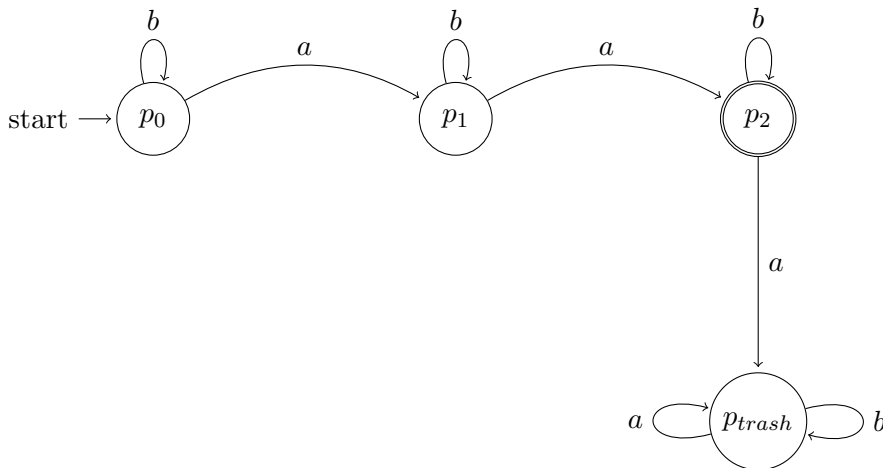
erster Teilautomat: $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = ya\}$

Wir beschreiben nun die Zustände für die Klassen q_0 und q_1 :

$$\text{Kl}[q_0] = \{yb \mid y \in \{a, b\}^*\} \cup \{\lambda\}$$

$$\text{Kl}[q_1] = \{ya \mid y \in \{a, b\}^*\}$$

zweiter Teilautomat: $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 2\}$



Wir beschreiben nun die Zustände für die Klassen $p_0, p_1, p_2, ptrash$: $\text{Kl}[p_0] = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 0\}$

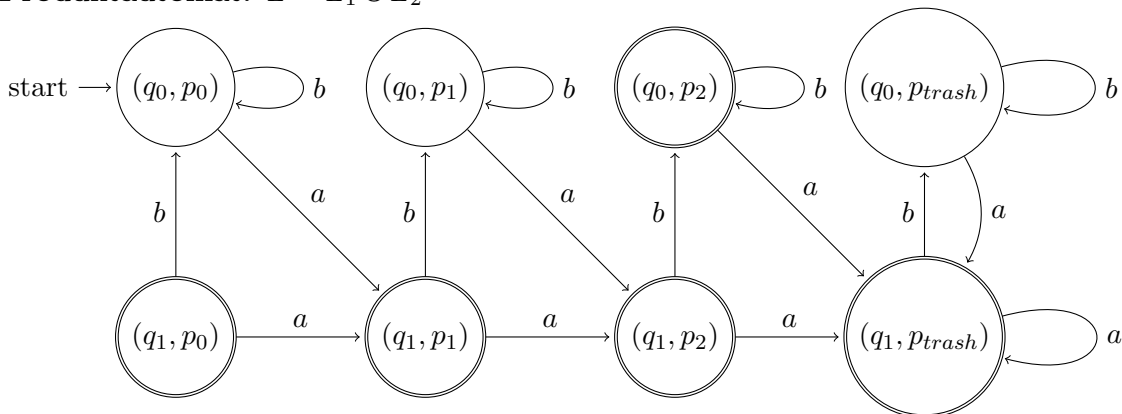
$$\text{Kl}[p_1] = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 1\}$$

$$\text{Kl}[p_2] = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 2\}$$

$$\text{Kl}[ptrash] = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a > 2\}$$

Zum Schluss kombinieren wir diese Teilautomaten zu einem Produktautomaten:

Produktautomat: $L = L_1 \cup L_2$



5 Beweise für Nichtregularität

5.1 Einführung und grundlegende Tipps

- i. Wichtiges Unterkapitel. Kommt fast garantiert am Midterm.
- ii. Um $L \notin \mathcal{L}_{\text{EA}}$ zu zeigen, genügt es zu beweisen, dass es keinen EA gibt, der L akzeptiert.
- iii. Nichtexistenz ist generell sehr schwer zu beweisen, da aber die Klasse der endlichen Automaten sehr eingeschränkt ist, ist dies nicht so schwierig.
- iv. Wir führen Widerspruchsbeweise.
- v. Es gibt 3 Arten Nichtregularitätsbeweise zu führen (Lemma 3.3, Pumping-Lemma und Kolmogorov-Komplexität).
- vi. Ihr müsst alle 3 Methoden können. Ist aber halb so wild.

5.2 Theorie für Nichtregularitätsbeweise

5.2.1 Lemma 3.3 Methode

Lemma 3.3

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ ein EA. Seien $x, y \in \Sigma^*$, $x \neq y$, so dass

$$\hat{\delta}_A(q_0, x) = p = \hat{\delta}_A(q_0, y)$$

für ein $p \in Q$ (also $x, y \in \text{Kl}[p]$). Dann existiert für jedes $z \in \Sigma^*$ ein $r \in Q$, so dass xz und $yz \in \text{Kl}[r]$, also gilt insbesondere

$$xz \in L(A) \iff yz \in L(A)$$

Beweis:

Aus der Existenz der Berechnungen

$(q_0, x) \xrightarrow{*}_A (p, \lambda)$ und $(q_0, y) \xrightarrow{*}_A (p, \lambda)$ von A folgt die Existenz der Berechnungen auf xz und yz :

$(q_0, xz) \xrightarrow{*}_A (p, z)$ und $(q_0, yz) \xrightarrow{*}_A (p, z)$ für alle $z \in \Sigma^*$.

Wenn $r = \hat{\delta}_A(p, z)$ ist, dann ist die Berechnung von A auf xz und yz :

$(q_0, xz) \xrightarrow{*}_A (p, z) \xrightarrow{*}_A (r, \lambda)$ und $(q_0, yz) \xrightarrow{*}_A (p, z) \xrightarrow{*}_A (r, \lambda)$.

Wenn $r \in F$, dann sind beide Wörter xz und yz in $L(A)$. Falls $r \notin F$, dann sind $xz, yz \notin L(A)$. ■

Bemerkungen

- Von den 3 vorgestellten Methoden, ist diese Methode die einzige, die (unter der richtigen Anwendung) garantiert für jede nichtreguläre Sprache funktioniert.
- Um die Nichtregularität von L zu beweisen, verwenden wir die Endlichkeit von Q und das Pigeonhole-Principle.

Beispielaufgabe - Lemma 3.3

Betrachten wir mal eine Beispielaufgabe mit dieser Methode am Paradebeispiel

$$L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Nehmen wir zum Widerspruch an L sei regulär.

Dann existiert ein EA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$.

Wir betrachten die Wörter $0^1, \dots, 0^{|Q|+1}$. Per Pigeonhole-Principle existiert O.B.d.A. $i < j$, so dass

$$\hat{\delta}(q_0, 0^i) = \hat{\delta}(q_0, 0^j)$$

Nach Lemma 3.3 gilt

$$0^i z \in L \iff 0^j z \in L$$

für alle $z \in (\Sigma_{\text{bool}})^*$. Dies führt aber zu einem Widerspruch, weil für $z = 1^i$ das Wort $0^i 1^i \in L$ aber $0^j 1^i \notin L$.

5.2.2 Pumping Lemma Methode

Pumping Lemma

Sei L regulär. Dann existiert eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile x, y und z zerlegen lässt, das heisst $w = yxz$, wobei

- (i) $|yx| \leq n_0$
- (ii) $|x| \geq 1$
- (iii) entweder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$.

Beweis

Sei $L \in \Sigma^*$ regulär. Dann existiert ein EA $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$, so dass $L(A) = L$.

Sei $n_0 = |Q|$ und $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n_0$. Dann ist $w = w_1 w_2 \dots w_{n_0} u$, wobei $w_i \in \Sigma$ für $i = 1, \dots, n_0$ und $u \in \Sigma^*$. Betrachten wir die Berechnung auf $w_1 w_2 \dots w_{n_0}$:

$$(q_0, w_1 w_2 w_3 \dots w_{n_0}) \xrightarrow{A} (q_1, w_2 w_3 \dots w_{n_0}) \xrightarrow{A} \dots \xrightarrow{A} (q_{n_0-1}, w_{n_0}) \xrightarrow{A} (q_{n_0}, \lambda)$$

In dieser Berechnung kommen $n_0 + 1$ Zustände q_0, q_1, \dots, q_{n_0} vor. Da $|Q| = n_0$, existieren $i, j \in \{0, 1, \dots, n_0\}, i < j$, so dass $q_i = q_j$. Daher haben wir in der Berechnung die Konfigurationen

$$(q_0, w_1 w_2 w_3 \dots w_{n_0}) \xrightarrow{A}^* (q_i, w_{i+1} w_{i+2} \dots w_{n_0}) \xrightarrow{A}^* (q_i, w_{j+1} \dots w_{n_0}) \xrightarrow{A}^* (q_{n_0}, \lambda)$$

Dies impliziert

$$(q_i, w_{i+1} w_{i+2} \dots w_j) \xrightarrow{A}^* (q_i, \lambda) \quad (1)$$

Wir setzen nun $y = w_1 \dots w_i$, $x = w_{i+1} \dots w_j$ und $z = w_{j+1} \dots w_{n_0} u$, so dass $w = yxz$.

Wir überprüfen nun die Eigenschaften (i), (ii) und (iii):

- (i) $yx = w_1 \dots w_i w_{i+1} \dots w_j$ und daher $|yx| = j \leq n_0$.
- (ii) Da $|x| \geq j - i$ und $i < j$, ist $|x| \geq 1$.
- (iii) (1) impliziert $(q_i, x^k) \xrightarrow{A}^* (q_i, \lambda)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$(q_0, yx^k z) \xrightarrow{A}^* (q_i, x^k z) \xrightarrow{A}^* (q_i, z) \xrightarrow{A}^* (\hat{\delta}_A(q_i, z), \lambda)$$

Wir sehen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Berechnungen im gleichen Zustand $q_{\text{end}} = \hat{\delta}_A(q_i, z)$ enden. Falls also $q_{\text{end}} \in F$, akzeptiert A alle Wörter aus $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\}$. Falls $q_{\text{end}} \notin F$, dann akzeptiert A kein Wort aus $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\}$.



Beispielaufgabe - Pumping Lemma

Versuchen wir zu beweisen, dass

$$L_2 = \{wabw^{\mathbf{R}} \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

nicht regulär ist.

Wir nehmen zum Widerspruch an, dass L_2 regulär ist.

Das Pumping-Lemma (Lemma 3.4) besagt, dass dann eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass sich jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile y , x , und z zerlegen lässt. ($\implies w = yxz$). Wobei folgendes gelten muss:

- (i) $|yx| \leq n_0$
- (ii) $|x| \geq 1$
- (iii) **entweder** $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L_2$ **oder** $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L_2 = \emptyset$

Wir wählen $w = a^{n_0}aba^{n_0}$. Es ist leicht zu sehen dass $|w| = 2n_0 + 2 \geq n_0$.

Da nach (i), $|yx| \leq n_0$ gelten muss, haben wir $y = a^l$ und $x = a^m$ für beliebige $l, m \in \mathbb{N}, l + m \leq n_0$. Somit gilt $z = a^{n_0-(l+m)}aba^{n_0}$

Nach (ii) ist $m \geq 1$.

Wir haben also $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} = \{a^{n_0-m+km}aba^{n_0} \mid k \in \mathbb{N}\}$

Da $yx^1z = a^{n_0}aba^{n_0}$ und

$a^{n_0}aba^{n_0} \in \{a^{n_0-m+km}aba^{n_0} \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L_2$ gilt, folgt

$$\{a^{n_0-m+km}aba^{n_0} \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L_2 \neq \emptyset$$

Wenn wir nun $k = 0$ wählen und uns daran erinnern, dass $m \geq 1$, erhalten wir folgendes

$$\implies yx^0z = yz = a^{n_0-m}aba^{n_0} \notin L_2$$

Daraus folgt,

$$\{a^{n_0-m+km}aba^{n_0} \mid k \in \mathbb{N}\} \not\subseteq L_2$$

Somit gilt (iii) nicht.

Dies ist ein Widerspruch! Somit haben wir gezeigt, dass die Sprache $L_2 = \{wabw^{\mathbf{R}} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ nicht regulär ist.

5.2.3 Kolmogorov Methode

Satz 3.1

Sei $L \subseteq (\Sigma_{\text{bool}})^*$ eine reguläre Sprache. Sei $L_x = \{y \in (\Sigma_{\text{bool}})^* \mid xy \in L\}$ für jedes $x \in (\Sigma_{\text{bool}})^*$. Dann existiert eine Konstante **const**, so dass für alle $x, y \in (\Sigma_{\text{bool}})^*$

$$K(y) \leq \lceil \log_2(n+1) \rceil + \mathbf{const},$$

falls y das n -te Wort in der Sprache L_x ist.

Wie wir sehen werden, beruht der Nichtreguläritätsbeweis darauf, dass die Differenz von $|w_{n+1}| - |w_n|$ für kanonische Wörter $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ beliebig gross werden kann.

Beispielaufgabe - Kolmogorov Methode

Verwenden Sie die Methode der Kolmogorov-Komplexität, um zu zeigen, dass die Sprache

$$L_1 = \{0^{n^2 \cdot 2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Angenommen L_1 sei regulär.

Wir betrachten

$$L_{0^{m^2 \cdot 2^{m+1}}} = \{y \mid 0^{m^2 \cdot 2^{m+1}} y \in L_1\}.$$

Da

$$\begin{aligned} (m+1)^2 \cdot 2^{m+1} &= (m^2 + 2m + 1) \cdot 2^{m+1} \\ &= m^2 \cdot 2^m + m^2 \cdot 2^m + (2m + 1) \cdot 2^{m+1} \\ &= m^2 \cdot 2^m + (m^2 + 4m + 2) \cdot 2^m \end{aligned}$$

ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ das Wort $y_1 = 0^{(m^2 + 4m + 2) \cdot 2^m - 1}$ das kanonisch erste Wort der Sprache $L_{0^{m^2 \cdot 2^{m+1}}}$.

Nach Satz 3.1 existiert eine Konstante c , unabhängig von m , so dass

$$K(y_1) \leq \lceil \log_2(1 + 1) \rceil + c = 1 + c.$$

Die Anzahl aller Programme, deren Länge kleiner oder gleich $1 + c$ sind, ist endlich.

Da es aber unendlich viel Wörter der Form $0^{(m^2 + 4m + 2) \cdot 2^m - 1}$ gibt, ist dies ein Widerspruch.

Demzufolge ist L_1 nicht regulär. ■

5.3 Weitere Aufgaben

Beispielaufgabe 1 - Direkte Methode (Lemma 3.3)

Verwende eine direkte Argumentation über den Automaten (unter Verwendung von Lemma 3.3), um zu zeigen, dass die Sprache

$$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |u|_0 \leq |u|_1 \text{ für alle Präfixe } u \text{ von } w\}$$

nicht regulär ist.

Angenommen L_2 sei regulär.

Dann existiert ein Endlicher Automat $A = (Q, \{0, 1\}, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L_2$.

Wir betrachten die Wörter

$$1, 1^2, \dots, 1^{|Q|+1}$$

Per Pigeonhole-Principle existiert $i, j \in \{1, \dots, |Q| + 1\}$ mit $i < j$, so dass

$$\hat{\delta}(q_0, 1^i) = \hat{\delta}(q_0, 1^j).$$

Nach Lemma 3.3 gilt nun für alle $z \in \{0, 1\}^*$

$$1^i z \in L_2 \iff 1^j z \in L_2$$

Sei $z = 0^j$. Wir haben dann also

$$1^i z = 1^i 0^j \notin L_2,$$

da $i < j$ und ein Wort auch ein Präfix von sich selbst ist (Die Bedingung $|1^i 0^j|_0 \leq |1^i 0^j|_1$ wird verletzt). Aber wir haben auch

$$1^j z = 1^j 0^j \in L_2,$$

was zu einem Widerspruch führt. Also ist die Annahme falsch und L_2 nicht regulär. ■

Einschub - Sprachen mit Einsymbolalphabet

Angenommen es handelt sich bei $L \subseteq \Sigma^*$ um eine Sprache über einem unären Alphabet ($|\Sigma| = 1, \Sigma = \{x\}$).

Dann gilt:

$$\forall w \in \Sigma^* : w = x^{|w|}$$

Insbesondere gibt es für jede Länge nur ein Wort.

Sei die Folge $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ kanonisch geordnet, so dass $w_i \in L$ (Wenn L endlich betrachten wir nur endlich viele Wörter der Folge).

Durch das gilt folgendes

$$\forall w \in \Sigma^*. \forall k \in \mathbb{N}. |w_k| < |w| < |w_{k+1}| \implies w \notin L$$

Beispielaufgabe 2 - Pumping Lemma

Zeigen Sie, dass

$$L = \{0^{n \cdot \lceil \sqrt{n} \rceil} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Angenommen $L = \{0^{0 \cdot \lceil \sqrt{0} \rceil}, 0^{1 \cdot \lceil \sqrt{1} \rceil}, 0^{2 \cdot \lceil \sqrt{2} \rceil}, \dots\}$ sei regulär.

Seien w_0, w_1, w_2, \dots die Wörter von L in kanonischer Reihenfolge. Nach dem Pumping Lemma gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, dass die Bedingungen (i)-(iii) erfüllt sind.

Wir wählen $w = w_{n_0^2} = 0^{n_0^2 \lceil \sqrt{n_0^2} \rceil} \in L$.

Es ist leicht zu sehen das $|w| \geq n_0$ und folglich existiert eine Aufteilung $w = yxz$ ($y = 0^l$, $x = 0^m$ und $z = 0^{n_0^2 \lceil \sqrt{n_0^2} \rceil - l - m}$), die (i)-(iii) erfüllt.

Da nach (i) $|yx| = l + m \leq n_0$, folgt $|x| = m \leq n_0$.

Aus (ii) folgt $|x| = m \geq 1$.

Wegen $|yx^2z| = |yxz| + |x|$ gilt also $|yxz| < |yx^2z| \leq |yxz| + n_0$.

Das nächste Wort in L nach $w_{n_0^2}$ ist $w_{n_0^2+1}$ und es gilt

$$\begin{aligned} |w_{n_0^2+1}| - |w_{n_0^2}| &= (n_0^2 + 1) \cdot \lceil \sqrt{n_0^2 + 1} \rceil - n_0^2 \cdot \lceil \sqrt{n_0^2} \rceil \\ &= (n_0^2 + 1) \cdot \lceil \sqrt{n_0^2 + 1} \rceil - n_0^2 \cdot n_0 \\ &> (n_0^2 + 1) \cdot n_0 - n_0^3 \\ &= n_0 \end{aligned}$$

Die strikte Ungleichung gilt da $n_0 \in \mathbb{N}$ und $n_0 = \lceil \sqrt{n_0^2} \rceil < \sqrt{n_0^2 + 1} \leq \lceil \sqrt{n_0^2 + 1} \rceil$.

$$\implies |w_{n_0^2+1}| \geq |w_{n_0^2}| + (n_0 + 1)$$

Somit gilt

$$|w_{n_0^2}| < |yx^2z| < |w_{n_0^2+1}|$$

Daraus folgt $yx^2z \notin L$, während $yxz \in L$, in Widerspruch zu (iii). ■

Beispielaufgabe 3 - Kolmogorov Methode

Zeigen Sie, dass

$$L = \{0^{n \cdot \lceil \sqrt{n} \rceil} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Widerspruchsannahme: Sei L regulär.

Wir betrachten

$$L_{0^{m \cdot \lceil \sqrt{m} \rceil + 1}} = \{y \in \Sigma^* \mid 0^{m \cdot \lceil \sqrt{m} \rceil + 1} y \in L\}$$

Dann ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ das Wort

$$y_1 = 0^{(m+1) \cdot \lceil \sqrt{m+1} \rceil - (m \cdot \lceil \sqrt{m} \rceil + 1)}$$

das kanonisch erste Wort der Sprache $L_{0^{m \cdot \lceil \sqrt{m} \rceil + 1}}$.

Nach Satz 3.1 existiert eine Konstante c , so dass gilt

$$K(y_1) \leq \lceil \log_2(1 + 1) \rceil + c = 1 + c$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Da die Länge von $|y_1|$

$$\begin{aligned} |y_1| &= (m+1) \cdot \lceil \sqrt{m+1} \rceil - (m \cdot \lceil \sqrt{m} \rceil + 1) \\ &\geq (m+1) \cdot \lceil \sqrt{m} \rceil - m \cdot \lceil \sqrt{m} \rceil - 1 \\ &= \lceil \sqrt{m} \rceil - 1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

beliebig gross werden kann, gibt es unendlich viele Wörter von dieser Form.

Dies ist ein Widerspruch, da es nur endlich viele Programme der Länge maximal $1 + c$ geben kann. ■

6 Nichtdeterministische Endliche Automaten

6.1 Definitionen

Definition NEA

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)** ist ein Quintupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Dabei ist

- (i) Q eine endliche Menge, **Zustandsmenge** genannt,
- (ii) Σ ein Alphabet, **Eingabealphabet** genannt,
- (iii) $q_0 \in Q$ der **Anfangszustand**,
- (iv) $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände** und
- (v) δ eine Funktion von $Q \times \Sigma$ nach $\mathcal{P}(Q)$, **Übergangsfunktion** genannt.

Ein NEA kann zu einem Zustand q und einem gelesenen Zeichen a mehrere oder gar keinen Nachfolgezustand haben.

Konfigurationen für NEAs

Eine **Konfiguration** von M ist ein Tupel $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$.

- "M befindet sich in einer Konfiguration $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$, wenn M im Zustand q ist und noch das Suffix w eines Eingabewortes lesen soll."

- Die Konfiguration $(q_0, x) \in \{q_0\} \times \Sigma^*$ ist die **Startkonfiguration für das Wort** x .

Ein **Schritt** von M ist eine Relation (auf Konfigurationen) $\mid_M \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$, definiert durch

$$(q, w) \mid_M (p, x) \iff w = ax, a \in \Sigma \text{ und } p \in \delta(q, a)$$

Berechnungen für NEAs

Eine **Berechnung von M** ist eine endliche Folge C_1, \dots, C_k von Konfigurationen, so dass

$$C_i \mid_M C_{i+1} \text{ für alle } 1 \leq i \leq k.$$

Eine **Berechnung von M auf x** ist eine Berechnung $C = C_0, \dots, C_m$, wobei $C_0 = (q_0, x)$ und **entweder** $C_m \in F \times \{\lambda\}$ **oder** $C_m = (q, ay)$ für ein $a \in \Sigma, y \in \Sigma^*$ und $q \in Q$, so dass $\delta(q, a) = \emptyset$.

Falls $C_m \in F \times \{\lambda\}$, sagen wir, dass C eine **akzeptierende Berechnung** von M auf x ist, und dass M **das Wort** x **akzeptiert**.

Die Relation \mid_M^* ist die reflexive und transitive Hülle von \mid_M , genau wie bei einem EA.

Wir definieren

$$\mathbf{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \mid_M^* (p, \lambda) \text{ für ein } p \in F\}$$

als die **von M akzeptierte Sprache**.

Zu der Übergangsfunktion δ definieren wir die Funktion $\hat{\delta} : (Q \times \Sigma^*) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ wie folgt:

- (i) $\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$ für alle $q \in Q$
- (ii) $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{r \in \delta(q, w)} \delta(r, a)$ für alle $q \in Q, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$.

Repetition Pumping Lemma - Aufgabe mit Case Distinction (12.b)

Wir zeigen per Pumping Lemma, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } ab \text{ gleich oft wie das Teilwort } ba\}$$

nicht regulär ist.

Zur Erinnerung:

Pumping Lemma

Sei L regulär. Dann existiert eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile x, y und z zerlegen lässt, das heisst $w = xyz$, wobei

- (i) $|yx| \leq n_0$
- (ii) $|x| \geq 1$
- (iii) entweder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$.

Lösung

Sei L regulär.

Nach dem Pumping Lemma existiert eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort w mit $|w| \geq n_0$ die Bedingung des PL erfüllt.

Sei $w = (abc)^{n_0}(bac)^{n_0}$. Offensichtlich gilt $|w| \geq n_0$. Nach dem PL existiert eine Zerlegung $w = xyz$, die (i), (ii) und (iii) erfüllt.

Da yxz die Bedingung (i) erfüllt, gilt $|yx| \leq n_0$. Insbesondere folgt daraus, dass x komplett in der ersten Hälfte (i.e. $(abc)^{n_0}$) enthalten ist.

Aus (ii) folgt weiter, dass x mindestens ein Buchstaben enthält.

Case Distinction

I. Case $x = c$

In diesem Fall enthält $yx^0z = yz$ das Teilwort ba einmal mehr als ab .

Somit gilt in diesem Fall $yx^0z \notin L$.

II. Case x enthält mindestens ein a oder b

Wir betrachten $yx^0z = yz$. In diesem Fall bleibt die Anzahl der Teilwörter ba gleich oder erhöht sich. Da aber die Anzahl der Teilwörter ab um mindestens 1 kleiner wird, gilt $yx^0z \notin L$.

Da die Case Distinction alle Fälle abdeckt folgt für die Zerlegung $yx^0z \notin L$. Aus $yxz \in L$ ergibt sich somit ein Widerspruch.

Demnach ist die Annahme falsch und L nicht regulär.



NEA - Beispiel aus der Vorlesung

Wir betrachten folgenden NEA $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma_{\text{bool}}, \delta, q_0, \{q_2\})$

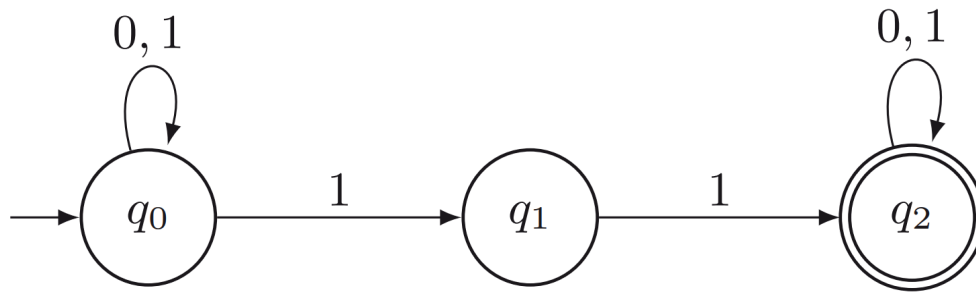


Figure 1: Abb. 3.15 aus dem Buch

Berechnungsbaum

Für ein Wort $x \in (\Sigma_{\text{bool}})^*$ ist ein Berechnungsbaum $\mathcal{B}_M(x)$ nützlich, um zu erkennen, ob $x \in L(M)$.

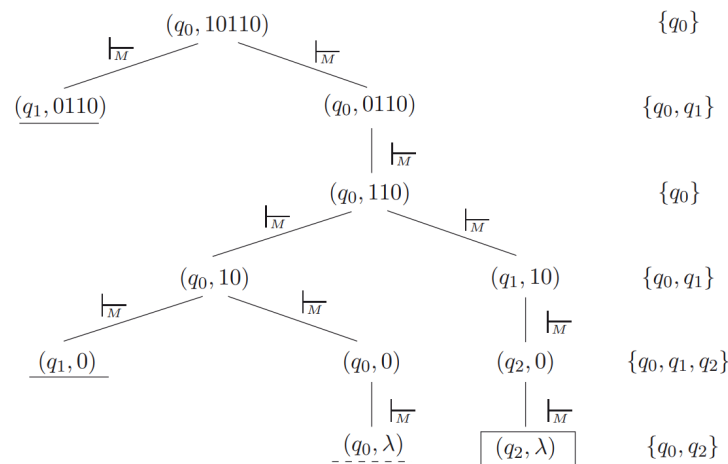


Figure 2: Abb. 3.16 aus dem Buch

Wir können die Sprache des NEA bestimmen.

Lemma 3.5

$$L(M) = \{x11y \mid x, y \in (\Sigma_{\text{bool}})^*\}$$

Beweisidee

Beide Inklusionen zeigen und fertig. (Siehe Buch)

Wir definieren die Klasse \mathcal{L}_{NEA} .

$$\mathcal{L}_{\text{NEA}} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein NEA}\}$$

6.2 Äquivalenz von NEA und EA

Beweis von $\mathcal{L}_{\text{NEA}} = \mathcal{L}_{\text{EA}}$ per **Potenzmengenkonstruktion**.

Satz 3.2

Zu jedem NEA M existiert ein EA A , so dass

$$L(M) = L(A)$$

Beweisidee

Potenzmengenkonstruktion und dann Induktion auf der Länge von einem Input i.e. $|x|$. (Siehe Buch)

Potenzmengenkonstruktion

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta_M, q_0, F)$ ein NEA. Wir konstruieren einen äquivalenten Endlichen Automaten $A = (Q_A, \Sigma_A, \delta_A, q_{0A}, F_A)$.

- (i) $Q_A = \{\langle P \rangle \mid P \subseteq Q\}$
- (ii) $\Sigma_A = \Sigma$
- (iii) $q_{0A} = \langle \{q_0\} \rangle$
- (iv) $F_A = \{\langle P \rangle \mid P \subseteq Q \text{ und } P \cap F \neq \emptyset\}$
- (v) $\delta_A : (Q_A \times \Sigma_A) \rightarrow Q_A$ ist eine Funktion, definiert wie folgt. Für jedes $\langle P \rangle \in Q_A$ und jedes $a \in \Sigma_A$ ist

$$\begin{aligned} \delta_A(\langle P \rangle, a) &= \left\langle \bigcup_{p \in P} \delta_M(p, a) \right\rangle \\ &= \langle \{q \in Q \mid \exists p \in P, \text{ so dass } q \in \delta_M(p, a)\} \rangle \end{aligned}$$

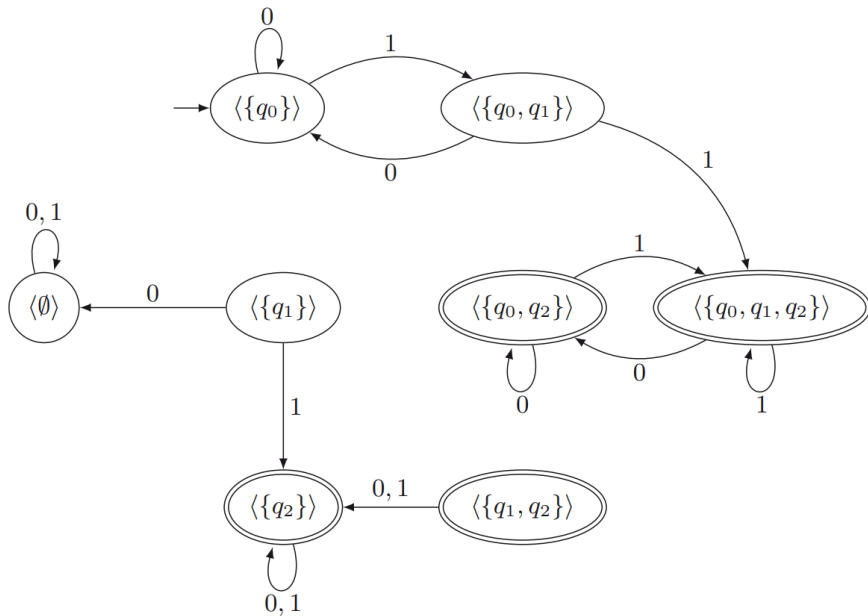


Figure 3: Abb. 3.18 im Buch

6.3 Exponentiell mehr Zustände - manchmal

Sei

$$L_k = \{x1y \mid x \in (\Sigma_{\text{bool}})^*, y \in (\Sigma_{\text{bool}})^{k-1}\}$$

Folgender NEA A_k mit $k + 1$ akzeptiert L_k .

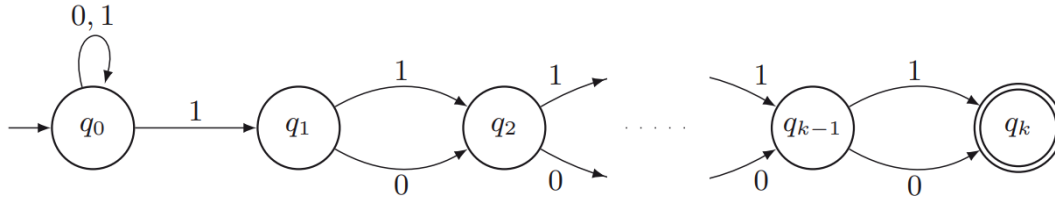


Figure 4: Abb. 3.19 im Buch

Lemma 3.6

Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ muss jeder EA, der L_k akzeptiert, mindestens 2^k Zustände haben.

Beweis

Sei $B_k = (Q_k, \Sigma_{bool}, \delta_k, q_{0k}, F_k)$ ein EA mit $L(B_k) = L_k$.

Nach **Lemma 3.3** gilt für $x, y \in (\Sigma_{bool})^*$:

Wenn $\hat{\delta}_k(q_{0k}, x) = \hat{\delta}_k(q_{0k}, y)$, dann gilt für alle $z \in (\Sigma_{bool})^*$:

$$xz \in L(B_k) \iff yz \in L(B_k)$$

Die Idee des Beweises ist es, eine Menge S_k von Wörtern zu finden, so dass für keine zwei unterschiedlichen Wörter $x, y \in S_k$ die Gleichung $\hat{\delta}_k(q_{0k}, x) = \hat{\delta}_k(q_{0k}, y)$ gelten darf. Dann müsste B_k mindestens $|S_k|$ viele Zustände haben.

Wir wählen $S_k = (\Sigma_{bool})^k$ und zeigen, dass $\hat{\delta}_k(q_{0k}, u)$ paarweise unterschiedliche Zustände für alle $u \in S_k$ sind.

Wir beweisen dies per Widerspruch.

Seien $x = x_1x_2\dots x_k$ und $y = y_1y_2\dots y_k$ für $x_i, y_i \in \Sigma_{bool}, i \in \{1, \dots, k\}$ zwei unterschiedliche Wörter aus S_k .

Nehmen wir zum Widerspruch an, dass $\hat{\delta}_k(q_{0k}, x) = \hat{\delta}_k(q_{0k}, y)$.

Weil $x \neq y$, existiert ein $j \in \{1, \dots, k\}$, so dass $x_j \neq y_j$. O.B.d.A. setzen wir $x_j = 1$ und $y_j = 0$. Betrachten wir nun $z = 0^{j-1}$. Dann ist

$$xz = x_1\dots x_{j-1}1x_{j+1}\dots x_k0^{j-1} \text{ und } yz = y_1\dots y_{j-1}0y_{j+1}\dots y_k0^{j-1}$$

und daher $xz \in L_k$ und $yz \notin L_k$.

Dies ist ein Widerspruch! Folglich gilt $\hat{\delta}_k(q_{0k}, x) \neq \hat{\delta}_k(q_{0k}, y)$ für alle paarweise unterschiedliche $x, y \in S_k = (\Sigma_{bool})^k$.

Daher hat B_k mindestens $|S_k| = 2^k$ viele Zustände. ■

6.4 Mindestanzahl Zustände

Die Grundidee ist es n Wörter anzugeben und zu beweisen, dass jedes von diesen n Wörtern in einem eigenen Zustand enden muss.

Seien w_1, \dots, w_n diese Wörter. Dann geben wir für jedes Paar von Wörtern $w_i \neq w_j$ einen Suffix $z_{i,j}$ an, so dass folgendes gilt:

$$w_i z_{i,j} \in L \not\iff w_j z_{i,j} \in L$$

Dann folgt aus Lemma 3.3

$$\hat{\delta}(q_0, w_i) \neq \hat{\delta}(q_0, w_j)$$

	w_2	\dots	w_n
w_1	$z_{1,2}$	\dots	$z_{1,n}$
\dots		\dots	\dots
w_{n-1}			$z_{n-1,n}$

Es eignet sich die Suffixe als Tabelle anzugeben.

Um die Wörter und Suffixe zu finden, kann es sich als nützlich erweisen, den Endlichen Automaten zu konstruieren.

Beweisschema

Wir nehmen zum Widerspruch an, dass es einen EA für L gibt mit weniger als n Zuständen.

Betrachten wir w_1, \dots, w_n . Per Pigeonhole-Principle existiert $i < j$, so dass

$$\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$$

Per Lemma 3.3 folgt daraus, dass

$$\forall z \in \Sigma^* : w_i z \in L \iff w_j z \in L$$

Für $z = z_{i,j}$ gilt aber per Tabelle

$$w_i z_{i,j} \in L \not\iff w_j z_{i,j} \in L \quad (1)$$

für alle $i < j$.

Da keines der n Wörter im gleichen Zustand enden kann, ergibt sich ein Widerspruch.

Dann noch Angabe der Tabelle für (1)

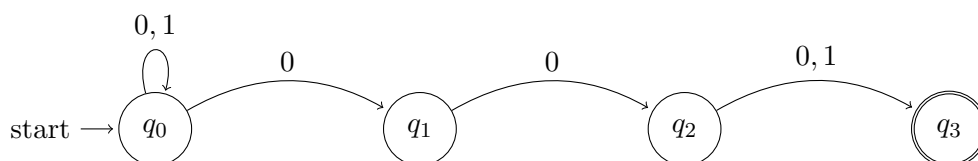
- Wenn es offensichtlich ist, muss (1) nicht bei jedem Suffix begründet werden.
- Ein minimaler endlicher Automat ist nicht notwendig für den Beweis. Hilft aber fürs
 - i. Finden der w_i
 - ii. Finden der $z_{i,j}$
 - iii. Beweis von $w_i z_{i,j} \in L \not\iff w_j z_{i,j} \in L$ (Leicht überprüfbar)

Klassische Aufgabe - HS19 Aufgabe 3.a

Wir betrachten die Sprache

$$L = \{x00y \mid x \in \{0,1\}^* \text{ und } y \in \{0,1\}\}$$

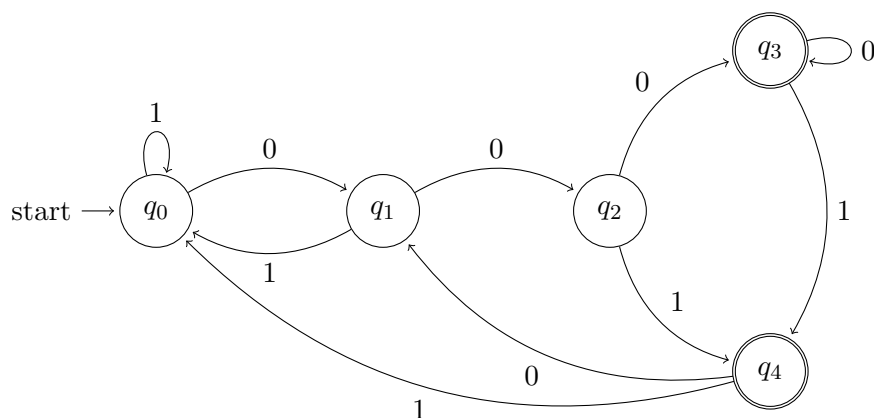
Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten mit höchstens 4 Zuständen, der L akzeptiert.



Klassische Aufgabe - HS19 Aufgabe 3.b

Zeigen Sie, dass jeder deterministische endliche Automat, der L akzeptiert, mindestens 5 Zustände braucht.

Wir zeichnen den zugehörigen EA zuerst.



Nehmen wir zum Widerspruch an, dass es einen endlichen Automaten gibt, der L akzeptiert und weniger als 4 Zustände hat.

Wir wählen die Wörter $B = \{\lambda, 0, 00, 000, 001\}$.

Nach dem Pigeonhole-Principle existieren zwei Wörter $w_i, w_j \in B, w_i \neq w_j$, so dass

$$\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$$

Per Lemma 3.3 folgt daraus, dass

$$\forall z \in \Sigma^* : w_i z \in L \iff w_j z \in L$$

Wir betrachten folgende Tabelle mit Suffixen. Der zeigt für jedes Wortpaar $x, y \in B, x \neq y$ die Existenz

	0	00	000	001
λ	01	1	λ	λ
0		1	λ	λ
00			λ	λ
000				1

eines Suffixes z , so dass

$$(xz \in L \wedge yz \notin L) \vee (xz \notin L \wedge yz \in L)$$

Dies kann man mit den angegebenen Suffixen und dem angegebenen EA einfach überprüfen.

Dies widerspricht der vorigen Aussage, dass ein Wortpaar $w_i, w_j \in B, w_i \neq w_j$ existiert, so dass

$$\forall z \in \Sigma^* : w_i z \in L \iff w_j z \in L$$

Somit ist unsere Annahme falsch und L nicht regulär. ■

Bemerkung

Manchmal ist es zu schwierig einen minimalen EA zu finden und es funktioniert einfacher die Wörter durch Trial and Error zu finden. (Siehe Midterm HS22)

7 Turing Maschinen

7.1 Motivation und Überblick

Formalisierung notwendig, um mathematisch über die automatische Unlösbarkeit zu argumentieren.

Jede vernünftige Programmiersprache ist eine zulässige Formalisierung.

Aber nicht geeignet (meistens komplexe Operationen).

Die Turingmaschine erlaubt ein paar **elementare Operationen** und besitzt trotzdem die **volle Berechnungsstärke** beliebiger Programmiersprachen.

Ziel dieses Kapitels ist, dass ihr ein gewisse Gespür dafür bekommt, was eine Turingmaschine kann und was nicht.

7.2 Turing Maschinen - Formalisierung von Algorithmen

Informell

Eine Turingmaschine besteht aus

- (i) einer endlichen Kontrolle, die das Programm enthält,
- (ii) einem unendlichen Band, das als Eingabeband, aber auch als Speicher (Arbeitsband) zur Verfügung steht, und
- (iii) einem Lese-/Schreibkopf, der sich in beiden Richtungen auf dem Band bewegen kann.

Für formale Beschreibung siehe Buch.

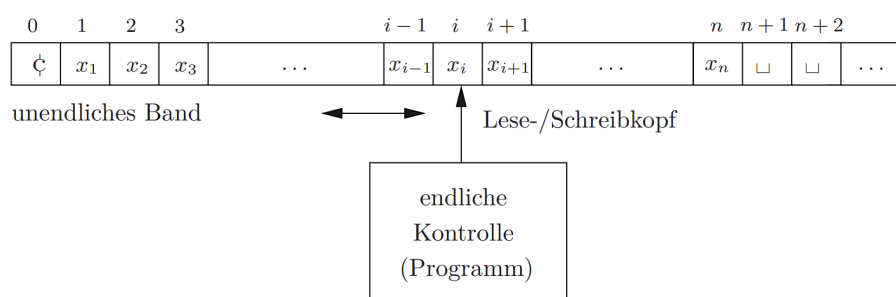


Figure 5: Abb. 4.1 vom Buch

Elementare Operation einer TM - Informell

Input

- Zustand der Maschine (der Kontrolle)
- Symbol auf dem Feld unter dem Lese-/Schreibkopf

Aktion

- (i) ändert Zustand
- (ii) schreibt auf das Feld unter dem Lese-/Schreibkopf
- (iii) bewegt den Lese-/Schreibkopf nach links, rechts oder gar nicht. Ausser wenn ϵ , dann ist links nicht möglich.

Eine **Konfiguration** C von M ist ein Element aus

$$\text{Konf}(M) = \{\epsilon\} \cdot \Gamma^* \cdot Q \cdot \Gamma^+ \cup Q \cdot \{\epsilon\} \cdot \Gamma^*$$

- Eine Konfiguration $\epsilon w_1 q a w_2$ mit $w_1, w_2 \in \Gamma^*$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$ sagt uns:

- M im Zustand q , Inhalt des Bandes $\zeta w_1 a w_2 \dots$, Kopf an Position $|w_1| + 1$ und liest gerade a .
- Eine Konfiguration $p\zeta w$ mit $p \in Q$, $w \in \Gamma^*$: Inhalt des Bandes $\zeta w \dots$, Zustand p und Kopf an Position 0.

Bmk: Im Buch haben sie in der Definition von Konf Γ^+ anstatt Γ^* an "letzter Stelle".

Es gibt wieder eine Schrittrelation $\mid_M \subseteq \text{Konf}(M) \times \text{Konf}(M)$.

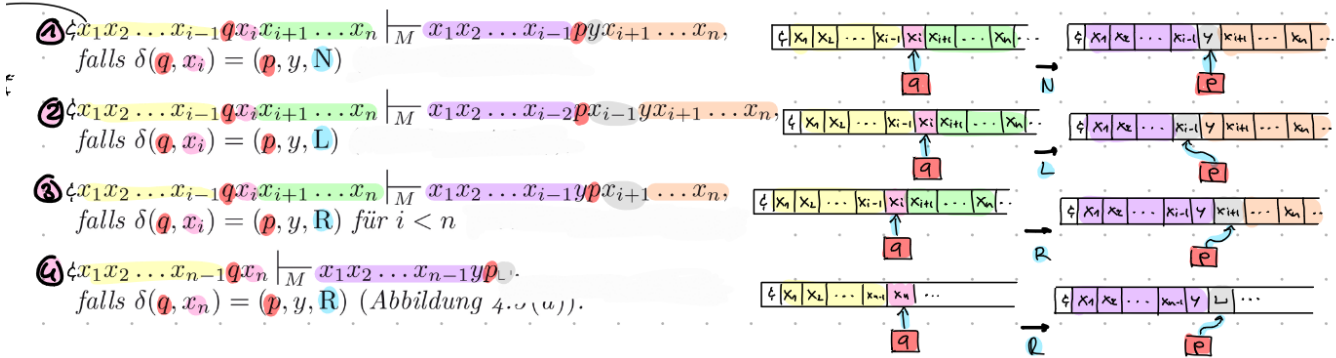


Figure 6: Diagramm von Adeline

Berechnung von M , Berechnung von M auf einer Eingabe x etc. durch \mid_M definiert.

Die Berechnung von M auf x heisst

- **akzeptierend**, falls sie in einer akzeptierenden Konfiguration $w_1 q_{\text{accept}} w_2$ endet (wobei ζ in w_1 enthalten ist).
- **verwerfend**, wenn sie in in einer verwerfenden Konfiguration $w_1 q_{\text{reject}} w_2$ endet.
- **nicht-akzeptierend**, wenn sie entweder eine **verwerfende** oder unendliche Berechnung ist.

Die von der **Turingmaschine M akzeptierte Sprache** ist

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid q_0 \zeta w \mid_M^* y q_{\text{accept}} z, \text{ für irgendwelche } y, z \in \Gamma^*\}$$

7.3 Wichtige Klassen

Reguläre Sprachen

$$\mathcal{L}_{\text{EA}} = \{L(A) \mid A \text{ ist ein EA}\} = \mathcal{L}_{\text{NEA}}$$

Rekursiv aufzählbare Sprachen

Eien Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv aufzählbar**, falls eine TM M existiert, so dass $L = L(M)$.

$$\mathcal{L}_{\text{RE}} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine TM}\}$$

ist die **Klasse aller rekursiv aufzählbaren Sprachen**.

Halten

Wir sagen das M **immer hält**, wenn für alle Eingaben $x \in \Sigma^*$

- (i) $q_0 \dot{c} x \xrightarrow{M}^* y q_{\text{accept}} z, y, z \in \Gamma^*, \text{ falls } x \in L \text{ und}$
- (ii) $q_0 \dot{c} x \xrightarrow{M}^* u q_{\text{reject}} v, u, v \in \Gamma^*, \text{ falls } x \notin L.$

Rekursive Sprachen

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv (entscheidbar)**, falls $L = L(M)$ für eine TM M , die **immer hält**.

$$\mathcal{L}_R = \{L(M) \mid M \text{ ist eine TM, die immer hält}\}$$

ist die **Klasse der rekursiven (algorithmisch erkennbaren) Sprachen**.

7.4 Mehrband-Turingmaschine**Mehrband-TM - Informelle Beschreibung**

Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ hat eine k -Band Turingmaschine

- eine endliche Kontrolle
- ein endliches Band mit einem Lesekopf (Eingabeband)
- k Arbeitsbänder, jedes mit eigenem Lese-/Schreibkopf (nach rechts unendlich)

Insbesondere gilt 1-Band TM \neq "normale" TM

Am Anfang der Berechnung einer MTM M auf w

- Arbeitsbänder "leer" und die k Lese-/Schreibköpfe auf Position 0.
- Inhalt des Eingabebands $\dot{c} w \$$ und Lesekopf auf Position 0.
- Endliche Kontrolle im Zustand q_0 .

7.5 Äquivalenz von Maschinen (TM, MTM)

Seien A und B zwei Maschinen mit **gleichem** Σ .

Wir sagen, dass **A äquivalent zu B ist**, wenn für jede Eingabe $x \in \Sigma^*$

- (i) A akzeptiert $x \iff B$ akzeptiert x
- (ii) A verwirft $x \iff B$ verwirft x
- (iii) A arbeitet unendlich lange auf $x \iff B$ arbeitet unendlich lange auf x

Wir haben

$$A \text{ und } B \text{ äquivalent} \implies L(A) = L(B)$$

aber

$$L(A) = L(B) \not\implies A \text{ und } B \text{ äquivalent}$$

da A auf x unendlich lange arbeiten könnte, während B x verwirft.

Lemma 4.1

Zu jeder TM A existiert eine zu A äquivalente 1-Band-TM B

Beweisidee B kopiert die Eingabe zuerst aufs Arbeitsband und simuliert dann A .

Lemma 4.2

Zu jeder Mehrband-TM A existiert eine zu A äquivalente TM B

Beweis

Sei A eine k -Band-Turingmaschine für ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir konstruieren eine TM B , die Schritt für Schritt A simuliert.

B speichert die Inhalte aller $k + 1$ Bänder von A auf ihrem einzigen Band. Anschaulich gesprochen ist jedes Feld auf dem Band von B ein $2(k + 1)$ -Tupel und jedes Element dieses Tupels ist auf einer Spur. Sei Γ_A das Arbeitsalphabet von A . Dann gilt

$$\Gamma_B = (\Sigma_A \cup \{\$, \$, \downarrow\}) \times \{\downarrow, \uparrow\} \times (\Gamma_A \times \{\downarrow, \uparrow\})^k \cup \Sigma_A \cup \{\$, \downarrow\}$$

Für ein Symbol $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}) \in \Gamma_B$ sagen wir, dass a_i auf der i -ten Spur liegt. Daher bestimmen die i -ten Elemente der Symbole auf dem Band von B den Inhalt der i -ten Spur. Eine Konfiguration $(q, w, i, x_1, i_1, x_2, i_2, \dots, x_k, i_k)$ von A ist dann in B wie folgt gespeichert.

- Der Zustand q ist in der endlichen Kontrolle von B gespeichert.
- Die 0-te Spur des Bandes von B enthält die $\$w\$$ (i.e. den Inhalt des Eingabebandes von A)
- Für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ enthält die $(2i)$ -te Spur des Bandes von B den Inhalt vom i -ten Band von A (i.e. $\$x_i\$$).
- Für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ bestimmt die $(2i + 1)$ -te Spur des Bandes von B mit dem Symbol \uparrow die Position des Kopfes auf dem i -ten Arbeitsband von A .

Ein Schritt von A kann jetzt durch folgende Prozedur von B simuliert werden:

1. B liest einmal den Inhalt ihres Bandes von links nach rechts, bis sie alle $k + 1$ Kopfpositionen von A gefunden hat, und speichert dabei in ihrem Zustand die $k + 1$ Symbole, die an diesen Positionen stehen. (Dies kann ohne weiteres in der Zustandsmenge abgespeichert werden, da k fix ist, folglich ist dann Γ_A^k auch endlich)
2. Nach der ersten Phase kennt B das ganze Argument (der Zustand von A ist im Zustand von B gespeichert) der Transitionsfunktion von A und kann also die entsprechenden Aktionen (Köpfe bewegen, Ersetzen von Symbolen) von A bestimmen. Diese Änderungen führt B in einem Lauf über ihr Band von rechts nach links durch.

■

Aus Lemma 4.1 und 4.2 folgt direkt

Satz 4.1

Die Maschinenmodelle von Turingmaschinen und Mehrband-Turingmaschinen sind äquivalent.

Note:

- "Äquivalenz" für Maschinenmodelle wird in Definition 4.2 definiert.
- Maschinenmodelle sind Klassen von Maschinen (i.e. Mengen von Maschinen mit gewissen Eigenschaften).

7.6 Nichtdeterministische Turingmaschinen

Definition von NTM

Eine **nichtdeterministische Turingmaschine (NTM)** ist ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$, wobei

- (i) $Q, \Sigma, \Gamma, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}$ die gleiche Bedeutung wie bei einer TM haben, und
- (ii) $\delta : (Q \setminus \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, N\})$ die **Übergangsfunktion** von M ist und die folgende Eigenschaft hat:

$$\delta(p, \phi) \subseteq \{(q, \psi, X) \mid q \in Q, X \in \{R, N\}\}$$

für alle $p \in Q$

Konfiguration ähnlich wie bei TMs.

Konfiguration akzeptierend \iff enthält q_{accept}
 Konfiguration verwerfend \iff enthält q_{reject}

Die üblichen Sachen

- Schrittrelation \mid_M^* "verbindet zwei Konfigurationen, wenn man von der einen in die andere kommen kann"
- Reflexive und transitive Hülle ist \mid_M^* .
- Berechnung von M ist eine Folge von Konfigurationen C_1, C_2, \dots , so dass $C_i \mid_M C_{i+1}$.
- Eine Berechnung von M auf x ist beginnt in $q_0 \phi x$ und endet entweder unendlich oder endet in $\{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$.

Akzeptierte Sprache

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid q_0 \phi w \mid_M^* y q_{\text{accept}} z \text{ für irgendwelche } y, z \in \Gamma^*\}$$

Berechnungsbaum

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ eine NTM und sei x ein Wort über dem Eingabealphabet Σ von M . Ein **Berechnungsbaum $T_{M,x}$ von M auf x** ist ein (potentiell unendlicher) gerichteter Baum mit einer Wurzel, der wie folgt definiert wird.

- (i) Jeder Knoten von $T_{M,x}$ ist mit einer Konfiguration beschriftet.
- (ii) Die Wurzel ist der einzige Knoten von $T_{M,x}$ mit dem Eingangsgrad 0 und ist mit der Startkonfiguration $q_0 \phi x$ beschriftet.
- (iii) Jeder Knoten des Baumes, der mit einer Konfiguration C beschriftet ist, hat genauso viele Kinder wie C Nachfolgekongfigurationen hat, und diese Kinder sind mit diesen Nachfolgekongfigurationen C markiert.

Äquivalenz NTM und TM

Satz 4.2

Sei M eine NTM. Dann existiert eine TM A , so dass

- (i) $L(M) = L(A)$ und
- (ii) falls M keine unendlichen Berechnungen auf Wörtern aus $L(M)^c$ hat, dann hält A immer.

Beweisidee:

”BFS im Berechnungsbaum”, i.e. wir simulieren einzelne Schritte der verschiedenen Berechnungsstränge.

8 Einstieg Berechnenbarkeit

8.1 Diagonalisierung

Bijektion, Injektion, Schreibweise

Seien A und B zwei Mengen.

Wir sagen, dass

- i. $|A| \leq |B|$, falls eine injektive Funktion $f : A \rightarrow B$ existiert.
- ii. $|A| = |B|$, falls $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$.
- iii. $|A| < |B|$, falls $|A| \leq |B|$ und keine injektive Abbildung von B nach A existiert.

Zur Erinnerung:

$$f : A \rightarrow B \text{ injektiv} \iff \forall x, y \in A, x \neq y. f(x) \neq f(y)$$

Abzählbarkeit

E

ine Menge A heisst **abzählbar**, falls A endlich ist oder $|A| = |\mathbb{N}|$.

Lemma 5.1

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Dann ist Σ^* abzählbar.

Beweisidee

kanonische Ordnung gibt uns eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und Σ^* .

Satz 5.1

Die Menge **KodTM** der Turingmaschinenkodierungen ist abzählbar.

Beweisidee

$\text{KodTM} \subseteq (\Sigma_{\text{bool}})^*$ und Lemma 5.1

Lemma 5.2

$(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ ist abzählbar.

Beweisidee

Unendliche 2-dimensionale Tabelle, so dass an der i -ten Zeile und j -ten Spalte, sich das Element $(i, j) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ befindet.

Formal definiert man dabei die lineare Ordnung

$$(a, b) < (c, d) \iff a + b < c + d \text{ oder } (a + b = c + d \text{ und } b < d)$$

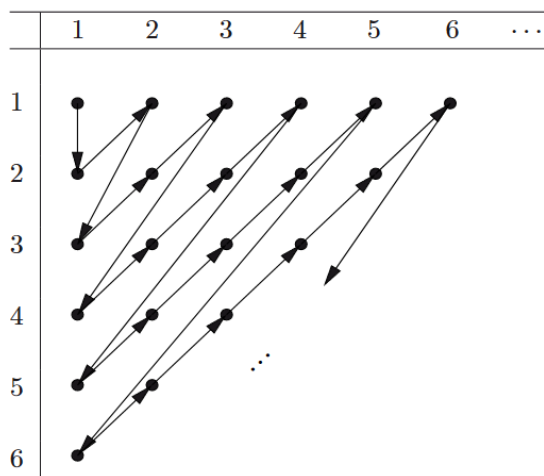


Figure 7: Abbildung 5.3 im Buch

Die i -te Diagonale hat i Elemente. Ein beliebiges Element $(a, b) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ ist das b -te Element auf der $(a + b - 1)$ -ten Diagonale.

Auf den ersten $a + b - 2$ Diagonalen gibt es

$$\sum_{i=1}^{a+b-2} i = \frac{(a+b-2) \cdot ((a+b-2) + 1)}{2} = \binom{a+b-1}{2}$$

Elemente.

Folglich ist

$$f((a, b)) = \binom{a+b-1}{2} + b$$

eine Bijektion von $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ nach $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Überabzählbarkeit

Satz 5.3

$[0, 1]$ ist nicht abzählbar.

Beweisidee

Klassisches Diagonalisierungsargument. Aufpassen auf 0 und 9. I.e. $1 = 0.\overline{99}$.

Satz 5.4

$\mathcal{P}((\Sigma_{\text{bool}})^*)$ ist nicht abzählbar.

Beweis:

Wir definieren eine injektive Funktion von $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}((\Sigma_{\text{bool}})^*)$ und beweisen so $|\mathcal{P}((\Sigma_{\text{bool}})^*)| \geq |[0, 1]|$.

Sei $a \in [0, 1]$ beliebig. Wir können a wie folgt binär darstellen:

$$\text{Nummer}(a) = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots \text{ mit } a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 2^{-i}.$$

$f(x)$	$x \in [0, 1]$						
1	0.	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	\dots	
2	0.	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	\dots	
3	0.	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	\dots	
4	0.	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots		
i	0.	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	\dots	a_{ii} \dots
\vdots	\vdots						

Abbildung 5.5

Hier ist zu beachten, dass wir für eine Zahl a immer die lexikographisch letzte Darstellung wählen.

Dies tun wir, weil eine reelle Zahl 2 verschiedene Binärdarstellungen haben kann. Beispiel: $\frac{1}{2} = 0.1\bar{0} = 0.0\bar{1}$.

Für jedes a definieren wir:

$$f(a) = \{a_1, a_2 a_3, a_4 a_5 a_6, \dots, a_{\binom{n}{2}+1} a_{\binom{n}{2}+2} \dots a_{\binom{n+1}{2}}, \dots\}$$

Da $f(a) \subseteq (\Sigma_{bool})^*$ gilt $f(a) \in \mathcal{P}((\Sigma_{bool})^*)$.

Wir haben für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dass $f(a)$ **genau** ein Wort dieser Länge enthält. Nun können wir daraus folgendes schliessen:

Weil die Binärdarstellung zweier unterschiedlichen reellen Zahlen an mindestens einer Stelle unterschiedlich ist, gilt $b \neq c \implies f(b) \neq f(c), \forall b, c \in [0, 1]$.

Folglich ist f injektiv und wir haben $|\mathcal{P}((\Sigma_{bool})^*)| \geq |[0, 1]|$.

Da $[0, 1]$ nicht abzählbar ist, folgt daraus:

$\mathcal{P}((\Sigma_{bool})^*)$ ist nicht abzählbar.

■

Diagonalsprache L_{diag} Zur Erinnerung:

Rekursiv aufzählbare Sprachen

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heisst **rekursiv aufzählbar**, falls eine TM M existiert, so dass $L = L(M)$.

$$\mathcal{L}_{\text{RE}} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine TM}\}$$

ist die **Klasse aller rekursiv aufzählbaren Sprachen**.

Wir zeigen jetzt per Diagonalisierung, die Existenz einer Sprache die nicht rekursiv aufzählbar ist.

Sei w_1, w_2, \dots die kanonische Ordnung aller Wörter über Σ_{bool} und sei M_1, M_2, M_3, \dots die Folge aller Turingmaschinen.

Wir definieren eine unendliche (bool'sche) Matrix $A = [d_{ij}]_{i,j=1,2,\dots}$ mit

$$d_{ij} = 1 \iff M_i \text{ akzeptiert } w_j.$$

Wir definieren

$$L_{\text{diag}} = \{w \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht für ein } i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Satz 5.5

$$L_{\text{diag}} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$$

Beweis:

Wir haben

$$L_{\text{diag}} = \{w \mid w = w_i \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht für ein } i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Widerspruchsbeweis:

Sei $L_{\text{diag}} \in \mathcal{L}_{\text{RE}}$. Dann existiert eine TM M , so dass $L(M) = L_{\text{diag}}$. Da diese TM eine TM in der Nummerierung aller TM ist, existiert ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $M_i = M$.

Wir betrachten nun das Wort w_i für diese $i \in \mathbb{N}$. Per Definition von L_{diag} , gilt:

$$w_i \in L_{\text{diag}} \iff w_i \notin L(M_i)$$

Da aber $L(M_i) = L_{\text{diag}}$, haben wir folgenden Widerspruch:

$$w_i \in L_{\text{diag}} \iff w_i \notin L_{\text{diag}}$$

Folglich gilt $L_{\text{diag}} \notin \mathcal{L}_{\text{RE}}$. ■

9 Midterm Prep