

実習タイトル：X線イメージング（見学：BL20B2）

東北大学多元物質科学研究所 矢代 航

実習要旨

1972 年に Hounsfield によって発表された X 線 CT（Computed Tomography、コンピュータ断層撮影）は、物体内部の三次元的なイメージングを可能にする技術であり、現在では医療診断、非破壊検査に欠かすことができないツールとなっている。本実習は、コンピュータプログラミングを通して、この CT の原理について学ぶことを目的とする。

1. はじめに

X 線は 1895 年にレントゲンに発見されて以来、その高い透過力を活かして、物体内部のイメージングに広く用いられてきた。レントゲン撮影に代表される通常のイメージングにおいては、物質による X 線の吸収が利用される。例えば、人体中の骨は軟組織に比べ X 線を吸収するため、レントゲン写真に容易に描出される。X 線の物質による吸収は、線吸収係数という物理量で表すことができる。すなわち、図 1 (a) のような、均質で厚さが一定 (y_0) の物体の透過率 T （透過 X 線の強度 I を入射 X 線の強度 I_0 で割った量）は、線吸収係数を用いて、以下の式で表すことができる。

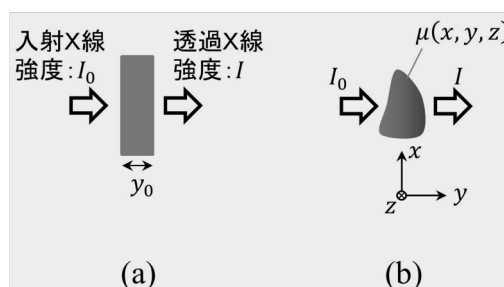


図 1 X 線の入射と透過。(a) 均質で厚さが一定の物体の場合（式①）。(b) 線吸収係数 μ に分布がある場合（式②）。

$$T = \frac{I}{I_0} = e^{-\mu y_0} \quad (1)$$

これは Lambert-Beer の法則と呼ばれている。物体内部に線吸収係数の分布がある場合（図 1 (b) の場合）には、物体の透過率は

$$T(x, z) = e^{-\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y, z) dy} \quad (2)$$

のように表すことができる。すなわち、透過率 $T(x, z)$ の自然対数を取り、 -1 をかけた画像は、線吸収係数を X 線の伝播方向に投影した二次元画像

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x, y, z) dy \quad (3)$$

に対応している。しかしながら、 $T(x, z)$ の画像からは、 $\mu(x, y, z)$ の三次元的な分布は得られない。

1972年に Hounsfield によって発表された X線 CT (Computed Tomography、コンピュータ断層撮影) は、物体内部の $\mu(x, y, z)$ の三次元的なイメージングを可能にする技術として画期的なものであった (その後、Hounsfield は、1963~64 年に CT の理論を発表した Cormack とともに、1979 年にノーベル生理学・医学賞を受賞した)。X線 CT は、現在では医療診断だけでなく、非破壊検査など、様々な分野の研究・開発に欠かすことのできないツールとなっている。本実習では、この CT の原理について学ぶことを目的とする。

2. CT の原理

2-1. 投影切断面定理 (Projection-slice theorem)

X線 CT の実験配置の例を図 2 に示す。ここでは簡単のため、平行 X線ビームを用いて X線 CT 測定 (CT スキャン) を行う場合について示してある。図 2 (a) は医療診断用の CT スキャナに相当するもので、被写体 (医療診断ならば人体の一部) を固定し、そのまわりを光源と検出器が回転して、複数の方向で撮影した投影像 (X線の吸収を利用する場合には透過率像) から、三次元イメージを再構成するものである。一方で、シンクロトロン放射光源を用いて CT スキャンを行う場合には、光源を移動できないため、図 2 (b) のように、試料を回転させる。

以下では、図 2 (b) の場合に、三次元イメージがどのように取得できるか、その原理を説明する。図 2 (b) のような実験室系に固定された xyz 座標系を設定する。放射光 (平行 X線ビームと近似) を y 軸に平行に入射し、画像検出器で投影像 $T(x, z)$ を取得するとする。また、試料の回転軸は z 軸に平行であるとする。

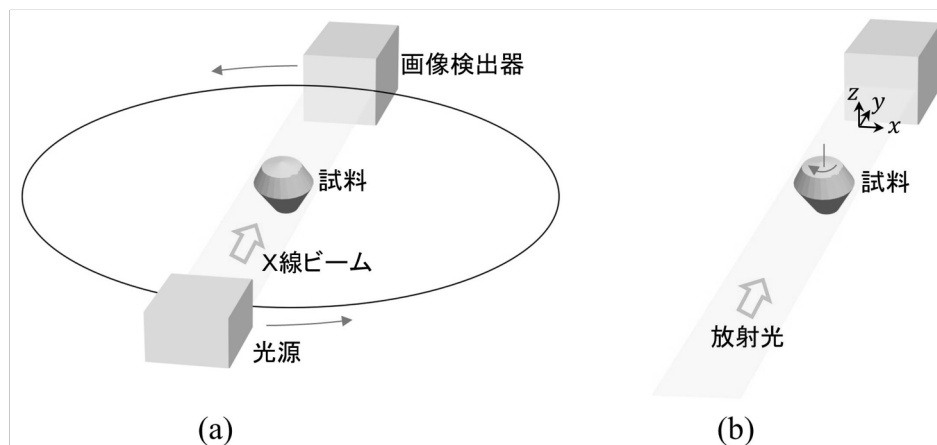


図 2 X線 CT の実験配置の例 (平行 X線ビームを用いる場合)。(a) 医療診断用 CT スキャナの配置。(b) 放射光を用いた CT スキャンの配置。

図 3 (a) は、試料を z 軸のまわりに時計回りに θ だけ回転したときの、 $z = \text{一定}$ ($z = z_0$) の平面内を模式的に示したものである。図中の $x'y'$ 座標は試料に固定した座標系で、この平面内の試料の線吸収係数は $\mu(x', y', z_0)$ (以下では簡単のため、 $\mu(x', y')$ と表す) と与えられる。 $x'y'$ 座標を基準にすれば、試料をこの座標に固定したまま、X線ビームによる投影方向を、 z 軸のまわりに半時計回りに θ だけ回転した状況になっている。

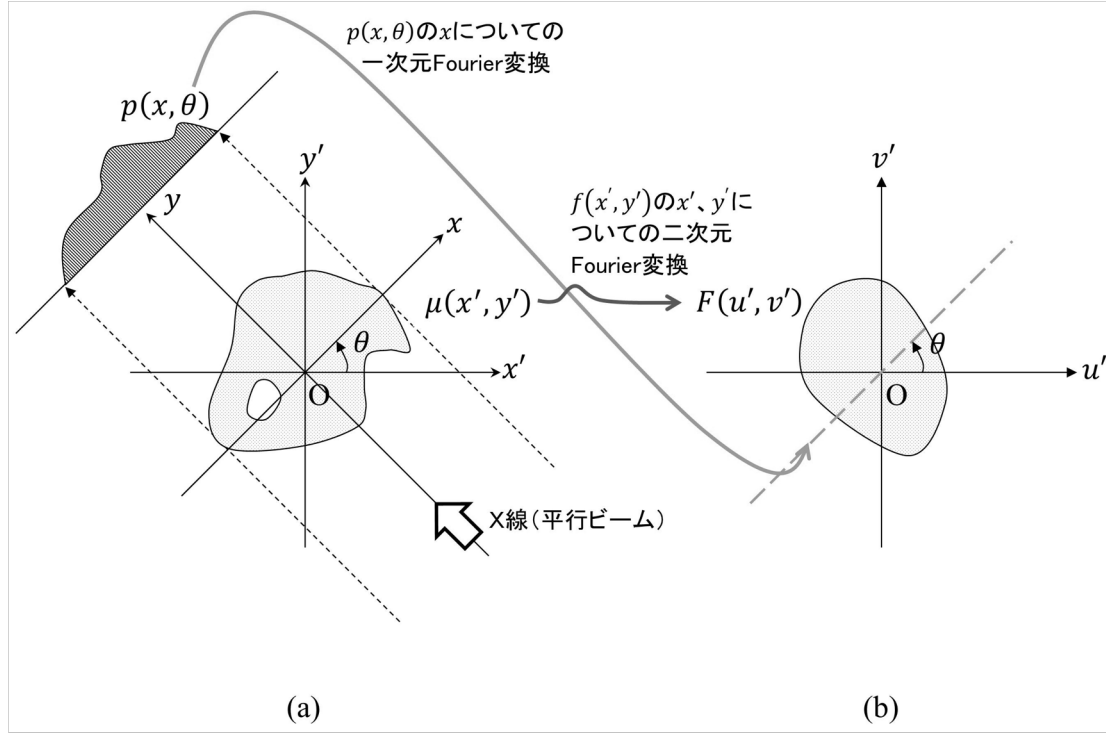


図 3 投影切断面定理。(a) $\mu(x', y')$ の投影 $p(x, \theta)$ と (b) その二次元 Fourier 変換 $F(u', v')$ 。

式②により、この方向で撮影した透過率像の自然対数に -1 をかけたものは、この方向に $\mu(x', y')$ を投影したものに等しいから、

$$-\ln(T(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x', y') dy \quad (4)$$

ここで xy 座標は $x'y'$ 座標に対して θ だけ時計回りに回転しているから

$$(x', y') = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \quad (5)$$

である。式④の右边を $p(x, \theta)$ と定義する。すなわち

$$p(x, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) dy \quad (6)$$

とする。CT 再構成を行うことは、複数の θ で取得した $p(x, \theta)$ から $\mu(x', y')$ を求めることに他ならない。

以下ではまず、 $p(x, \theta)$ から $\mu(x', y')$ を求める際に重要な役割を果たす投影切断面定理 (Projection-slice theorem、あるいは Fourier-slice theorem、Central-slice theorem と呼ばれる) について説明する。 $\mu(x', y')$ の二次元 Fourier 変換を $F(u', v')$ とする。すなわち

$$F(u', v') \equiv \mathcal{F}(\mu(x', y')) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} \mu(x', y') e^{-2\pi i(x'u' + y'v')} dx' dy' \quad (7)$$

とする。式⑤を用いて (x', y') 座標系から (x, y) 座標系への座標変換を行うと、

$$F(u', v') = \iint_{-\infty}^{\infty} \mu(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) e^{-2\pi i(x(u' \cos \theta + v' \sin \theta) + y(-u' \sin \theta + v' \cos \theta))} dx dy \quad (8)$$

この式に $u' = \omega' \cos \theta$ 、 $v' = \omega' \sin \theta$ を代入 (極座標 (ω', θ) に変換) することにより

$$F(\omega' \cos \theta, \omega' \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) dy \right] e^{-2\pi i \omega' x} dx \quad (9)$$

すなわち、式⑥より

$$F(\omega' \cos \theta, \omega' \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \theta) e^{-2\pi i \omega' x} dx \quad (10)$$

この式の左辺は、Fourier 変換された空間 (Fourier 空間) (u', v') において、原点を通り u' 軸に対して角度 θ だけ傾いた直線 (図 3 (c) の破線) 上の $F(u', v')$ の値を表している。右辺は投影 $p(x, \theta)$ の x に関する一次元 Fourier 変換であり、式⑩はこれらが等しいことを示している。この式は投影切断面定理と呼ばれている。

2-2. 逆投影 (Backprojection)

投影切断面定理を用いると、多くの角度 θ で投影データ $p(x, \theta)$ を取得することにより $\mu(x', y')$ を再構成することができる。 $\mu(x', y')$ は $F(u', v')$ の二次元逆 Fourier 変換で与えられるから

$$\mu(x', y') \equiv \mathcal{F}^{-1}(F(u', v')) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} F(u', v') e^{2\pi i(x'u' + y'v')} du' dv' \quad (11)$$

である。 $F(u', v')$ を極座標 (ω', θ) で表示すると、式⑪の右辺は

$$\begin{aligned}
& \iint_{-\infty}^{\infty} F(u', v') e^{2\pi i(x'u' + y'v')} du' dv' \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^{\infty} F(\omega' \cos \theta, \omega' \sin \theta) e^{2\pi i \omega' (x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \omega' d\omega' \right] d\theta \\
&= \int_{-\pi}^0 \left[\int_0^{\infty} F(\omega' \cos \theta, \omega' \sin \theta) e^{2\pi i \omega' (x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \omega' d\omega' \right] d\theta \\
&\quad + \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\infty} F(\omega' \cos \theta, \omega' \sin \theta) e^{2\pi i \omega' (x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \omega' d\omega' \right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega' \cos \theta, \omega' \sin \theta) e^{2\pi i \omega' (x' \cos \theta + y' \sin \theta)} |\omega'| d\omega' \right] d\theta \quad (12)
\end{aligned}$$

と書ける。最後の行においては、 θ の積分区間が0から π に、また ω' の積分区間が $-\infty$ から ∞ に、さらに ω' が $|\omega'|$ になっていることに注意せよ。 $(x, y) = (x' \cos \theta + y' \sin \theta, x' \sin \theta - y' \cos \theta)$ であることを用いると、式⑪は最終的に次のように書ける。

$$\mu(x', y') = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega' \cos \theta, \omega' \sin \theta) e^{2\pi i \omega' x} |\omega'| d\omega' \right] d\theta \quad (13)$$

式⑬右辺の $F(\omega' \cos \theta, \omega' \sin \theta)$ は、投影切断面定理により、実験で求めた投影データ $p(x, \theta)$ の x に関する一次元 Fourier 変換に等しい。すなわち、 $\mu(x', y')$ を以下の三段階のステップで計算機上において再構成することができる。

ステップ 1：実験で求めた投影データ $p(x, \theta)$ の x に関する一次元 Fourier 変換 $P(\omega', \theta)$ を求める。 $P(\omega', \theta)$ は投影切断面定理により $F(\omega' \cos \theta, \omega' \sin \theta)$ に等しい（式⑩）。

ステップ 2： $P(\omega', \theta)$ に $|\omega'|$ をかけて、 ω' に関して逆 Fourier 変換を行う（式⑬右辺[]内）。得られた一次元データを $q(x, \theta)$ とする。

ステップ 3：多くの角度 θ （ $0 \leq \theta < \pi$ ）で取得した投影データ $p(x, \theta)$ に対してそれぞれ求めた $q(x, \theta)$ を用いて、 $\mu(x', y')$ を次の式により求める。

$$\mu(x', y') = \int_0^{\pi} q(x, \theta) d\theta = \int_0^{\pi} q(x' \cos \theta + y' \sin \theta, \theta) d\theta \quad (14)$$

式⑭において $q(x, \theta)$ は、図4のように $x'y'$ 平面内の y 軸に平行な画像とみなすことができる。そして式⑭は、すべての θ に対して画像 $q(x, \theta)$ を足し合わせる計算に対応する。これはあたかも投影の逆操作を行っているようにみえることから、逆投影（Backprojection）と呼ばれている。また、ステップ 2 は、Fourier 変換された空間において、フィルター関数 $|\omega'|$ をかけてから、逆 Fourier 変換を行う演算になっている。そのため、上記のアルゴリズムは Filtered Back-Projection (FBP) 法と呼ばれている。フィルター関数には、 $|\omega'|$ 以外にも様々なものが考案されている。 $|\omega'|$ は Ramachandran-Lakshminarayanan フィルターと呼ばれている。 $|\omega'|$ の Nyquist 周波数におけるカットオフによるアーチファクト（偽のシグナル）を抑制する目的

で考案された Shepp-Logan フィルターもよく用いられる。

一般に関数 $a(x)$ と $b(x)$ のたたみ込み (convolution) 積分 $a * b(x)$ は次の式で定義される。

$$a * b(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} a(x - \tau)b(\tau)d\tau \quad (15)$$

$a * b(x)$ の一次元 Fourier 変換は、 $a(x)$ 、 $b(x)$ それぞれの一次元 Fourier 変換 $A(u)$ 、 $B(u)$ の積で与えられることが Fourier 変換の公式として知られている。すなわち

$$\mathcal{F}(a * b(x)) = A(u)B(u) \quad (16)$$

したがって FBP 法において、Fourier 空間においてフィルター関数 $|\omega'|$ をかけて逆 Fourier 変換することは、 $|\omega'|$ の逆 Fourier 変換 ($h(x)$ とする) で投影データ $p(x, \theta)$ をたたみ込むことに他ならない。すなわち

$$q(x, \theta) = p(x, \theta) * h(x) \quad (17)$$

このことを利用すると、上記の三段階の FBP 法のアルゴリズムは、以下のようにさらに簡略化される。

ステップ 1 : 実験で求めた投影データ $p(x, \theta)$ と $h(x)$ のたたみ込み積分

$$q(x, \theta) = p(x, \theta) * h(x) \quad (18)$$

を各 θ において計算する。

ステップ 2 : 多くの角度 θ ($0 \leq \theta < \pi$) で求めた $q(x, \theta)$ を逆投影して、 $\mu(x', y')$ を次の式により求める。

$$\mu(x', y') = \int_0^\pi q(x, \theta) d\theta \quad (19)$$

このアルゴリズムは Convolution Back-Projection (CBP) 法と呼ばれている。

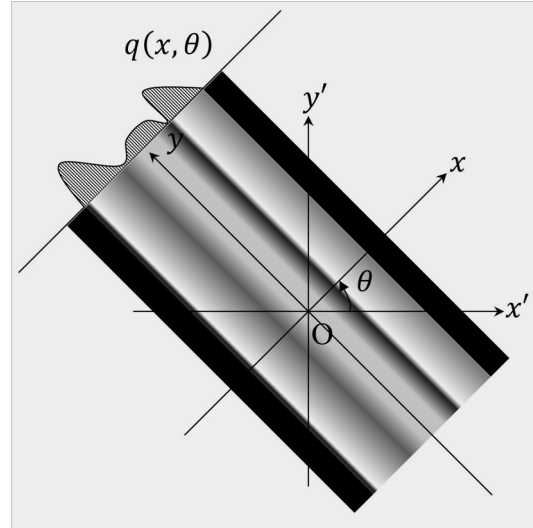


図 4 $q(x, \theta)$ の逆投影。

なお、数学の分野においては、二次元平面内で定義されたある関数の投影（線積分）に対して、その逆変換が存在することは 1917 年に Radon によって発見されていた。この積分変換は Radon 変換と呼ばれている[1]。

以上では、平行ビームを用いた場合について説明したが、ファンビームやコーンビームを用いる場合には、さらに複雑なアルゴリズムが必要になる（参考文献[2,3]）。平行ビームの場合の試料の透過率は、試料を 180° 回転したときの透過率と等価になるが、ファンビームやコーンビームの場合には、等価にならず、CT 再構成のために試料を 360° 回転する必要がある。

また、これまでは線吸収係数 $\mu(x',y')$ の再構成を行う場合について説明してきたが、CT 再構成のアルゴリズムは、線吸収係数のみに適用が限定されるものではなく、より一般性を有している。すなわち、多くの方向での投影像が実験的に求まりさえすれば、様々な物理量に対して、CT 再構成のアルゴリズムが適用可能である。例えば、X線の位相を利用することで、吸収を利用する場合に比べて高感度なイメージングが実現できることが知られており、X線位相コントラストイメージングと呼ばれているが、この場合には、試料によるX線の位相のシフトの投影が実験により定量的に取得できるため、位相（複素屈折率の実数部の 1 からのずれに相当）の CT 再構成が可能である。

問 1. ファンビームを用いた場合には、試料を 180° 回転したときの投影像は、もとの投影像と異なる。その理由について考えよ。また、ファンビーム CT を平行ビーム CT と近似できる条件について考察せよ。

3. 実際の CT 再構成の例

図 5 に平行ビーム CT の場合の CT 再構成の例を示す。図 5 (a) は投影像から取得したある z における投影 $p(x, \theta)$ に相当し、 x 、 θ を軸として二次元画像として表示したものである。この画像はサイノグラム (sinogram) と呼ばれている。平行ビーム CT の場合には、このサイノグラムが取得できれば、その面内の CT 再構成が可能となる。図 5 (b) は図 5 (a) のサイノグラムから CT 再構成を行った結果である。

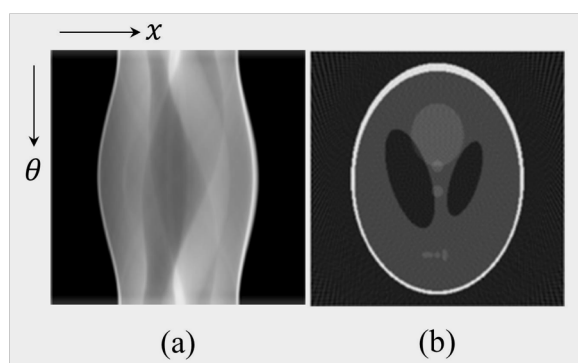


図 5 実際の CT 再構成の例。

4. 実習内容

本実習では、コンピュータプログラミングを通して、CT の原理について学ぶ。コンピュ

ータプログラミングには C++を用いる。

1. コンピュータプログラミングによる画像データの入出力

C++のプログラムにより、画像ファイルの入出力を行う方法について学ぶ。

【キーワード】画像フォーマット、データ型、C++プログラミング用語（クラス、インスタンス（オブジェクト）、配列など）

2. 仮想サイノグラムの出力

コンピュータプログラミングにより、仮想的なサイノグラムを生成してみよう。

3. サイノグラムからの CT 再構成

- ✧ 上記 2. で生成したサイノグラムを入力データとして、CBP 法を用いて、実際に CT 再構成を行ってみよう。
- ✧ 実際の実験データの CT 再構成を行ってみよう。
- ✧ フィルター関数を変えたり、不完全データを入力したりした場合に、CT 再構成の結果がどのように変わるか、試してみよう。

問 2. 投影 $p(x, \theta)$ の x に関する微分 $\frac{\partial p(x, \theta)}{\partial x}$ から CT 再構成を行う方法について考えよ（ヒント：Fourier 変換の公式を用いよ）。

【参考文献】

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Radon_transform
- [2] 斎藤恒雄、「画像処理アルゴリズム」（近代科学社）.
- [3] 篠原広行他、「コーンビーム CT 画像再構成の基礎」（医療科学社）