球面調和関数

平松信義

2019 年 6 月 10 日

球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ は以下の関係を満たす (参考ノート: 極座標表示の角運動量演算子とラプラシアン).

$$\begin{aligned} l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\theta,\phi) &= L^2 Y_l^m(\theta,\phi) \\ &= -\hbar^2[\frac{1}{sin\theta}\partial_\theta(sin\theta\partial_\theta)+\frac{1}{sin^2\theta}\partial_\phi^2]Y_l^m(\theta,\phi); \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} m\hbar Y_l^m(\theta,\phi) &= L_z Y_l^m(\theta,\phi) \\ &= -i\hbar\partial_\phi Y_l^m(\theta,\phi). \end{aligned} \tag{2}$$

式 (2) は Y_l^m の ϕ 依存性が $e^{im\phi}$ であることを意味する. すなわち $Y_l^m(\theta,\phi)=y_l^m(\theta)e^{im\phi}$.

$m=l$ の場合, さらに

$$\begin{aligned} 0 &= L_+ Y_l^l \\ &= \hbar e^{i\phi}(\partial_\theta + icot\theta\partial_\phi)Y_l^l \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ.

式 (2) を式 (3) に代入すると $0=(\partial_\theta - lcot\theta)Y_l^l$ であり, $Y_l^l(\theta,\phi)=c_l e^{il\phi}sin^l\theta$. ここで $c_l=(-1)^l\sqrt{\frac{1}{2\pi B(\frac{1}{2},l+1)}}=\frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$ は比例定数であり, 規格化条件

$$\begin{aligned} 1 &= |c_l|^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^1 d(cos\theta)Y_l^l(\theta,\phi)^* Y_l^l(\theta,\phi) \\ &= 4\pi|c_l|^2\int_0^1 d(cos\theta)(1-cos^2\theta)^l \\ &= 4\pi|c_l|^2\int_0^1\frac{dt}{2}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^l \\ &= 2\pi|c_l|^2 B(\frac{1}{2},l+1) \\ &= 2\pi|c_l|^2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} \\ &= 2\pi|c_l|^2\frac{\sqrt{\pi}\,l!}{\frac{\sqrt{\pi}\,(2l+2)!}{2^{2l+2}(l+1)!}} \\ &= 4\pi|c_l|^2\frac{(2^l l!)^2}{(2l+1)!} \end{aligned} \tag{4}$$

から, 符号を除いて定まる.

$m=l-1$ の場合,

$$\begin{aligned} Y_l^{l-1}(\theta,\phi) &= c_{ll}^- L_- Y_l^l(\theta,\phi) \\ &= c_{ll}^- e^{-i\phi}(-\partial_\theta + icot\theta\partial_\phi)c_l e^{il\phi}sin^l\theta \\ &= -2lc_{ll}^- c_l e^{i(l-1)\phi}cos\theta sin^{l-1}\theta. \\ &\equiv c_{l-1}e^{i(l-1)\phi}cos\theta sin^{l-1}\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

ただし, 比例係数 $c_{l-1}=(-1)^{l-1}\sqrt{\frac{1}{2\pi B(\frac{3}{2},l)}}$ は規格化条件

$$
\begin{aligned}
1=&|c_{l-1}|^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}d(cos\theta)Y_l^{l-1}(\theta,\phi)^*Y_l^{l-1}(\theta,\phi)\\
&=4\pi|c_{l-1}|^2\int_0^1 d(cos\theta)cos^2\theta(1-cos^2\theta)^{l-1}\\
&=4\pi|c_{l-1}|^2\int_0^1\frac{dt}{2}t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{l-1}\\
&=2\pi|c_{l-1}|^2B(\frac{3}{2},l)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

から, 符号を除いて定まる.

同様に一般の $m\geq 0$ の場合,

$$
\begin{aligned}
Y_l^m(\theta,\phi)=&c_{ll}^{-}...c_{lm-1}^{-}L_{-}^{l-m}Y_l^l(\theta,\phi)\\
&=c_{ll}^{-}...c_{lm-1}^{-}c_l[e^{-i\phi}(-\partial_\theta+icot\theta\partial_\phi)]^{l-m}e^{il\phi}sin^l\theta.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

と書けるが計算は複雑である。しかし, ここで

$$
\begin{aligned}
\partial_\theta cos^i\theta sin^j\theta=&-icos^{i-1}\theta sin^{j+1}\theta+jcos^{i+1}\theta sin^{j-1}\theta\\
&=[(i+j)cos^2\theta-i]cos^{i-1}\theta sin^{j-1}\theta
\end{aligned}
\tag{8}
$$

に注意すると, $Y_l^m(\theta,\phi)$ は $e^{im\phi}sin^m\theta$ に $cos\theta$ の $(l-m)$ 次の多項式がかかったものとして考えることができる。

特に $m=0$ の場合, $Y_l^0(\theta,\phi)$ は $cos\theta$ の l 次の多項式として考えることができる。$\partial_\theta=\frac{\partial(cos\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial(cos\theta)}=-sin\theta\frac{\partial}{\partial(cos\theta)}$ に注意すると,

$$
\begin{aligned}
l(l+1)\hbar^2Y_l^0(\theta,\phi)=&L^2Y_l^0(\theta,\phi)\\
&=-\hbar^2\frac{1}{sin\theta}\partial_\theta(sin\theta\partial_\theta)Y_l^0(\theta,\phi)\\
&=-\hbar^2\frac{\partial}{\partial(cos\theta)}[(1-cos^2\theta)\frac{\partial}{\partial(cos\theta)}]Y_l^0(\theta,\phi)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

は変数 $cos\theta$ とした Legendre の微分方程式と等価であり, $Y_l^0(\theta,\phi)$ は Legendre 多項式 $P_l(cos\theta)$ に比例する。

$m\leq 0$ に関しても, $m\geq 0$ とした上述の議論を繰り返すことで, $Y_l^{-|m|}(\theta,\phi)$ が $Y_l^{|m|}(\theta,\phi)^*$ に符号の違いを除いて一致することがすぐわかる。

参考文献

[1] J. J. Sakurai 現代の量子力学 (上) 3.6 章