Análise Combinatória, Probabilidades e Aplicações - Lista 03

Cleibson Aparecido de Almeida

9 de fevereiro de 2017

Exercício 01 - Para cada um dos experimentos abaixo, descreva o espaço amostral Ω adequado e apresente o número de elementos, quando for o caso.

a - Um dado é lançado três vezes e a sequência de números obtida é anotada.

$\Omega = \{A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : |A| = 3\}$

Considerando que a ordem importa, pois $[1, 2, 3] \neq [2, 1, 3]$, temos $A_6^3 = 120$ elementos.

b - Numa determinada cidade, no mês de março, conta-se o número de problemas nas tubulações de água do bairro x.

$\Omega = \{B \subseteq \{0, 1, 2, 3, ..., n\} : |B| = 1\}$

Neste caso, teremos $n + 1$ elementos.

c - Um fichário com 13 nomes contém três nomes de mulheres. Seleciona-se fica a ficha, até o último nome de mulher ser selecionado, e anota-se o número de fichas selecionadas.

$\Omega = \{C \subseteq \{1, 2, 3, .., 13\} : 3 \leq |C| \leq 13\}$

Considerando que as fichas são selecionadas sem reposição, temos **???**

d - De um grupo de seis pessoas A, B, C, D, E e F, sorteiam-se duas, uma após a outra, sem reposição, e anota-se a configuração formada.

$\Omega = \{D \subseteq \{A, B, C, D, E, F\} : |D| = 2\}$

Considerando que o sorteio é sem reposição, o número de elementos será $C_6^2 = 10$ elementos.

e - Como ficaria o espaço amostral do item c se as retiradas fossem com reposição.

???

f - De um pacote contendo 20 jujubas, observa-se quantas tem a cor vermelha.

$\Omega = \{F \subseteq \{1, 2, 3, ..., 20\} : 1 \leq |F| \leq 20\}$

O número de elementos será 20.

g - Registram-se o número de dias chuvosos e a precipitação total (em centímetros) durante uma semana em uma localidade.

Seja C (dias chuvosos) e P (precipitação em mm), temos o seguinte espaço amostral.

$\Omega = \{C \in \mathbb{Z}_+, P \in \mathbb{R} | C = [0, 7], P = [0, 200]$

h - Um dado é lançado em um alvo circular de raio unitário e observa-se o ponto acertado.

Sendo A (área do circulo=$\pi \times r^2$) e H (ponto acertado) nas posições x (horizontal) e y (vertical), temos:

$\Omega = \{H \in \mathbb{R}; H \subseteq A | A = \pi \times r^2, H = [x, y], x = [-1, 1], y = [-1, 1]\}$

Exercício 02 - Em cada um dos casos, verifique se $\mathcal{F}$ é σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

a

$\Omega = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{c\}, \emptyset\}$

Não é σ-álgebra, pois $\{a, b, c\} = \Omega$ não pertence a $\mathcal{F}$.

b

$\Omega = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2c\}, \{3\}, \{1, 2c\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

É σ-álgebra, pois todas as condições abaixo são satisfeitas.

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;
- $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

c

$\Omega = \mathbb{N}$ e $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} :$ A ou A^c é finito$\}$

É σ-álgebra, pois todas as condições abaixo são satisfeitas.

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;
- $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

d

$\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty \cup \mathcal{F}_\in\}$, em que $\mathcal{F}_\infty$ e $\mathcal{F}_\in$ são σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Não é σ-álgebra, pois $\{a, b, c\} = \Omega$ não pertence a $\mathcal{F}$.

Exercício 08 - Considere um experimento em que um elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ é selecionado ao acaso. Neste cenário, os eventos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$ são independentes?

Sejam as seguintes probabilidades:

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$

$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

- Verificando se os eventos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Então: $P(A \cap B) = \frac{1}{4} \iff P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Portanto A e B são independentes.

- Verificando se os eventos A e C são independentes se $P(A \cap C) = P(A)P(C)$.

Então: $P(A \cap C) = \frac{1}{4} \iff P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Portanto A e C são independentes.

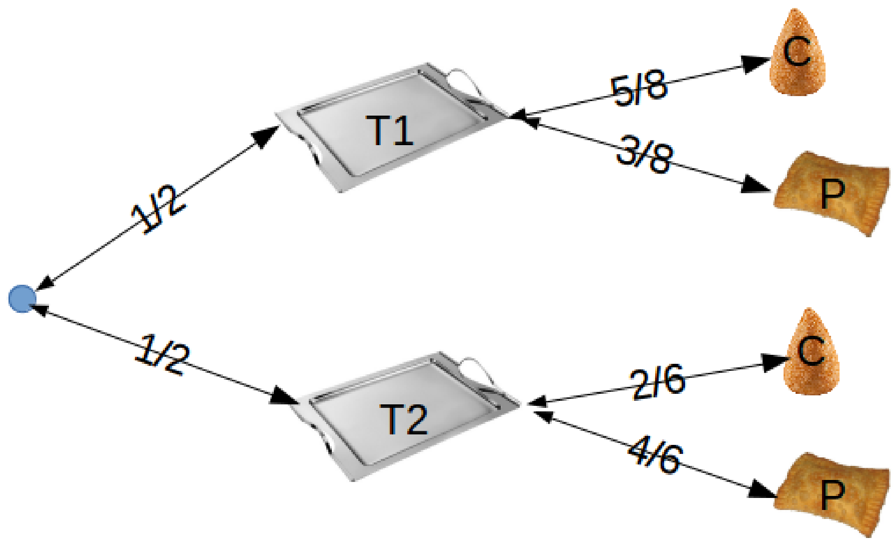
- Verificando se os eventos B e C são independentes se $P(B \cap C) = P(B)P(C)$.

Então: $P(B \cap C) = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
Portanto B e C são independentes.

No caso dos três eventos, temos $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ (devido ao elemento 1 pertencer aos três eventos). Porém, $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Portanto, A, B e C não são independentes entre si porque $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Exercício 11 - Alguns amigos estão em uma lanchonete. Sobre a mesa há duas travessas. Em uma delas há 3 pastéis e 5 coxinhas. Na outra há 2 coxinhas e 4 pastéis. Se ao acaso alguém escolher uma destas travessas e também ao acaso pegar um dos salgados, qual a probabilidade de se ter pegado um pastel?

Seja o modelo apresentado na figura a seguir:



Então:
$P(P) = P(P/T1) + P(P/T2) = (\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}) + (\frac{1}{2} \times \frac{4}{6}) = \frac{25}{48}$

Exercício 12 - Quando $P(A) = 1/2, P(B) = 3/4$ e $P(A \cup B) = 1$, quanto vale?

a) $P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A)P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cap B) = P(A)P(B) - P(A \cup B)$
$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - 1$
$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

b) $P(A^c \cap B^c)$

Seja $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c]$
$P[A \cup B] = 1 - P[(A \cup B)^c]$
$P[(A \cup B)^c] = 1 - P[A \cup B]$
$P[(A \cup B)^c] = 1 - 1 = \emptyset$

c) $P(A \cap B^c)$

Seja $P(A \cap B) = 1/4$
$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 1/2 - 1/4 = 1/4$

d) $P(A^c \cap B)$

Seja $P(A \cap B) = 1/4$
$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 3/4 - 1/4 = 1/2$

e) $P(A|B)$ e $P(B|A)$

Seja $P(A \cap B) = 1/4 = P(B \cap A)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

e

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$