

Análise Combinatória, Probabilidades e Aplicações - Lista 01

Arthur Cardoso Leite, Cleibson Aparecido de Almeida

20 de janeiro de 2017

Exercício 03

Dados $A, B_1, \dots, B_n \geq 1$, subconjuntos de $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$, mostre que:

a) $(A^c)^c = A$

Aplicando a propriedades 9 [pág.15], em [de Oliveira Morgado et al.1991].

Seja: $A^c = 1 - A$;

Então: $(1 - A)^c = (1 - (1 - A)) = 1 - 1 + A = A$

b) $(\bigcup_{i=1}^n B_i)^c = \bigcap_{i=1}^n B_i^c$ e $(\bigcap_{i=1}^n B_i)^c = \bigcup_{i=1}^n B_i^c$

Seja: $(\bigcup_{i=1}^n B_i)^c$

Aplicando as propriedades 10 e 11 [pág.15], em [de Oliveira Morgado et al.1991].

$$= (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)^c$$

$$= B_1^c \cap B_2^c \cap \dots \cap B_n^c$$

$$= \bigcap_{i=1}^n B_i^c$$

e seja: $(\bigcap_{i=1}^n B_i)^c$

$$= (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)^c$$

$$= B_1^c \cup B_2^c \cup \dots \cup B_n^c$$

$$= \bigcup_{i=1}^n B_i^c$$

c) Se $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ é uma partição de \mathcal{U} , então a coleção $\{B_1 \cap A, \dots, B_n \cap A\}$ é uma partição de A .

Aplicando a propriedade $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cup B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B)$ ao problema, temos que:

$$\begin{aligned}
& (\cup_{i \in I} B_i) \cup A \\
&= \cup_{i \in I} (B_i \cup A) \\
&= (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_n \cap A) \\
&= \{B_1 \cap A, B_2 \cap A, \dots, B_n \cap A\}
\end{aligned}$$

Exercício 09

De quantas maneiras podemos distribuir n objetos em duas caixas de modo que nenhuma caixa fique vazia, quando:

a) Os objetos e as caixas são diferentes?

Quando os objetos e caixas são diferentes, existindo n objetos, tem, dessa forma, 2^n modos de arranjá-los em duas caixas distintas.

Porém, excluí-se duas dessas opções, uma vez que nenhuma das duas caixas pode ficar vazia. Dessa forma, têm-se como resposta do exercício $2^n - 2$ modos de distribuir n objetos distintos em duas caixas distintas.

b) Os objetos são iguais e as caixas diferentes?

Considerando as caixas A e B , têm-se:

$$\begin{array}{cc}
A & B \\
**** & \dots nX * \quad I
\end{array}$$

Utilizando-se o conceito de Combinações Completas, têm-se:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

Uma vez que as caixas devem ter no mínimo um objeto, deve-se desconsiderar dois arranjos. Assim sendo, a resposta do problema é $n+1-2 = n-1$. Portanto, $n-1$ modos de arranjar os objetos.

Exercício 11

a) Um químico possui 10 tipos de substâncias: $/A_1, A_2, \dots, A_n/$. De quantos modos poderá combinar 6 dessas substâncias se, entre as dez, duas não podem estar juntas?

1º Caso: A_1 está na reação Arranjemos do seguinte modo: $A_1 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.

Como a ordem não importa neste caso, dividiremos o resultado por $5!$, resultando em 56 modos distintos.

2º Caso: A_2 está na reação Arranjemos do seguinte modo: $A_2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.

Como a ordem não importa neste caso, dividiremos o resultado por $5!$, resultando em 56 modos distintos.

3º Caso: Nem A_1 , nem A_2 estão na reação. Arranjemos do seguinte modo: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 20160$.

Como a ordem não importa neste caso, dividiremos o resultado por $6!$, resultando em 28 modos distintos.

Assim sendo, pelo Princípio Aditivo, têm-se $56 + 56 + 28 = 140$ reações distintas.

b) O mesmo químico tem a hipótese de que ao dissolver 5 doses de 2 ml das substâncias $/A_1, \dots, A_{10}/$ (as doses podem ser repetidas) em 5 ml de água, obterá uma solução útil ao combate da dengue. O químico precisa fazer um experimento no laboratório com todas as soluções possíveis. Qual é o número máximo de testes a serem feitos pelo químico? (suponha que a ordem de dissolução não afeta a solução final).

Como a ordem das substâncias não importa, temos pelo princípio da Combinação Completa a seguinte resolução:

$$\begin{array}{cccccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} \\ \text{*****} & \text{I} & \text{I} & \text{I} & \text{I} & \text{I} & \text{I} & \text{I} & \text{I} & \text{I} \end{array}$$

Assim sendo, temos $\frac{14!}{5! \times 9!} = 2002$. Logo, há 2002 testes a serem feitos.

Exercício 13

Seja \mathcal{F} a classe das funções que associam o conjunto $\{1, 2, \dots, 2n + 1\}$ ao conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$, $n \geq 1$, isto é:

$$\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, \dots, 2n + 1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n\}\}$$

Sejam ainda os seguintes subconjuntos de \mathcal{F} :

\mathcal{I} : constituído pelas funções de \mathcal{F} que associam a cada número ímpar um número par,

\mathcal{S} : constituído pelas funções sobrejetoras de \mathcal{F} .

Determine $|\mathcal{F}|$, $|\mathcal{I}|$ e $|\mathcal{S}|$.

Para calcular $|\mathcal{F}|$, é considerado que os elementos do conjunto de tamanho $2n$ obrigatoriamente devem receber pelo menos 1 relacionamento com qual-

quer um dos elementos do conjunto que possui $2n + 1$ elementos. Portanto, $|\mathcal{F}| = 2n^{2n+1}$.

Para encontrar $|\mathcal{I}|$, é considerado que os conjuntos se dividem em 2 subconjuntos (elementos pares e elementos ímpares). Assim sendo, o conjunto que possui $2n+1$ elementos é dividido da seguinte maneira: n elementos pares e $n+1$ elementos ímpares. O outro conjunto, que possui $2n$ elementos é dividido da seguinte maneira: n elementos pares e n elementos ímpares. Com isso, apenas a parte com $n+1$ (elementos ímpares) elementos do conjunto que possui $2n+1$ elementos irá se relacionar com os elementos do outro conjunto, ou seja, n^{n+1} . Resta então, permutar os demais elementos que não fazem parte da restrição, ou seja, $2n^n$. Portanto, aplicando o princípio multiplicativo temos que $|\mathcal{I}| = n^{n+1} \times 2n^n$.

Para a definição de $|\mathcal{S}|$, considera-se que todos elementos do conjunto com $2n$ elementos terá pelo menos uma relação com os elementos do outro conjunto de tamanho $2n + 1$. Sendo assim, a contrapartida desta relação terá de imediato uma C_{2n-1}^2 , pois o conjunto de tamanho $2n + 1$ tem 1 elemento a mais do que o outro conjunto, sendo que os elementos deste outro conjunto receberão pelo menos 2 relações de cada um dos elementos do conjunto de tamanho $2n + 1$. Além disso, sobrarão $(2n - 1)!$ elementos do conjunto de tamanho $2n + 1$ que se relacionarão com todos os elementos do conjunto de tamanho $2n + 1$, pois são eliminados dois elementos devido a primeira restrição já aplicada. Portanto, aplicando o princípio multiplicativo temos que $|\mathcal{S}| = C_{2n-1}^2 \times (2n - 1)!$.

Exercício 15

Determine os números de possíveis anagramas das palavras SUSSURRO, VESTIBULAR e BATATA.

a) SUSSURRO - Esta palavra possui repetição de letras, portanto será aplicada a regra da *permutação com elementos nem todos distintos*.

Temos então a seguinte organização das 8 letras: SSS UU RR O (3 S, 2 U, 2 R e 1 O), e com isso a fórmula será P_8^{3221}

$$\begin{aligned} &= C_8^3 \times C_5^2 \times C_3^2 \times C_1^1 \\ &= 56 \times 10 \times 3 \times 1 = 1680 \text{ anagramas} \end{aligned}$$

b) VESTIBULAR - Esta palavra não possui letras repetidas, portanto trata-se de uma *permutação simples*.

$$\begin{aligned}
&\text{Temos então } P_{10} \\
&= 10! \\
&= 10 \times 9 \times \dots \times 1 \\
&= 3628800 \text{ anagramas}
\end{aligned}$$

c) BATATA - Esta palavra possui repetição de letras, portanto será aplicada a regra da *permutação com elementos nem todos distintos*.

$$\begin{aligned}
&\text{Temos então a seguinte organização das 6 letras: AAA TT B (3 A, 2 T e 1 B), e com isso a fórmula será } P_6^{321} \\
&= C_6^3 \times C_3^2 \times C_1^1 \\
&= 20 \times 3 \times 1 = 60 \text{ anagramas}
\end{aligned}$$

Exercício 20

Quantas são as soluções não negativas da inequação $x + y + z \leq 2$?

Trata-se de um problema envolvendo **combinações completas**.

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p$$

$$\text{E sendo } C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)! \times p!}$$

Então, são apresentadas todas as possibilidades de solução da inequação:

$$x + y + z = 2 \rightarrow CR_3^2 \rightarrow C_4^2; \text{ aqui tem-se } n=3 \text{ e } p=2.$$

$$x + y + z = 1 \rightarrow CR_3^1 \rightarrow C_3^1; \text{ aqui tem-se } n=3 \text{ e } p=1.$$

$$x + y + z = 0 \rightarrow CR_3^0 \rightarrow C_2^0; \text{ aqui tem-se } n=3 \text{ e } p=0.$$

Aplicando o *principio aditivo*, temos que as soluções não negativas para inequação pode ser dada por $C_4^2 + C_3^1 + C_2^0 = 6 + 3 + 1 = 10$ maneiras de solucionar.

Referências

[de Oliveira Morgado et al.1991] de Oliveira Morgado, A. C., de Carvalho, J. B. P., Carvalho, P. C. P., and Fernandez, P. (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade*. Coleção do Professor de Matemática. Editora SBM, 9 edition.