# Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

## XLVI Programa de Verão IME/USP - 2017

## LISTA DE EXERCÍCIOS 2

- **Entrega:** em sala, no dia 26/01/2017.
- **Exercícios para entrega:** 2, 3, 8, 9, 16 e 18.

**Exercício 1.** Prove que

$$n! = \binom{n}{0}D_n + \binom{n}{1}D_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}D_1 + \binom{n}{n}D_0,$$

com a convenção de que $D_0 = 1$.

**Exercício 2.** Dois médicos devem examinar, durantes as mesmas $n$ horas seguidas, $2n$ pacientes, gastando 30 minutos com cada paciente. Cada um dos pacientes deve ser examinado pelos dois médicos. De quantos modos pode ser feito um horário compatível?

**Exercício 3.** Doze cavaleiros estão sentados ao redor de uma mesa redonda. Cada um dos cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para uma certa missão. Nesse grupo não poderá haver rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher o grupo.

**Exercício 4.** Quantos anagramas da palavra SUSSURRO não possuem duas letras S's seguidas?

**Exercício 5.** (Generalização do 1° Lema de Kaplansky) De quantos modos é possível formar um $p$-subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de modo que entre cada dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos $r$ elementos não escolhidos para o subconjunto?

**Exercício 6.** (Generalização do 2° Lema de Kaplansky) Refaça o problema anterior no caso circular. Nesse caso, por exemplo, tomando $n = 6$, o conjunto $\{1, 2, \ldots, 6\}$ é tal que entre 1 e 4 há dois elementos, entre 5 e 1 há um elemento, entre 6 e 4 há três elementos.

**Exercício 7.** (Mega-sena) Sorteiam-se 6 dos números $1, 2, 3, \ldots, 60$. Quantos desses sorteios possuem pelo menos dois números consecutivos?

**Exercício 8.** Em uma eleição de dois candidatos $A$ e $B$ há 30 eleitores. Imaginemos que o candidato $A$ ganha com 25 contra 15 votos.

**(a)** Quantas são os modos possíveis em que isto pode acontecer?

**(b)** Em quantos desses casos o candidato $A$ permanece em vantagem (nem sequer empata) desde primeiro voto apurado?

**(c)** Em quantos desses casos o candidato $A$ permanece sempre em vantagem ou empatado com o candidato $B$?

**Exercício 9.** Dois discos $A$ e $B$ são divididos em $2n$ setores iguais. No disco $A$, $n$ setores são pintados de azul e $n$ de vermelho. No disco $B$, os setores são pintados de azul ou vermelho de forma completamente arbitrária. Mostre que $A$ e $B$ podem ser superpostos de modo que pelo menos $n$ setores tenham cores coincidentes.

**Exercício 10.** 5 rapazes e 5 moças devem posar para uma fotografia, ocupando 5 degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantos modos podemos arrumar esse grupo?

**Exercício 11.** Uma partícula, estando no ponto $(x, y, z)$, pode mover-se para os pontos $(x+1, y, z)$ ou $(x, y+1, z)$ ou $(x, y, z+1)$. Quantos são os caminhos (com a menor distância possível) que a partícula pode percorrer para ir do ponto $(0, 0, 0)$ para o ponto $(a, b, c)$?

**Exercício 12.** Qual o número mínimo de pessoas que deve haver em um evento para garantir que pelo menos duas delas façam aniversário no mesmo dia?

**Exercício 13.** Mostre que dentre 9 pontos de um cubo de aresta 2, existem pelo menos dois pontos que se encontram a uma distância menor do que ou igual a $\sqrt{3}$ um do outro.

**Exercício 14.** Se uma urna contém 6 bolas vermelhas, 7 bolas verdes, 9 azuis e 6 bolas amarelhas, qual é menor número de bolas que devemos retirar (sem olhar) para que possamos ter certeza de ter tirado pelo menos 3 da mesma cor?

**Exercício 15.** Um restaurante possui 62 mesas com total de 314 cadeiras. É possivel garantir a existência de pelo menos uma mesa com pelo menos 6 cadeiras.

**Exercício 16.** Se A possui 8589934592 subconjuntos, qual é o numero de elementos de A?

**Exercício 17.** Calcule

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}, \quad \text{para } m < n.$$

**Exercício 18.** Calcule

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k}\binom{m}{k}, \quad \text{para } n \geq m.$$

**Exercício 19.** Partindo de

$$(x+1)^n(x+1)^n = (x+1)^{2n}$$

prove a fórmula de Lagrange

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

**Exercício 20.** Determine o termo independente de $x$ no desenvolvimento de

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{10}.$$