# Análise Combinatória, Probabilidades e Aplicações - Lista 03

Cleibson Aparecido de Almeida

9 de fevereiro de 2017

## Exercício 01 - Para cada um dos experimentos abaixo, descreva o espaço amostral $\Omega$ adequado e apresente o número de elementos, quando for o caso.

### a - Um dado é lançado três vezes e a sequência de números obtida é anotada.

$\Omega = \{A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} : |A| = 3\}$

Considerando que são 6 possibilidades para cada lançamento do dado e faremos 3 lançamentos, então teremos $6^3 = 216$ elementos. Não será descrito todo o conjunto devido ao seu tamanho ser grande. Porém $\Omega = \{\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 1, 3\}, ..., \{6, 6, 6\}\}$.

### b - Numa determinada cidade, no mês de março, conta-se o número de problemas nas tubulações de água do bairro x.

$\Omega = \{B \subseteq \{0, 1, 2, 3, ..., n\} : |B| = 1\}$

Neste caso, teremos $n + 1$ elementos.

Obs: Se considerar um conjunto de infinitos elementos, pode-se considerar que $n \to \infty$ e neste caso teríamos infinitos elementos.

**c - Um fichário com 13 nomes contém três nomes de mulheres. Seleciona-se ficha a ficha, até o último nome de mulher ser selecionado, e anota-se o número de fichas selecionadas.**

$\Omega = \{C \subseteq \mathbb{Z} : 3 \leq |C| \leq 13\}$

Considerando que as fichas são selecionadas uma a uma e precisamos de pelo menos 3 fichas, teremos 11 elementos. $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

**d - De um grupo de seis pessoas A, B, C, D, E e F, sorteiam-se duas, uma após a outra, sem reposição, e anota-se a configuração formada.**

$\Omega = \{D \subseteq \{A, B, C, D, E, F\} : |D| = 2$ em que $[D_i, D_j] \neq [D_j, D_i]\}$

Considerando que o sorteio é sem reposição e a ordem entre os dois sorteados importa, teremos 30 elementos.

Fazendo-se as combinações teríamos:

$\Omega = \{AB, AC, AD, AE, AF,$
$BA, BC, BD, BE, BF,$
$CA, CB, CD, CE, CF,$
$DA, DB, DC, DE, DF,$
$EA, EB, EC, EF,$
$FA, FB, FC, FD, FE\}$

**e - Como ficaria o espaço amostral do item d se as retiradas fossem com reposição.**

$\Omega = \{D \subseteq \{A, B, C, D, E, F\} : |D| = 2$ em que $[D_i, D_j] = [D_i, D_i]$ ou $[D_i, D_j] \neq [D_j, D_i]\}$

Considerando que o sorteio é com reposição e a ordem entre os dois sorteados importa, teremos os 30 elementos encontrados anteriormente e mais 6 elementos representando as reposições $\{AA, BB, CC, DD, EE, FF\}$. Portanto, 36 elementos.

### f - De um pacote contendo 20 jujubas, observa-se quantas tem a cor vermelha.

$\Omega = \{F \subseteq \{0, 1, 2, 3, ..., 20\} : 1 \leq |F| \leq 20\}$

O número de elementos será 21. Ou seja:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

### g - Registram-se o número de dias chuvosos e a precipitação total (em centímetros) durante uma semana em uma localidade.

Seja C (dias chuvosos) e P (precipitação em cm), temos o seguinte espaço amostral.

$\Omega = \{C \in \mathbb{Z}, P \in \mathbb{R} | C = [0, 7], P = [0, \infty]$

Portanto, como P pode variar entre zero e infinito, teríamos infinitos elementos.

### h - Um dado é lançado em um alvo circular de raio unitário e observa-se o ponto acertado.

Sendo as posições x (horizontal) e y (vertical) onde o dado será lançado, temos:

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Neste caso, o total de elementos será infinitos pontos.

## Exercício 02 - Em cada um dos casos, verifique se $\mathcal{F}$ é $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\Omega$.

### a

$\Omega = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{c\}, \emptyset\}$

Não é $\sigma$-álgebra, pois $\{a, b, c\} = \Omega$ não pertence a $\mathcal{F}$.

### b

$\Omega = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2c\}, \{3\}, \{1, 2c\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

É $\sigma$-álgebra, pois todas as condições abaixo são satisfeitas.

- $\Omega \in \mathcal{F}$;

- Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;

- $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

### c

$\Omega = \mathbb{N}$ e $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} :$ A ou $A^c$ é finito$\}$

É $\sigma$-álgebra, pois todas as condições abaixo são satisfeitas.

- $\Omega \in \mathcal{F}$;

- Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;

- $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

### d

$\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty \cup \mathcal{F}_\in\}$, em que $\mathcal{F}_\infty$ e $\mathcal{F}_\in$ são $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Não é $\sigma$-álgebra, pois $\Omega$ não pertence a $\mathcal{F}$.

## Exercício 08 - Considere um experimento em que um elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ é selecionado ao acaso. Neste cenário, os eventos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1, 4\}$ são independentes?

Sejam as seguintes probabilidades:

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$
$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

- Verificando se os eventos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Então: $P(A \cap B) = \frac{1}{4} \iff P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Portanto A e B são independentes.

- Verificando se os eventos A e C são independentes se $P(A \cap C) = P(A)P(C)$.

Então: $P(A \cap C) = \frac{1}{4} \iff P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Portanto A e C são independentes.

- Verificando se os eventos B e C são independentes se $P(B \cap C) = P(B)P(C)$.

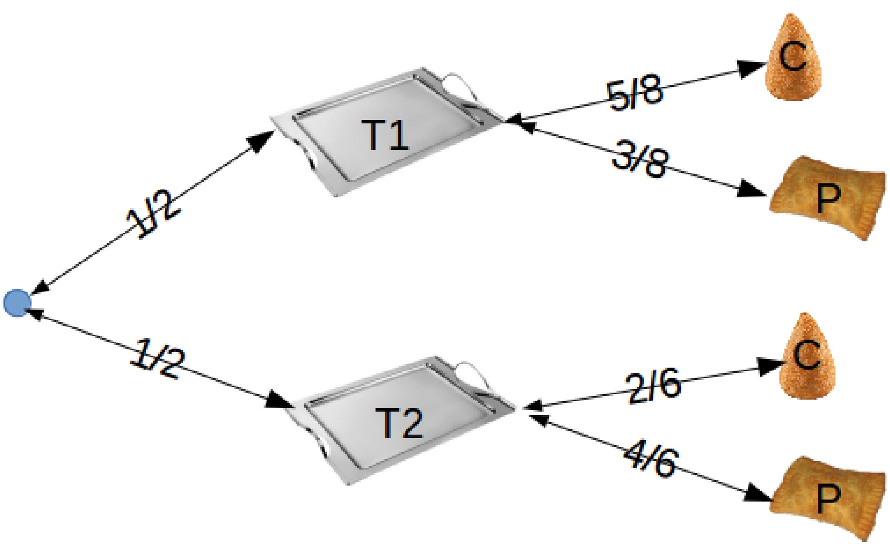
Então: $P(B \cap C) = \frac{1}{4} \iff P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Portanto B e C são independentes.

No caso dos três eventos, temos $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ (devido ao elemento 1 pertencer aos três eventos). Porém, $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Portanto, A, B e C não são independentes entre si porque $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

**Exercício 11 - Alguns amigos estão em uma lanchonete. Sobre a mesa há duas travessas. Em uma delas há 3 pastéis e 5 coxinhas. Na outra há 2 coxinhas e 4 pastéis. Se ao acaso alguém escolher uma destas travessas e também ao acaso pegar um dos salgados, qual a probabilidade de se ter pegado um pastel?**

Seja o modelo apresentado na figura a seguir:




Então:
$P(P) = P(P/T1) + P(P/T2) = (\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}) + (\frac{1}{2} \times \frac{4}{6}) = \frac{25}{48}$

## Exercício 12 - Quando $P(A) = 1/2, P(B) = 3/4$ e $P(A \cup B) = 1$, quanto vale?

### a) $P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A)P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) - P(A \cup B)$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - 1$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

### b) $P(A^c \cap B^c)$

Seja $P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c]$

$$P[A \cup B] = 1 - P[(A \cup B)^c]$$
$$P[(A \cup B)^c] = 1 - P[A \cup B]$$
$$P[(A \cup B)^c] = 1 - 1 = 0$$

### c) $P(A \cap B^c)$

Seja $P(A \cap B) = 1/4$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 1/2 - 1/4 = 1/4$$

### d) $P(A^c \cap B)$

Seja $P(A \cap B) = 1/4$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 3/4 - 1/4 = 1/2$$

### e) $P(A|B)$ e $P(B|A)$

Seja $P(A \cap B) = 1/4 = P(B \cap A)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

e

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$