Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações

XLVI Programa de Verão IME/USP - 2017

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

- **Entrega:** em sala, no dia 09/02/2017.
- **Exercícios para entrega:** 1, 2, 5, 8, 11 e 12.

Exercício 1. Para cada um dos experimentos abaixo, descreva o espaço amostral Ω adequado e apresente o número de elementos, quando for o caso.

(a) Um dado é lançado três vezes e a sequência de números obtida é anotada.

(b) Numa determinada cidade, no mês de março, conta-se o número de problemas nas tubulações de água do bairro X.

(c) Um fichário com 13 nomes contém três nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha, até o último nome de mulher ser selecionado, e anota-se o número de fichas selecionadas.

(d) De um grupo de seis pessoas A, B, C, D, E, F, sorteiam-se duas, uma após outra, sem reposição, e anota-se a configuração formada.

(e) Como ficaria o espaço amostral do item **c** se as retiradas fossem com reposição?

(f) De um pocote contendo 20 jujubas, observa-se quantas têm a cor vermelha.

(g) Registram-se o número de dias chuvosos e a precipitação total (em centímetros) durante uma semana em uma localidade.

(h) Um dado é lançado em um alvo circular de raio unitário e observa-se o ponto acertado.

Exercício 2. Em cada um dos casos, verifique se $\mathcal{F}$ é $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω.

(a) $\Omega = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{c\}, \emptyset\}$.

(b) $\Omega = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

(c) $\Omega = \mathbb{N}$ e $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ ou } A^c \text{ é finito}\}$.

(d) $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, em que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Exercício 3. Dado $B \subseteq \Omega$, verifique se $\mathcal{F}_B = \{A \cap B : A \subseteq \Omega\}$ é σ-álgebra de subconjuntos de B.

Exercício 4. Considere um modelo probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sejam A, B e C três eventos em $\mathcal{F}$. Usando esses eventos, encontre as expressões para os seguintes:

(a) Somente A ocorre.

(b) A e C ocorrem, mas não B.

(c) Pelo menos um dos três eventos ocorrem.

(d) Todos os três eventos ocorrem.

(e) Nenhum desses eventos ocorre.

(f) Pelo menos dois desses eventos ocorre.

(g) No máximo um deles ocorre.

(h) No máximo dois deles ocorrem.

(i) Exatamente dois desses eventos ocorrem.

Exercício 5. Dado $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}_1 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ e $\mathbb{P}_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ duas medidas de probabilidade, verifique se

(a) $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{I}_A(w_1)$, é uma medida de probabilidade.

(b) $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \min\{\mathbb{P}_1(A), \mathbb{P}_2(A)\}$, é uma medida de probabilidade.

Exercício 6. Um baralho comum é embaralhado. Qual é a probabilidade de que as quatro cartas do topo tenham

(a) valores diferentes?

(b) naipes diferentes?

Exercício 7. Um dado honesto é jogado três vezes e os resultados são anotados na ordem de ocorrência. Assumindo que todos os resultados são igualmente prováveis, calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

- A\{os três resultados são diferentes\};
- \{a soma dos dois primeiros resultados é par\};
- \{o produto dos resultados é ímpar\}.

Exercício 8. Considere um experimento em que um elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ é selecionado ao acaso. Neste cenário, os eventos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ e $C = \{1, 4\}$ são independentes? Justifique sua resposta.

Exercício 9. Um indivíduo tem quatro moedas no bolso, sendo que uma delas tem cara nas duas faces e as demais são normais. Ele fecha os olhos, escolhe uma delas ao acaso e lança. Qual é a probabilidade de que a face da moeda que fica para cima seja cara? Ele abre os olhos e observa que a face para cima é cara. Qual é a probabilidade de que a outra face da moeda também seja cara?

Exercício 10. Numa fábrica de parafusos, as máquinas A, B, C produzem respectivamente 20, 30 e 50 por cento do total. De sua produção, 6, 8, e 7 por cento são defeituosos. Um parafuso é retirado ao acaso da produção e se verifica que o mesmo está defeituoso. Qual é a probabilidade que ele tenha sido manufaturado pela máquinas A?

Exercício 11. Alguns amigos estão em uma lanchonete. Sobre a mesa há duas travessas. Em uma delas há 3 pastéis e 5 coxinhas. Na outra há 2 coxinhas e 4 pastéis. Se ao acaso alguém escolher uma destas travessas e também ao acaso pegar um dos salgados, qual a probabilidade de se ter pegado um pastel?

Exercício 12. Quando $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 3/4$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$, quanto vale

(a) $\mathbb{P}(A \cap B)$?

(b) $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$?

(c) $\mathbb{P}(A \cap B^c)$?

(d) $\mathbb{P}(A^c \cap B)$?

(e) $\mathbb{P}(A \mid B)$ e $\mathbb{P}(B \mid A)$?

Exercício 13. Você lança três moedas honestas. Naturalmente você já sabe que pelo menos dois dos lançamentos devem produzir o mesmo resultado. O outro lançamento pode resultar em cara ou coroa com a mesma probabilidade. Portanto, a probabilidade de três lançamentos com resultados iguais vale 1/2. Este argumento está correto?

Exercício 14. Sejam A e B eventos independentes. Mostre que A^c e B são independentes e deduza que A^c e B^c são independentes.

Exercício 15. Sejam A e B eventos com probabilidade não nula de ocorrência. Mostre que

(a) $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

(b) $\mathbb{P}(A \mid B) < \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B \mid A) < \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

(c) $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

(d) Se $B \subseteq A$, então $\mathbb{P}(A \mid B) = 1$.

(e) Se $A \subseteq B$, então $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)/\mathbb{P}(B)$.

(f) Se $A \cap B = \emptyset$, então $\mathbb{P}(A \mid B) = 0$.