

# Análise Combinatória, Probabilidades e Aplicações - Lista 01

Arthur Cardoso Leite, Cleibson Aparecido de Almeida

19 de janeiro de 2017

## Exercício 03

Dados  $A, B_1, \dots, B_n \geq 1$ , subconjuntos de  $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ , mostre que:

a)  $(A^c)^c = A$

Seja:  $A^c = 1 - A$ ;

Então:  $(1 - A)^c = (1 - (1 - A)) = 1 - 1 + A = A$

b)  $(\bigcup_{i=1}^n B_i)^c = \bigcap_{i=1}^n B_i^c$  e  $(\bigcap_{i=1}^n B_i)^c = \bigcup_{i=1}^n B_i^c$

Seja:  $(\bigcup_{i=1}^n B_i)^c$

$$= (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)^c$$

$$= B_1^c \cup B_2^c \cup \dots \cup B_n^c$$

$$= B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$$

$$= \bigcap_{i=1}^n B_i^c$$

e seja:  $(\bigcap_{i=1}^n B_i)^c$

$$= (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)^c$$

$$= B_1^c \cap B_2^c \cap \dots \cap B_n^c$$

$$= B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$$

$$= \bigcup_{i=1}^n B_i^c$$

c) Se  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$  é uma partição de  $\mathcal{U}$ , então a coleção  $\{B_1 \cap A, \dots, B_n \cap A\}$  é uma partição de  $A$ .

Aplicando a propriedade  $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cup B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B)$  ao problema, temos que:

$$\begin{aligned}
& (\cup_{i \in I} B_i) \cup A \\
&= \cup_{i \in I} (B_i \cup A) \\
&= (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_n \cap A) \\
&= \{B_1 \cap A, B_2 \cap A, \dots, B_n \cap A\}
\end{aligned}$$

## Exercício 09

De quantas maneiras podemos distribuir  $n$  objetos em duas caixas de modo que nenhuma caixa fique vazia, quando:

a) Os objetos e as caixas são diferentes?

Quando os objetos e caixas são diferentes, existindo  $n$  objetos, tem, dessa forma,  $2^n$  modos de arranjá-los em duas caixas distintas.

Porém, excluí-se duas dessas opções, uma vez que nenhuma das duas caixas pode ficar vazia. Dessa forma, têm-se como resposta do exercício  $2^n - 1$  modos de distribuir  $n$  objetos distintos em duas caixas distintas.

b) Os objetos são iguais e as caixas diferentes?

Considerando as caixas  $A$  e  $B$ , têm-se:

$$\begin{array}{cc}
A & B \\
**** & \dots nX * \quad I
\end{array}$$

Utilizando-se o conceito de Combinações Completas, têm-se:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

Uma vez que as caixas devem ter no mínimo um objeto, deve-se desconsiderar dois arranjos. Assim sendo, a resposta do problema é  $n+1-2 = n-1$ . Portanto,  $n-1$  modos de arranjar os objetos.

## Exercício 11

a) Um químico possui 10 tipos de substâncias:  $/A_1, A_2, \dots, A_n/$ . De quantos modos poderá combinar 6 dessas substâncias se, entre as dez, duas não podem estar juntas?

**1º Caso:**  $A_1$  está na reação Arranjemos do seguinte modo:  $A_1 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ .

Como a ordem não importa neste caso, dividiremos o resultado por  $5!$ , resultando em 56 modos distintos.

**2º Caso:**  $A_2$  está na reação Arranjemos do seguinte modo:  $A_2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ .

Como a ordem não importa neste caso, dividiremos o resultado por  $5!$ , resultando em 56 modos distintos.

**3º Caso:** Nem  $A_1$ , nem  $A_2$  estão na reação. Arranjemos do seguinte modo:  $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 20160$ .

Como a ordem não importa neste caso, dividiremos o resultado por  $6!$ , resultando em 28 modos distintos.

Assim sendo, pelo Princípio Aditivo, têm-se  $56 + 56 + 28 = 140$  reações distintas.

b) O mesmo químico tem a hipótese de que ao dissolver 5 doses de 2 ml das substâncias  $/A_1, \dots, A_{10}/$  (as doses podem ser repetidas) em 5 ml de água, obterá uma solução útil ao combate da dengue. O químico precisa fazer um experimento no laboratório com todas as soluções possíveis. Qual é o número máximo de testes a serem feitos pelo químico? (suponha que a ordem de dissolução não afeta a solução final).

Como a ordem das substâncias não importa, temos pelo princípio da Combinação Completa a seguinte resolução:

$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$A_7$	$A_8$	$A_9$	$A_{10}$
*****	I	I	I	I	I	I	I	I	I

Assim sendo, temos  $\frac{14!}{5! \times 9!} = 2002$ . Logo, há 2002 testes a serem feitos.

## Exercício 13

Seja  $\mathcal{F}$  a classe das funções que associam o conjunto  $\{1, 2, \dots, 2n + 1\}$  ao conjunto  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ ,  $n \geq 1$ , isto é:

$$\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, \dots, 2n + 1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n\}\}$$

Sejam ainda os seguintes subconjuntos de  $\mathcal{F}$ :

$\mathcal{I}$  : constituído pelas funções de  $\mathcal{F}$  que associam a cada número ímpar um número par,

$\mathcal{S}$  : constituído pelas funções sobrejetoras de  $\mathcal{F}$ .

Determine  $|\mathcal{F}|$ ,  $|\mathcal{I}|$  e  $|\mathcal{S}|$ .

## Exercício 15

Determine os números de possíveis anagramas das palavras SUSSURRO, VESTIBULAR e BATATA.

a) SUSSURRO - Esta palavra possui repetição de letras, portanto será aplicada a regra da *permutação com elementos nem todos distintos*.

Temos então a seguinte organização das 8 letras: SSS UU RR O (3 S, 2 U, 2 R e 1 O), e com isso a fórmula será  $P_8^{3221}$

$$= C_8^3 \times C_5^2 \times C_3^2 \times C_1^1$$
$$= 56 \times 10 \times 3 \times 1 = 1680 \text{ anagramas}$$

b) VESTIBULAR - Esta palavra não possui letras repetidas, portanto trata-se de uma *permutação simples*.

Temos então  $P_{10}$

$$= 10!$$
$$= 10 \times 9 \times \dots \times 1$$
$$= 3628800 \text{ anagramas}$$

c) BATATA - Esta palavra possui repetição de letras, portanto será aplicada a regra da *permutação com elementos nem todos distintos*.

Temos então a seguinte organização das 6 letras: AAA TT B (3 A, 2 T e 1 B), e com isso a fórmula será  $P_6^{321}$

$$= C_6^3 \times C_3^2 \times C_1^1$$
$$= 20 \times 3 \times 1 = 60 \text{ anagramas}$$

## Exercício 20

Quantas são as soluções não negativas da inequação  $x + y + z \leq 2$ ?

Trata-se de um problema envolvendo **combinações completas**.

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p$$

$$\text{E sendo } C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)! \times p!}$$

Então, são apresentadas todas as possibilidades de solução da inequação:

$$x + y + z = 2 \rightarrow CR_3^2 \rightarrow C_4^2; \text{ aqui tem-se } n=3 \text{ e } p=2.$$

$$x + y + z = 1 \rightarrow CR_3^1 \rightarrow C_3^1; \text{ aqui tem-se } n=3 \text{ e } p=1.$$

$$x + y + z = 0 \rightarrow CR_3^0 \rightarrow C_2^0; \text{ aqui tem-se } n=3 \text{ e } p=0.$$

Aplicando o *principio aditivo*, temos que as soluções não negativas para inequação pode ser dada por  $C_4^2 + C_3^1 + C_2^0 = 6 + 3 + 1 = 10$  maneiras de solucionar.