ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Университет ИТМО

Отчёт по лабораторной работе № 3

«Амортизационный анализ операций в бинарных деревьях»

Выполнил работу:

Быстриков Дмитрий Денисович

Академическая группа:

№J3214

Санкт-Петербург 2025

1. **Введение**

# Цель– провести амортизационный анализ операций удаления и вставки в бинарных деревьях с использованием метода потенциалов.

Задачи:

1. Определить функцию потенциала
2. Проанализировать его изменение
3. Показать амортизационную стоимость операций, используя лемму о перемещении

вверх и лемму о такси.

1. **Теоретическая подготовка**

Операции вставки в бинарных деревьях выполняется на основе метода спуска, начиная с корня если дерево не пустое, мы сравниваем новый узел с текущим, спускаясь пока у текущего узла не будет потомков. Амортизированная стоимость этой операции, составляет O(log n). При удалении мы ищем минимальный узел в правом поддереве (если такое есть) и заменяем удаляемый элемент на него, после чего рекурсивно удаляем его преемника (чье значение мы копировали). Амортизированная стоимость этой операции также составляет O(log n)

Введем потенциал Φ как сумму потенциалов всех узлов дерева. Для каждого узла x определим его потенциал как:  
ф(x) = |size(left(x)) - size(right(x))|

Амортизационная стоимость операции = реальная стоимость + разность потенциалов (i, i-1).

Анализ операции вставки:

При вставке нового узла z:

1. Спускаемся от корня до места вставки (стоимость O(h))
2. Вставляем новый узел (стоимость O(1))
3. Обновляем потенциалы вдоль пути

Путь вставки содержит узлы v0, v1, v2, v3…. (v0 – корень)

Для каждого узла v на пути:

До вставки: ф(v) = |L - R|

После вставки: ф(v) = |L' - R'|

Возможны два случая:

Вставка в меньшее поддерево: |Δ ф(v) | ≤ 1

Вставка в большее или равное поддерево: |Δ ф(v) | = 1

Новый узел z становится корнем поддерева размера 1. По лемме о верхе, его потенциал: ф(z) = 0, изменение потенциала Δ ф(z) = 0-0 = 0

Cуммарное изменение потенциала:

Δ Ф = sum(Δ ф(v)) + ф(z) <= O(h) где h – высота дерева

Фактическая стоимость:

С = O(h)

Амортизационная стоимость

С\_a = C+ Δ Ф = O(h)

Суммарная амортизированная стоимость

Sum(С\_a) = sum(C\_a + ф(n) – ф(0)) <= O(h) + O(n log n)

Учитывая что умма высот для n случайных вставок составляет O(n log n), получаем:

Sum(С\_a) <= O(n log n)

Средняя амортизированная стоимость операции вставки

С\_a = Sum(C\_a)/n = O(log n)

Анализ операции удаления:

При удалении узла z:

1. Спускаемся от корня до узла(о(h))
2. Удаление (несколько случаев)
3. Восстановление свойств дерева

Случай 1 (удаление листа) c = О(1)

С\_a = c + ΔФ ≤ 1 + 0 = O(1)

Случай 2 (удаление листа с потомком) c = O(1)

С\_a = c + ΔФ ≤ 1 + 0 = O(1)

Cлучай 3(удаление листа с двумя потомками) с = О(h) – ищем преемника

ΔΦ = -ф(v) + [изменения вдоль пути]

Так как ф(v) = O(log n) (для сбалансированного дерева), то: ΔΦ = - O(log n)

С\_a = c + ΔФ ≤ О(h) - O(log n)

1. **Заключение**

Метод потенциалов в сочетании с леммой о такси и леммой о верхе показывает, что:

Для операции удаления:

В худшем случае: Отдельное удаление может быть дорогим (O(n))

В среднем по последовательности стоимость удаления составляет O(log n)

Для операции вставки:

В худшем случае: амортизированная стоимость вставки O(n)

В среднем случае: амортизированная стоимость вставки O(log n)