Cours de Recherche Opérationnelle (RO)

Dr. Cheikh GUEYE
Université Cheikh Anta Diop de Dakar (UCAD, Sénégal)
Université Claude Bernard Lyon 1 (UCBL, France)
Titulaire d'un Doctorat en Mathématiques appliquées (UCBL-Lyon)
Titulaire d'un Doctorat en Analyse, Statistiques et Applications (UCAD-Dakar)
Laboratoire de Mathématiques et Applications (LMA-UCAD)
cheikh.gueye1990@yahoo.fr, *cheikh39.gueye@ucad.edu.sn*

Institut Supérieur d'Informatique — **Dép:** Génie Info

Niveau: Licence 2 Génie Logiciel — **Année:** 2025 - 2026

11 novembre 2025

Plan

Informations générales

1. **Intitulé du cours** : Recherche Opérationnelle (RO)
2. **Niveau** : Licence/Master (selon approfondissement)
3. **Volume horaire** : 20h Cours + 10h TD/TP
4. **Pré requis** :
    - Mathématiques (algèbre linéaire, logique, probabilités de base)
    - Algorithmique et structures de données
    - Programmation (Python/R/Java/C++ ou langage équivalent)
    - Tableur Excel.
    - Logiciel Géogébra.

Objectifs du cours

Ce cours est une initiation à la modélisation et à la résolution dans le cadre de la programmation linéaire. L'objectif poursuivi est de fournir des éléments aux étudiants pour :

1. Comprendre les fondements de la Recherche Opérationnelle et leurs applications au développement logiciel.
2. Apprendre à construire des modèles mathématiques.
3. Modéliser des prob de gestion, d'optimisation et d'ingénierie logicielle.
4. Connaître le fonctionnement de l'algorithme du simplexe.
5. Utiliser des méthodes quantitatives et algo pour la prise de décision.
6. Développer des applications logicielles intégrant des modèles RO (planification, affectation, optimisation des ressources).
7. Interpréter les principaux résultats d'une analyse de sensibilité et en connaître les limites.
8. Maîtriser un logiciel d'optimisation.

- La recherche opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.
- Traite des problèmes d'optimisation :
  - **Maximisation** d'un profit, d'une performance, d'un rendement,...
  - **Minimisation** d'un coût, d'une dépense, ...
- La démarche méthodologique utilisée pour résoudre un problème de décision à l'aide de la RO :
  - Identification des variables de décision ;
  - décrire les contraintes ;
  - et établir la fonctions objectif ou la fonction économique.
  - Passage du problème réel (ou un problème posé en entreprise) au modèle mathématique (programmation linéaire ou modèle linéaire).

Types de problèmes traités

Lorsqu'on est confronté à un problème

- Qui comprend un nombre fini (souvent très grand) de solutions admissibles parmi lesquelles on cherche la solution optimale ou proche de l'optimum : **Problème combinatoire**
- Qui consiste à trouver une solution optimale face à un problème dont les termes dépendent de l'interrelation entre entre ses propres agissements et ceux d'autres décideurs : **Problème concurrentiel**.
- Qui se pose en terme incertain : **Problème aléatoire**

Origines

- Pendant la Seconde Guerre mondiale : Pour fournir des techniques d'optimisation des ressources militaires.

Le premier sucés obtenu en 1940 par le Prix Nobel de physique **Patrick Blackett** qui résolut un problème d'implantation optimale de radars de surveillance.

- Le qualificatif « opérationnelle » vient du fait que les premières applications de cette discipline avait trait aux opérations militaires.

Expansion

- Après la seconde guerre mondiale (1950), la recherche opérationnelle fait son entrée dans les entreprises.
- Pendant les années 50 et 60, l'intérêt et le développement de la Recherche Opérationnelle a agrandi dans la suite de l'application sur le commerce et l'industrie. Prenons l'exemple du problème de calcul du projet optimal de transport de sable de la construction aux travaux d'édification à Moscou, où il y avait 10 points d'origine et 230 destinations. Pour la résolution ils ont fait usage d'un ordinateur Strena dans le mois de juin de 1958, et après 10 jours de travail, il a fourni une réduction du 11 % de coûts par rapport aux coûts originaux prévus.

Grâce à l'informatique, elle a pris un essor remarquable dans presque tous les domaines.

- Développement de la politique national d'administration de l'eau, y compris les nouvelles installations, les procédés d'opérations et les coûts (Ministère hollandais de l'infrastructure et de l'environnement (The Netherlands Rijkswaterstaat), 1985).
- Distribution optimal des ressources hydriques et thermiques dans le système national de génération d'énergie (Electrobras/CEPAL Brasil, 1986).
- Restructuration total de la chaîne d'approvisionnement entre les fournisseurs, les usines, les centres de distribution, les endroits potentiels et les zones de commerce (Digital Équipement Corp., 1995).
- Optimisation du mélange d'ingrédients disponibles pour que les combustibles obtenus atteindraient aux demandes de vente et de qualité (Texaco, Inc., 1989).
- etc.

Définition du problème

Objectif : Comprendre clairement la situation à étudier.

1. Identifier le contexte et les objectifs (maximiser, minimiser, équilibrer. . .).
2. Déterminer les ressources disponibles (moyens, contraintes, données).
3. Identifier les décideurs, les acteurs et les variables du problème.

Exemple : Une entreprise veut minimiser ses coûts de transport entre plusieurs dépôts et clients.

La recherche opérationnelle est une discipline des mathématiques appliquées qui s'intéresse à l'application du savoir mathématique aux autres domaines.

La programmation linéaire, la programmation mathématique, la programmation floue, la programmation multicritère, la programmation stochastique, la programmation dynamique, l'optimisation et la recherche opérationnelle ; la théorie des graphes ; la théorie des jeux ; la théorie du contrôle optimal, l'analyse numérique, les bio-mathématiques, la bio-informatique, la théorie de l'information ; les probabilités et les statistiques, les mathématiques financières et l'actuariat ; la cryptologie et, jusqu'à un certain point, la combinatoire et la géométrie finie ; telle qu'appliquée à l'analyse des réseaux, ainsi qu'une bonne partie de ce qu'on appelle l'informatique sont autant de domaines d'application des mathématiques.

Le boum de la recherche opérationnelle coïncide avec la seconde guerre mondiale. Historiquement, le premier terme introduit fut celui de **programmation linéaire** inventé par George Dantzig dans les années 1940. Le terme programmation vient de l'usage du mot programme par les forces armées américaines pour établir des horaires de formation et des choix logistiques que Dantzig étudiait à l'époque. L'emploi du terme « programmation » avait également un intérêt pour débloquer des crédits en une époque où la planification devenait une priorité des gouvernements.

Outils scientifiques :

- Mathématiques Appliquées (Optimisation, Probabilités, Algèbre, Graphes, Jeux, Décision,. . .) ;
- Informatique (Algorithmique, Complexité, Contraintes)
- La recherche opérationnelle est avant tout un outil d'aide à la décision.

L'approche de la recherche opérationnelle face à un problème applicatif consiste à :

- élaborer un modèle (résultat d'un consensus entre le demandeur et le chercheur) ;
- développer un algorithme de résolution exacte ou approchée ;
- évaluer la qualité des solutions produites par l'algorithme dans l'environnement réel du problème.

Le chercheur opérationnel cherchera à fournir :

- un outil (logiciel) aussi générique que possible, i.e : utilisable et performant sur un ensemble d'instances ;
- non une solution d'une instance particulière.

La programmation linéaire occupe une place centrale de l'optimisation, car les problèmes de PL sont les problèmes d'optimisation les plus faciles - toutes les contraintes y étant linéaires. Beaucoup de problèmes réels de RO peuvent être exprimés comme un problème de PL. Pour cette raison un grand nombre d'algorithmes pour la résolution d'autres problèmes d'optimisation sont fondés sur la résolution de problèmes linéaires.

La programmation linéaire est essentiellement appliquée pour résoudre des problèmes d'optimisation à moyen et long terme (problèmes stratégiques et tactiques, dans le vocabulaire de la recherche opérationnelle).

Les domaines d'application de ces problèmes sont très nombreux aussi bien dans la nature des problèmes abordés (planification et contrôle de la production, distribution dans les réseaux) que dans les secteurs d'industrie : industrie manufacturière, énergie (pétrole, gaz, électricité, nucléaire), transport (aériens, routiers et ferroviaires), télécommunications, industrie forestière, finance. La recherche opérationnelle a aussi des applications dans le domaine de l'énergie.

Elle est couramment utilisée dans l'industrie pétrolière, principalement dans l'établissement des plans de production à long terme, à moyen terme, annuel, trimestriel et mensuel. Les résultats permettent aux décideurs d'avoir un guide pour faire les meilleurs choix dans les investissements, dans l'approvisionnement des bruts, dans l'utilisation des unités de raffinage, dans les canaux de distribution les plus rentables.

De même, les opérateurs du marché de l'électricité font largement appel à la recherche opérationnelle tant pour des problèmes stratégiques (par exemple des investissements sur le réseau) que pour des questions plus opérationnelles (stabilité du réseau, prévisions...).

Dans le cadre de l'industrie manufacturiere, la recherche opérationnelle permet notamment de trouver des plans de productions (ordonnancement de production), de disposer au mieux les machines dans un atelier, de diminuer le gaspillage des matières premières (problèmes de découpe) ou de l'énergie ou bien encore d'optimiser le conditionnement et la livraison des produits intermédiaires ou finis.

La recherche opérationnelle peut aider le décideur lorsque celui-ci est confronté à un problème combinatoire, aléatoire ou concurrentiel.

Un problème est dit combinatoire lorsqu'il comprend un grand nombre de solutions admissibles parmi lesquelles on cherche une solution optimale ou proche de l'optimum.

La plupart des problèmes combinatoires de la R.O. ont un graphe comme support :

- TSP généralisé (graphe des communications) ;
- Ordonnancement (graphe des précédences) ;
- Transport (graphe des liaisons) ;
- Emplois du temps (graphe des incompatibilités) ;
- Flots et circulations (graphe des liaisons)

La théorie des graphes sert de support à la résolution d'un vaste échantillon de problèmes, notamment certains issus de l'algorithmique classique, tels que la recherche du plus cour chemin entre deux endroits, le problème du voyageur de commerce (dans lesquels on cherche le chemin le plus court passant par n points), les problèmes d'ordonnancement de tâche, les problèmes de planning ou encore les problèmes d'optimisation de flux (algorithme de Ford-Fulkerson). Elle s'est également développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,. . .

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets (ou noeud) et d'arcs (ou arête).

Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

Application 1 : Problème de production

Une entreprise fabrique plusieurs produits, ce qui exige des ressources particulières (matières premières, machines, personnel ...) en quantités limitées.

Chaque produit rapporte un certain bénéfice (connu) à l'entreprise.

Question

Quels produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité pour réaliser le bénéfice total le plus élevé ?

- **Modélisation ou formulation du problème :** variable de décision, fonction objectif et contraintes (modèle mathématique = PL).
- **Résolution manuelle (graphique et simplexe) :** pour des problème de petite taille.
- **Résolution informatique (problème de grande taille) :** Solveur Excel, LpSolve, Python, R, ...

Une entreprise dispose de plusieurs dépôts contenant chacun un certain nombre de containers.

Différents magasins commandent des containers.

On connaît le coût de transport de chaque dépôt aux magasins.

Question

Quelle est l'organisation des livraisons des containers pour minimiser le coût total de transport ?

n tâches doivent être affectées à n machines (1 tâche par machine).

Le coût d'exécution de chaque tâche par chacune des machines est connu.

Question

Comment trouver l'affectation qui minimise le coût total ?

Un voyageur de commerce doit visiter n villes.

La distance entre chaque ville est donnée.

Question

Trouver le plus court trajet passant par les n villes.

On dispose de n objets donc chacun d'eux a une masse (ou volume) et une valeur connues.

Question

Comment transporter certains objets, afin de maximiser la valeur totale sans dépasser la capacité massique (ou volumique) du sac ?

On l'utilise aussi pour modéliser les situations suivantes, quelquefois en tant que sous-problème :

- dans des systèmes d'aide à la **gestion de portefeuille** : pour équilibrer la sélectivité et la diversification dans le but de trouver le meilleur rapport entre rendement et risque pour un capital placé sur plusieurs actifs financiers (actions. . .) ;
- dans le **chargement de bateau ou d'avion** : tous les bagages à destination doivent être amenés, sans être en surcharge ; ou l'optimisation d'un navire de charge (cargo polyvalent ou porte-conteneurs) en fonction de plusieurs critères : poids, volume,

destination, marchandises spécifiques (dangereuses ou frigorifiques), importance des clients etc.

Face a un problème concret de type R.O : Les étapes suivantes sont nécessaires

- **La modélisation.** Une transformation du problème concret par :
  - des équations et/ou inéquations mathématiques ;
  - des graphes (schématisation).
- **Résolution.** Techniques principales
  - Programmation linéaire.
  - Programmation dynamique.
  - Programmation en nombres entiers.
  - Optimisation dans les réseaux.
  - Programmation non linéaire.
  - Modèles stochastiques
- **Interprétation**
- **Prise de décision**

Objectif : **apprendre à modéliser les problèmes réels et à résoudre les programmes linéaires**.

- De nombreux problèmes réels peuvent être exprimés comme des programmes linéaires.
- Les programmes linéaires peuvent être résolus efficacement par certains algorithmes.
- Ce sont d'excellents exemples de questions pratiques dont la résolution nécessite une combinaison de méthodes algorithmiques, de mathématiques élémentaires et de bon sens.

1. Formulation d'un programme linéaire (Modélisation).
2. Introduction + une approche naïve : la méthode graphique.
3. L'algorithme du simplexe.
4. Simplexe : comment éviter les pièges.
5. Dualité et interprétation économique.
6. Programmation linéaire en nombres entiers.

Objectif : traduire le problème réel en langage mathématique

1. Définir les variables de décision (ex : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ou bien $x_{ij}=$ quantité transportée de i vers j).
2. Écrire la fonction objectif ou la fonction économique (ex : minimiser le coût total $\sum c_i x_i$ ou bien $\sum c_{ij} x_{ij}$).
3. Établir les contraintes (ex : respect des capacités, de la demande, etc.).

C'est ici qu'on obtient un modèle mathématique de type linéaire, non linéaire, entier, etc.

La programmation linéaire est un cas particulier de la programmation mathématique, où l'on cherche à trouver un optimum (maximum ou minimum) d'une fonction linéaire à plusieurs variables, ces variables étant soumises à un système d'inéquations (d'équations) linéaires.

Modélisation (ou formulation) sous la forme d'un Programmation Linéaire

La formulation d'un problème d'optimisation comporte toujours les trois étapes suivantes :

- La première étape consiste à **choisir les variables** du problème.
  - On appelle variable toute quantité utile à la résolution du problème dont le modèle doit déterminer la valeur.
  - Cette définition permet de différencier les variables des paramètres, qui sont des données qui peuvent varier, par exemple d'une période à l'autre ou d'un scénario à l'autre.
- L'étape 2 consiste à **formuler mathématiquement l'objectif**.
  - On appelle fonction objectif (ou fonction économique) d'un problème d'optimisation le critère de choix entre les diverses solutions possibles.
- La troisième étape c'est la formulation des **contraintes** du problème.
  - On appelle contraintes du problème toutes les relations limitant le choix des valeurs possibles des variables. Ces relations peuvent être de simples bornes sur les variables.

1. **Fonction objectif (ou fonction économique) linéaire**

   Min le coût / Max le profit

$$min/max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

2. **contraintes inégalité ou égalité linéaire**

   - **satisfaire la demande**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b_1$$

   - **avec des ressources limitées**

$$a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n \leq b'_1$$

   ou

$$a''_1x_1 + a''_2x_2 + \cdots + a''_nx_n = b''_1$$

3. **quantités produites :** $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. x_i : variable de décision du problème

La programmation linéaire nous permet de résoudre un programme linéaire composé d'une fonction linéaire (fonction objectif) à optimiser (maximiser ou minimiser) sous certaines contraintes exprimées en un système d'équations ou d'inéquations linéaires.

Un fois le problème posé, la démarche peut s'effectuer en 3 étapes :

1. **Modélisation**
   - **Variables de Décision.** Les variables de décision sont les inconnues que nous cherchons à déterminer.
   - **Fonction Objectif (ou fonction économique).** La fonction objectif est une fonction linéaire à maximiser ou minimiser.
   - **Contraintes.** Les contraintes sont des systèmes d'inégalités ou d'égalités linéaires que les variables doivent respecter.
2. **Résolution**
3. **Solution**

$\boxed{\text{Problème réel}} \Longrightarrow \boxed{\text{Modèle}} \Longrightarrow \boxed{\text{Méthode}} \Longrightarrow \boxed{\text{Solution}}$

Exemple 1

Une entreprise spécialisée dans la fabrication de matériels informatiques, propose à son catalogue d'ordinateurs des centaines de référence. Pour simplifier, on ne s'intéresse ici qu'a deux types d'ordinateurs : le Core i3 et le Core i7. Chacun d'eux comporte un processeur (le même) mais les deux modèles différent en particulier par le nombre de barrettes mémoires. Plus précisément, le Core i3 comporte 2 barrettes alors que le Core i7 en comporte 6. Le marché pour ces composants est tel qu'on ne peut espérer acheter auprès des fournisseurs habituels plus de 10 000 processeurs pour le trimestre à venir et plus de 48 000 barrettes. Une autre limitation intervient sur la production : l'assemblage est caractérisé, en particulier, par une opération délicate, qui pour le Core i3 est de 3 minutes alors que pour le Core i7 elle n'est que d'une minute. On ne dispose a priori pour l'assemblage de ces deux types de machines que de 24 000 minutes pour le trimestre à venir.

Enfin, compte tenu des conditions actuelles du marché, on peut espérer retirer un profit de 40 000 FCFA sur le Core i3 et de 80 000 FCFA sur le Core i7.

L'objectif est de déterminer les quantités de chacun des deux types d'ordinateurs à fabriquer de manière à obtenir le plus grand profit possible.

Questions

1. Modéliser ce programme sous forme d'un programme linéaire en précisant les variables de décision, la fonction objectif et les contraintes.
2. Écrire la forme matricielle.
3. Résoudre graphiquement le modèle obtenu.
4. Tp : Solveur d'Excel.

Exemple 2

Une usine fabrique des chaises et des tables. Chaque semaine l'usine commande la même quantité de bois, connaît le temps de travail de ses employés et la durée de fonctionnement de ses machines. Sachant qu'une table rapporte 6 euros et une chaise 4 euros, quel est le mix chaises-tables qui maximise le revenu de l'usine ?

	Tables	Chaises	Quantité disponible
Équipement	3	9	81
Main d'oeuvre	4	5	55
Bois	2	1	20

1. Modéliser ce programme sous forme d'un programme linéaire.
2. Écrire le programme obtenu sous la forme matricielle.
3. Résoudre graphiquement le problème linéaire.
4. Tp : Solveur d'Excel

Exemple 3

Une entreprise de relations publiques souhaite réaliser un sondage d'opinion. Chaque employé peut effectuer, par jour, soit 80 interviews par téléphone (IT), soit 40 interviews directes (ID). Un employé ne peut effectuer qu'un seul type de sondage par jour. Afin d'obtenir un échantillon représentatif, trois critères doivent être respectés :

- Au moins 3000 interviews.
- Au moins 1000 interviews par téléphone (IT).
- Au moins 800 interviews directe (ID).

L'employé effectuant les IT perçoit une rémunération de 150 UM, tandis que celui réalisant les ID perçoit 170 UM.

Question

1. Modéliser ce problème
2. Écrire le programme obtenu sous la forme matricielle.
3. Résoudre graphiquement le problème linéaire.
4. Tp : Solveur d'Excel.

- **Exemple 1. Considérons le modèle linéaire suivant :**

$$(P_1)\begin{cases} Max\ z = 5x_1 + 4x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On définit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 40 \\ 24 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors on obtient la forme matricielle suivante :

$$(P_1)\begin{cases} Max\ \ z = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- **Exemple 2. Considérons le modèle linéaire suivant :**

$$(P_2)\begin{cases} Max\ z = 3x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On définit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors on obtient la forme matricielle suivante :

$$(P_2)\begin{cases} Max\ \ z = c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- Exemple 3. Considérons le modèle linéaire suivant :

$$
(P_3)\begin{cases} Min\ z = 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}
$$

On définit :

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Alors on obtient la forme matricielle suivante :

$$
(P_3)\begin{cases} Min\ \ z = c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}
$$

- **Exemple 4. Considérons le modèle linéaire suivant :**

$$(P_4)\begin{cases} Min\ z = 5x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On définit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors on obtient la forme matricielle suivante :

$$(P_4)\begin{cases} Min\ \ z = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- **Exemple 5. Considérons le modèle linéaire suivant :**

$$(P_5)\begin{cases} Max\ z = 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Max\ z = 4x_1 + 3x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -8 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On définit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors on obtient la forme matricielle suivante :

$$(P_5)\begin{cases} Max\ \ z = c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Les hypothèses de la programmation linéaire

Comme toute opération visant à modéliser des phénomènes concrets et réels de notre quotidien, la programmation linéaire suppose que certaines hypothèses soient vérifiées afin que le programme linéaire final décrivant le problème soit valable :

- La contribution de chaque variable à la valeur de la fonction objectif est proportionnelle à la valeur de cette variable.
- La contribution de chaque variable est indépendante de la valeur des autres variables.
- Les variables de décision du problème $x_1, x_2 \ldots$ sont positives et ils prennent des valeurs réelles non entières.
- Les paramètres du problème autres que les variables de décision ont une valeur connue avec certitude.
- La fonction objectif est décrite par une fonction linéaire des variables de décision.

Résolution du modèle, analyse et interprétation des résultats

Objectif : trouver la ou les meilleures solutions possibles.

1. Choisir une méthode de résolution :
   - Méthode du simplexe (pour la programmation linéaire).
   - Méthodes graphiques (pour deux variables).
   - Branch and Bound (pour les entiers).
   - ou utilisation de logiciels (Excel Solver, etc.).
2. Calculer la solution optimale et vérifier la faisabilité.

Objectif : donner un sens concret aux résultats numériques

1. Traduire les valeurs des variables dans le contexte réel du problème.
2. Vérifier la cohérence avec la situation pratique.
3. Réaliser une analyse de sensibilité (impact des variations de données).

Mise en œuvre de la solution (prise de décision)

Objectif : appliquer concrètement les recommandations

1. Présenter la solution aux décideurs.
2. Intégrer les résultats dans le processus décisionnel.
3. Mettre en place le suivi et l'évaluation des résultats réels.

Révision du modèle si nécessaire

Si le contexte change (nouvelles contraintes, nouvelles données), on met à jour le modèle et on recommence le processus.

En résumé, les étapes clés sont : Définition du problème, Modélisation mathématique, Résolution du modèle, Interprétation des résultats, Mise en œuvre et suivi.

Exemples concrets de problèmes de PL adaptés aux étudiants en Génie Logiciel

Exemple 1. Optimisation du planning de développement logiciel

Problème : Une équipe de développement dispose de trois développeurs, pouvant travailler chacun 40 heures par semaine. Elle doit déterminer le nombre d'heures allouer à trois modules :

- Module A : Interface utilisateur
- Module B : Base de données
- Module C : API backend

Chaque module génère une valeur ajoutée (gain) et nécessite un nombre d'heures de travail selon les compétences des développeurs.

Modules	Gain par h (unités)	Temps min (h)	Temps max (h)
A	5	10	40
B	8	20	50
C	6	10	30

L'objectif est de déterminer la répartition optimale des heures à allouer à chaque module de manière à maximiser la valeur totale du projet, tout en respectant les contraintes de temps disponibles pour chaque développeur.

Exemple 2. Production de deux types de logiciels

Problème : Une entreprise de développement souhaite produire deux types de logiciels :

- x_1 : nombre de logiciels standards,
- x_2 : nombre de logiciels sur mesure.

Chaque type nécessite un certain nombre d'heures de travail et rapporte un profit.

Produit	heure de Conception	heures de test	Profit unitaire
Logiciel standard	2 h	1 h	40
Logiciel sur mesure	1 h	2 h	50

L'entreprise dispose au maximum de :

- 8 heures pour la conception,
- 6 heures pour les tests.

1. Modéliser ce problème.
2. Résoudre graphiquement le modèle linéaire obtenu.

Exemple 3. Installation des serveurs

Problème : Un administrateur réseau souhaite installer des serveurs dans deux centres de données afin de répondre à la demande de trois régions.

Centres	Coût par unité	Région 1	Région 2	Région 3
Centre 1	4	1	3	2
Centre 2	6	2	1	4

Chaque région doit recevoir au moins les unités suivantes de services :

$$R_1 \geq 30, \quad R_2 \geq 20, \quad R_3 \geq 40.$$

1. Modéliser ce problème.
2. Résoudre graphiquement le modèle linéaire obtenu.

Exemple 4. Problème de ressources

Problème : Un responsable de projet souhaite déterminer la quantité minimale de deux types de ressources nécessaires pour atteindre un certain niveau de performance.

Chaque ressource contribue positivement à cette performance.

Ressources	Contribution performance	Coût
R_1	4	5
R_2	3	3

On veut au moins 24 unités de performance totale.

1. Modéliser ce problème.
2. Résoudre graphiquement le modèle linéaire obtenu.

Exemple 5. Problème de maximisation

On note :

- x_1 : quantité de produits P_1 à fabriquer,
- x_2 : quantité de produits P_2 à fabriquer.

$$(P_1) \begin{cases} Max \quad z = 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Identifier les étapes de la modélisation (variables, fonction objectif, contraintes) de P_1.
2. Déterminer la nature du problème.
3. Donner la forme matricielle.
4. La résolution graphique étape par étape si c'est un problème à deux variables.

- **Étape 1** : Tracer les droites associées aux contraintes.
- **Étape 2** : Déterminer la région (ou domaine) admissible D_0.
- **Étape 3** : Trouver les sommets (ou points extrêmes) de la région admissible.
- **Étape 4** : Calculer z aux sommets de la région faisable (ou évaluer z pour chaque point extrême).

Projets : Modéliser le problème suivant

Projet 1 : Problème de production

Une entreprise produit n biens différents. Pour cela, elle dispose de m types de ressources. Elle possède b_j unités de la ressource j pour $j = 1, \ldots, m$. La production d'une unité du bien i entraîne un profit égal à c_i, pour $i = 1, \ldots, n$. Pour produire une unité du bien i, elle a besoin de a_{ij} unités de chaque ressource j.

Quelle quantité de chaque bien doit produire l'entreprise afin de maximiser le profit ?

Projet 2 : Problème de rangement

On considère n objets que l'on doit ranger dans un sac dont la capacité massique (volumique) est P. Chaque objet i a un poids p_i et une valeur v_i. On cherche un rangement de valeur maximale.

Projet 3 : Problème d'alimentation

On se propose de réaliser une alimentation économique pour des bestiaux, qui contient obligatoirement 4 sortes de composants nutritifs, A, B, C et D. L'industrie alimentaire produit précisément deux aliments M et N qui contiennent ces composants : 1 Kg d'aliment M contient 100 g de A, 100 g de C, 200 g de D ; 1 Kg d'aliment N contient 100 g de B, 200 g de C, 100 g de D. Un animal doit consommer par jour au moins : 0.4 Kg de A ; 0.6 Kg de B ; 2 Kg de C ; 1.7 Kg de D. L'aliment M coûte 10 euros le Kg et N coûte 4 euros le Kg.

Quelles quantités d'aliments M et N doit-on utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse ?

Projet 4 : Problème de médecine

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine.

Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Projet 5 : Problème de recrutement

Une société industrielle doit recruter trois techniciens afin de renforcer certain de ses quatre groupes de travail dont le but est de maximiser le nombre de pièces fabriquées par l'ensemble de ses employés. La rentabilité de ces techniciens se mesure par le nombre de pièces additionnelles que va produire chaque groupe.

Nombre de techniciens	1	2	3
Groupe 1	50	80	90
Groupe 2	40	50	85
Groupe 3	20	30	80
Groupe 4	30	40	100

Déterminer le meilleur recrutement.

Projet 6 : Politique d'achat optimale

Un marchant d'un certain bien dispose d'une capacité de stockage (pour ce bien) de K unités et on admet que le coût de stockage est nul. Sur n périodes ($n \in \mathbb{N}^*$), on connaît les demandes d_i et les prix unitaires d'achat p_i de ce bien. Sachant que les achats se font en début de période, on démarre et finit avec un stock nul, les quantités sont entières, le problème consiste à trouver la meilleure stratégie d'approvisionnement c'est-à-dire déterminer la politique optimale d'achat.

Période i	1	2	...	n
Demande d_i	d_1	d_2	...	d_n
Prix unitaire	p_1	p_2	...	d_n

Programmation linéaire

1. Tout problème mathématique qui consiste à optimiser (maximiser un profit, minimiser un coût) une fonction linéaire de plusieurs variables liées par des relations linéaires est dit programmation linéaire.
2. L'importance de la PL résulte du fait qu'un très grand nombre de modèles constituent des extensions de programmes linéaires. Ce qui fait qu'elle est rencontrée dans diverse domaines.
   - Pb d'affectation (Programme Linéaire en Variables Binaires (PLVB))
   - Pb du sac 'a dos (Programme Linéaire en Nonbres Entiers (PLNE) ou en VB)
   - etc.
3. **Méthode de résolution**
   - Méthode graphique (uniquement 2 variables de décisions)
   - Méthode du simplexe
   - Dualité et interprétation économique
   - Applications : allocation de ressources, optimisation de coûts logiciels

De manière générale, la résolution d'un problème de PL nécessite la mise en oeuvre d'un algorithme.

Modélisation

La formulation d'un problème mathématique d'un programme linéaire suit trois étapes.

1. **Choix des variables de décision ou structurelles :** les inconnus qui interviennent dans la fonction linéaire à optimiser.
2. **Identification de la fonction économique ou fonction objectif** : la fonction à optimiser. Puis spécification de la nature d'optimisation c'est à dire s'il s'agit d'une maximisation ou d'une minimisation.
3. **Détermination des contraintes** : se sont les restrictions des variables (relations entre variables). Elles peuvent s'interpréter comme les disponibilités des ressources (contraintes technologiques).

Une entreprise produit n biens différents. Pour cela, elle dispose de m types de ressources. Elle possède b_j unités de la ressource j pour $j = 1, \dots, m$. La production d'une unité du bien i entraîne un profit égal à c_i, pour $i = 1, \dots, n$. Pour produire une unité du bien i, elle a besoin de a_{ij} unités de chaque ressource j.

Quelle quantité de chaque bien doit produire l'entreprise afin de maximiser le profit ?

Modélisation

- **Choix des variables de décision :** Soit x_i la quantité de bien i qu'il faut produire ;
- **Identification de la fonction économique** z **:** si on produit une quantité x_i du bien i, alors cela rapporte un profit de $c_i x_i$. Donc

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

- **Détermination des contraintes :**
  - Contraintes technologiques qui limitent les unités de fabrication (disponibilité des ressources) :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, \ avec \ j = 1, \ldots, m$$

  - Contraintes de non négativité (ou la positivité des quantités produites) des quantités produites : $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

On obtient ainsi le programme linéaire suivant :

$$(P) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0 \ o \ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Représentation matricielle

où sous forme matricielle

$$(P) : \begin{cases} Max\ \mathbf{z} = \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \rightarrow \textit{Fonction objectif} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \rightarrow \textit{Contraintes} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \rightarrow \textit{Conrainte de positivits} \end{cases}$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

c^T : la transposée de c.

Exemple

Un atelier fabrique deux produits P_1 et P_2 à base de deux principales matières premières M_1 et M_2. Il dispose de 200 unités de matière M_1 et de 640 unités de M_2. Le produit P_1 nécessite une quantité de 5 unités de M_1 et de 10 unités de M_2. Quant au produit P_2, il nécessite une quantité de 4 unités de M_1 et de 16 unités de M_2. La quantité de P_1 que peut produire la machine en une journée ne peut excéder 25.

Les marges bénéficiaires de P_1 et P_2 sont respectivement 1 000 F CFA et 1 400 F CFA.

Quelle quantité doit produire l'atelier afin de maximiser le bénéfice journalier ?

Modélisation

- Variables de décision : Soit x_1 et x_2 désignent respectivement les quantités produites de P_1 et P_2.
- Fonction objectif : $z = 1000x_1 + 1400x_2$

- Les contraintes :
  - Contrainte liée à la disponibilité M_1 : $5x_1 + 4x_2 \leq 200$
  - Contrainte liée à la disponibilité M_2 : $10x_1 + 16x_2 \leq 640$
  - Contrainte liée à la machine : $x_1 \leq 25$
  - Contraintes de non négativité : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

En résumé, on obtient le modèle linéaire suivant :

$$(P) : \begin{cases} Max\ z = 1000x_1 + 1400x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ 10x_1 + 16x_2 \leq 640 \\ x_1 \leq 25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Un vecteur

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$$

est dit solution réalisable ou admissible s'il vérifie l'ensemble des contraintes.

L'ensemble des solutions réalisables est appelé domaine réalisable (c'est un polyèdre convexe).

Lorsque celui ci est vide, on dit que le problème n'admet pas de solution.

PL : Résolution graphique

La formalisation d'un programme est une tâche délicate mais essentielle car elle conditionne la découverte ultérieure de la bonne solution. Elle comporte les mêmes phases quelles que soient les techniques requises ultérieurement pour le traitement (programmation linéaire ou programmation non linéaire) :

- La détection du problème et l'identification des variables. Ces variables doivent correspondre exactement aux préoccupations du responsable de la décision. En programmation mathématique, les variables sont des variables décisionnelles.
- La formulation de la fonction économique (ou fonction objectif) traduisant les préférences du décideur exprimées sous la forme d'une fonction des variables identifiées.
- La formulation des contraintes. Il est bien rare qu'un responsable dispose de toute liberté d'action. Le plus souvent il existe des limites à ne pas dépasser qui revêtent la forme d'équations ou d'inéquations mathématiques.

Résolution de programmes linéaires ou Approches de Résolution

1. On dispose d'un outil (la PL) pour modéliser des problèmes.
2. Comment résoudre les problèmes à l'aide de la PL ?

   - **Résolution graphique.** Pour les problèmes à deux variables, on peut tracer les contraintes sous forme de droites et identifier la région admissible.
   - **La méthode du simplexe.** Pour les problèmes à $n > 2$ variables, on navigue parmi les sommets de la région admissible pour trouver la solution optimale.
   - **La méthode des deux phases**
   - **Outils Numériques (logiciels pour résoudre des programmes linéaires).** Des logiciels comme Excel Solveur, Python (PuLP, SciPy) ou MATLAB permettent de résoudre des problèmes de grande taille.

- Lorsqu'il n'y a que **deux variables de décision**, un problème linéaire peut être résolu de manière purement graphique. Cette résolution graphique permet de mettre en évidence certaines propriétés que possède n'importe quel problème de programmation linéaire.

  $\rightarrow$ A chaque couple de variables x_1 et x_2, on associe un point du plan dont les coordonnées correspondent aux valeurs des variables.

  $\rightarrow$ Les variables étant positives, ces points sont situés dans l'orthant positif (le quart Nord-Est du plan) ou

$$\mathbb{R}^+ = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\}$$

- La résolution graphique ne concerne que des problèmes avec 2 variables alors que les problèmes réels peuvent en avoir plusieurs milliers, voire centaine de milliers.

Lorsque le nombre de variables est au plus égal à deux, on peut envisager une résolution graphique du problème. Cette technique nous permettra de comprendre la méthode générale du simplexe.

Chaque contrainte est représentée par un demi plan.

Nous déterminons le domaine réalisable en vérifiant le sens des inégalités de chacune des contraintes. Ce domaine est un ensemble convexe.

La résolution graphique d'un problème linéaire consiste à tracer la droite qui sépare les demi-plans pour chaque contrainte tout en conservant le demi-plan acceptable, c'est-à-dire le demi-plan des solutions réalisables pour la contrainte. L'intersection des différents demi-plans de toutes les contraintes sans oublier les contraintes de positivité forme le polygone des solutions, appelé aussi "région des solutions admissibles".

Représentation graphique des solutions d'un problème de PL (2 variables)

Contexte

- La représentation graphique est possible uniquement pour 2 variables (x_1 et x_2).
- Objectif : visualiser la zone de faisabilité et identifier la solution optimale.

Étapes de la représentation graphique.

▷ **Étape 1 : Définir le problème**

- Fonction objectif : $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ (à maximiser ou minimiser).
- Contraintes linéaires :

$$\begin{gathered} a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_1 \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 \leq b'_1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

- ▷ **Étape 2 : Tracer les contraintes**
  - Convertir chaque contrainte en équation de droite : $a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$ et $a'_1x_1 + a'_2x_2 = b'_1$.
  - Tracer ces droites dans le plan x_1, x_2.
  - Déterminer le demi-plan valide selon le sens de l'inégalité ($\leq$ ou $\geq$).
- ▷ **Étape 3 : Déterminer la zone de faisabilité**
  - La zone de faisabilité est l'intersection des demi-plans de toutes les contraintes, souvent un polygone convexe.
  - Chaque point à l'intérieur de cette zone respecte toutes les contraintes.
- ▷ **Étape 4 : Identifier la solution optimale**
  - **Pour maximisation** : déplacer la droite de Z vers le maximum possible dans la zone de faisabilité.
  - **Pour minimisation** : déplacer vers le minimum possible.
  - La solution optimale se trouve toujours sur un sommet (vertex) du polygone de faisabilité

Exemple 1 : Problème de maximisation ($\leq$)

Le responsable d'une décision ne dispose que de sa compétence pour réaliser une formalisation correcte du problème posé car il n'existe pas de méthode en la matière. Un moyen d'acquérir cette compétence est l'apprentissage comme proposé dans les exemples suivants :

$$(P_1) : \begin{cases} Max\ z = 1000x_1 + 1400x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ 10x_1 + 16x_2 \leq 640 \\ x_1 \leq 25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **Représentation des contraintes.** Représenter toutes les contraintes.
- **Domaine réalisable.** La région délimitée par des segments représente la frontière entre le domaine admissible et non admissible.
- **Solution optimale.** $x_1^* = 16$ et $x_2^* = 30$. La valeur optimale est $z^* = 58000$ euros.

Exemple 2 : Problème de minimisation (type $\geq$)

On considère le problème linéaire suivant :

$$(P_2) : \begin{cases} Min\ z = x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Représenter toutes les contraintes.
- Solution optimale est : $x_1^* = 2$; $x_2^* = 3$ et la valeur optimale est $z^* = 5$.

Exemple 3 : Problème de maximisation (type $\geq$ et $\leq$)

On considère le problème linéaire suivant :

$$(P_3) : \begin{cases} Max\ z = 2x + 3y \\ x + y \leq 4 \\ x + 2y \leq 5 \\ 4x - y \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer sur un graphique, le domaine réalisable de ce modèle linéaire.
2. Calculer les coordonnées de chaque point extrême.
3. Déterminer la solution optimale de ce modèle et évaluer la fonction économique z en ce point ($x^* = 3$; $y^* = 1$ et $z^* = 9$).

Exemple 4 : Problème de minimisation (type $\geq$)

On considère le problème linéaire suivant :

$$(P_4) : \begin{cases} Min\ z = 2x - 10y \\ x - y \geq 0 \\ x - 5y \geq -5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer sur un graphique, le domaine réalisable de ce modèle linéaire.
2. Calculer les coordonnées de chaque point extrême.
3. Déterminer la solution optimale de ce modèle et évaluer la fonction économique z en ce point.

On considère le problème linéaire suivant :

$$(P_5) : \begin{cases} Max\ z = \lambda x + 7y \\ x - y \leq 6 \\ 2x + y \leq 4 \\ y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

1

Exemple 6 : Problème de maximisation ($\leq$)

Considérons le modèle linéaire suivant :

$$(P_6) : \begin{cases} Max\ z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution optimale. $x_1^* =$ et $x_2^* =$. La valeur optimale est $z^* = 36$ euros.

Exemple 1 : Résoudre graphiquement le PL suivant :

$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sous contraintes :

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Étape 1 : Simplifions les contraintes

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{cases}$$

Étape 2 : Détermination des points d'intersection (sommets du domaine faisable)

- Intersection avec les axes.

- Vérifions les points d'intersection entre contraintes.

Étape 3 : Sommets du domaine faisable. $O = (0,0)$; $E_1 = (4,0)$; $E_2 = (4,3)$; $E_3 = (2,6)$ et $E_4 = (0,6)$.

Étape 4 : Calcul de la fonction objectif. $z = 3x_1 + 5x_2$.

Point	x_1	x_2	$z = 3x_1 + 5x_2$
O	0	0	0
E_1	4	0	12
E_2	4	3	27
E_3	2	6	36
E_4	0	6	30

La solution optimale est : $(x_1^*, x_2^*) = (2,6)$ et la **valeur optimale** est $Z^*_{max} = 36$.

Exemple 2 : Résoudre graphiquement le PL suivant :

$$(P)\begin{cases} Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Solution graphique

- Tracer les droites : $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
- Zone de faisabilité : polygone convexe formé par l'intersection.
- Évaluer Z aux sommets : $(0,0)$, $(0,3)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(2,0)$.
- Maximum de $Z^* = 6 + 4 = 10$ à $x_1^* = 2$ et $x_2^* = 2$.

Remarque

- La solution optimale d'un PL à 2 variables se trouve toujours sur un sommet de la zone faisable.
- Permet d'illustrer la méthode avant d'utiliser le Simplexe pour plusieurs variables.
- Pour des problèmes avec deux variables, on peut résoudre graphiquement (aide à comprendre la structure du problème)

Terminologie

- **Solution** : affectation de valeurs aux variables.
- **Solution réalisable :** solution réalisable si les valeurs satisfont l'ensemble des contraintes.
- **Région réalisable :** ensemble des solutions réalisables.

Notion de solution optimale et faisable

1. Solution faisable

- Une solution faisable est un ensemble de valeurs des variables de décision qui respecte toutes les contraintes du problème.
- Autrement dit : c'est un point dans l'espace des variables qui satisfait les inégalités et égalités du problème.

Une solution faisable est tout vecteur de décision $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui satisfait toutes les contraintes du problème.

Exemple : On considère le problème :

$$\begin{cases} Maximiser \quad Z = 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Une solution faisable est tout couple $x = (x_1, x_2)$ qui respecte ces conditions.

Exemple 1.

- $(x_1, x_2) = (2, 2)$ est faisable, car elle respecte toutes les contraintes.
- $(x_1, x_2) = (3, 2)$ est non faisable, car $x_1 + x_2 = 5 > 4$.

Exemple 2. Pour un problème PL avec $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$:

- $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ est faisable car $1 + 2 \leq 4$ et les variables sont non négatives.
- $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ n'est pas faisable car $3 + 2 = 5 > 4$. L'ensemble de toutes les solutions faisables est appelé zone de faisabilité ou polyèdre faisable.
- La zone de faisabilité est convexe si toutes les contraintes sont linéaires.

La région faisable (ou ensemble des solutions réalisables) est donc l'ensemble de tous les points qui satisfont les contraintes.

2. Solution optimale

Une solution optimale est une solution faisable qui maximise ou minimise la fonction objectif, selon le problème.

- Si on **maximise**, la solution optimale donne la **valeur maximale** de la fonction objectif.
- Si on **minimise**, elle donne la **valeur minimale**.

Solution optimale (optimal solution). Une solution optimale est une solution faisable qui optimise la fonction objectif :

- **Maximisation :** la solution qui donne le plus grand Z.
- **Minimisation :** la solution qui donne le plus petit Z.

Exemple (suite du précédent) : Maximiser $z = 3x_1 + 2x_2$

Les coins de la région faisable sont : $(0, 0)$; $(0, 4)$; $(2, 2)$; $(2, 0)$.

En calculant : $z(0, 0) = 0$; $z(0, 4) = 8$; $z(2, 2) = 10$ et $z(2, 0) = 6$.

La solution optimale est $(x_1^*, x_2^*) = (2, 2)$, et la valeur optimale est $z^*_{max} = 10$

Résumé

Notion	Définition	Exemple
Solution faisable	Satisfait toutes les contraintes du problème	$(x_1^*, x_2^*) = (2, 2)$
Solution optimale	Faisable et minimise/maximise la fonction objectif	$(x_1^*, x_2^*) = (2, 2)$ avec $z = 10$

1. En PL, la solution optimale se trouve toujours sur un sommet du polyèdre faisable (théorème fondamental).
2. Il peut exister plusieurs solutions optimales si la droite de la fonction objectif est parallèle à une arête du polyèdre.
3. **Schéma mental**
   - **Zone faisable** : tous les points qui respectent les contraintes (polygone convexe pour 2 variables).
   - **Solution optimale** : point(s) dans cette zone où la fonction objectif atteint sa valeur maximale ou minimale.

Proposition

S'il en existe, il y a toujours une solution optimale sur un sommet (point extrême) de la région réalisable

Corollaire

Pour trouver l'optimum, il "suffit" d'examiner les points extrêmes de la région réalisable

Polyèdres et points extrêmes

- Un polyèdre convexe est l'ensemble des solutions d'un système fini d'inégalités linéaires.
- L'ensemble des solutions admissibles d'un PL est donc un polyèdre convexe.

Théorème

Si le polyèdre formé par l'ensemble des solutions d'un PL est borné, alors il existe au moins une solution optimale et l'une d'elles est obtenue sur un point extrême.

La méthode graphique pour la résolution d'un problème linéaire à deux variables est très facile à appliquer. Sa difficulté augmente par l'augmentation des variables dans le système. Elle devient difficile pour trois variables et, voire impossible, au delà de trois inconnus dans le système étudié.

Afin d'ôter cette difficulté, une méthode appelée méthode du simplexe a été proposée et développée par Dantzig afin de résoudre des problèmes de programmation linéaire avec plusieurs variables.

- La résolution manuelle ne peut se faire que pour des petits problèmes.
- Le recours à l'informatique est indispensable pour des problèmes de grande dimension.
- Pour les problèmes réels, les entreprises font appel à des solveurs professionnels.
- On appelle solveur un programme (ou un sous programme) informatique permettant de résoudre un problème d'optimisation sous contraintes.

Exemple 2

Le gérant d'un entrepôt souhaite renouveler le matériel de sécurité de son établissement. Il a besoin au minimum de

- 90 paires de chaussures de sécurité,
- 240 casques de sécurité,
- 240 paires de gants.

Une première entreprise de vente lui propose un lot A comprenant 2 paires de chaussures, 4 casques et 8 paires de gants pour 200 euros. Une deuxième entreprise vend pour 400 euros un lot B de 3 paires de chaussures, 12 casques et 6 paires de gants.

Pour répondre à ses besoins, le gérant acheté x lots A et y lots B.

Déterminer graphiquement, en précisant la démarche suivie, le nombres de lots A et de lots B à acheter pour avoir une dépense minimale.

PL : Comment utiliser le Solveur d'Excel ?

La résolution manuelle ne peut se faire que pour des **petits problèmes**. Le recours à l'informatique est indispensable pour des problèmes de **grande dimension**. Pour les problèmes réels, les entreprises font appel à des solveurs professionnels. On appelle solveur un programme (ou un sous programme) informatique permettant de résoudre un problème d'optimisation sous contraintes.

- **Solveurs libres :** Python, Scilab, LP-SOLVE (Mixed Integer Linear Programming), CLP (Linear Programming), etc.
- **Solveurs commerciaux :** Solveur Excel (Linear Programming), OOQP (Linear Programming), etc.

Pour résoudre un problème de PL avec Excel, vous devez d'abord activer le complément Solveur, puis configurer votre feuille de calcul pour représenter la fonction objectif et les contraintes. Enfin, utilisez l'outil Solveur en définissant la cellule objectif, les cellules de variables et les contraintes pour trouver la solution optimale.

- **Introduction.**

  Nous allons découvrir un outil particulièrement puissant d'Excel : **le Solveur**. Cet outil permet de déterminer les valeurs à saisir dans certaines cellules de manière à **optimiser une ou plusieurs valeurs cibles** situées dans d'autres cellules, conformément à des contraintes définies. Il s'agit d'un véritable outil d'**optimisation intégrée** dans Excel. Nous verrons également que l'utilisation du Solveur permet de paramétrer un certain nombre de contraintes, afin d'ajuster très précisément le résultat obtenu.

- **Qu'est ce que le Solveur d'Excel ?**

  Il s'agit d'un outil de simulation proposé par Excel, qui permet d'effectuer une série de calculs afin de déterminer la ou les valeurs à attribuer à certaines cellules pour atteindre un résultat donné.

Le Solveur est un outil de simulation et d'optimisation intégré à Excel. Il permet de calculer automatiquement les valeurs optimales des variables d'un modèle afin d'atteindre un objectif fixé, sous certaines contraintes.

En quelques sortes cet outil est une version bien plus évoluer et bien plus puissant de la valeur cible.

• Le Solveur d'Excel est un outil qui permet de trouver automatiquement la meilleure valeur possible d'une cellule (appelée cellule objectif), en modifiant certaines autres cellules (appelées cellules variables), tout en respectant des contraintes définies par l'utilisateur.

Résumé

Le Solveur cherche la solution optimale (maximum, minimum ou valeur donnée) à un problème dans Excel.

• Le Solveur d'Excel est un module d'optimisation numérique intégré au tableur Microsoft Excel. Il résout des problèmes où il faut optimiser une fonction objectif (minimiser ou maximiser une cellule) sous contraintes, en ajustant des variables de décision. Il repose sur des méthodes d'optimisation linéaire, non linéaire ou entière selon la nature du problème.

• Par exemple, une entreprise peut utiliser le Solveur pour déterminer la quantité de produits à fabriquer afin de maximiser son profit, tout en respectant les contraintes de main-d'œuvre, de matières premières et de budget.

- **Comment activer le Solveur ?**

  Le Solveur est une fonctionnalité cachée qui est présente sous la forme d'un complément Excel.

  Menu fichier → Choisir Options (autres) → rubrique complement → choisir complement Solveur → cliquer sur le bouton Atteindre → Cocher le complement solveur → Ok.

Comment utiliser le Solveur ?

- **Activer le complément Solveur .**
  - Allez dans Fichier → Options → Compléments.
  - Dans la zone "Gérer", sélectionnez "Compléments Excel", puis cliquez sur Atteindre.
  - Cochez la case Complément Solveur et cliquez sur OK.
- **Configurer la feuille de calcul.**
  - Définissez les variables de décision : Réservez des cellules pour les variables de votre problème (par exemple, les quantités à produire).
  - Configurez la fonction objectif : Saisissez une formule qui représente la fonction objectif (par exemple, un bénéfice ou un coût) dans une cellule dédiée. Utilisez les cellules des variables de décision dans cette formule.
  - Saisissez les contraintes : En utilisant d'autres cellules, configurez les formules qui représentent vos contraintes (par exemple, les limites de ressources). Ces formules devront également faire référence aux cellules des variables de décision.

- **Utiliser l'outil Solveur.**
  - Accédez au Solveur en allant dans l'onglet Données et en cliquant sur Solveur dans le groupe "Analyse".
  - Dans la boîte de dialogue Solveur :

a) **Définissez l'objectif** : Sélectionnez la cellule contenant votre fonction objectif. Choisissez si vous souhaitez Maximiser, Minimiser ou atteindre une Valeur spécifique.

b) **Modifiez les variables de décision** : Sélectionnez la plage de cellules qui contiennent vos variables de décision.

c) **Ajoutez les contraintes** : Cliquez sur "Ajouter" pour ajouter chaque contrainte. Sélectionnez la cellule de la contrainte, le symbole d'inégalité ($\leq$, $\geq$, $=$) et la cellule de référence de votre contrainte.

d) **Lancez la résolution** : Cliquez sur Résoudre. Le Solveur calculera la solution optimale et l'affichera dans vos cellules de variables.

e) **Conservez la solution** : Assurez-vous de sélectionner "Résultats du Solveur" pour conserver la solution trouvée.

- Assurez-vous que l'option Rendre les variables sans contrainte non négatives est cochée (courant dans la plupart des problèmes de PL).
- Dans la zone Sélectionner la méthode de résolution, choisissez Simplexe LP (Linear Programming) pour les problèmes de programmation linéaire.
- Cliquez sur Résoudre.
- Une boîte de dialogue Résultats du solveur apparaîtra, vous permettant de conserver la solution du solveur ou de restaurer les valeurs d'origine. Vous pouvez également demander des rapports (Résultats, Sensibilité, Limites).

En suivant ces étapes, vous pourrez utiliser Excel pour trouver la solution optimale à votre problème de programmation linéaire.

- **Exemple 1. On considère le modèle linéaire suivant :**

$$\begin{cases} Max \quad Z = 116x_1 + 188x_2 \\ 14x_1 + 32x_2 \leq 7200 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 1500 \\ x_1 \leq 100 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre le programme linéaire en utilisant le Solveur Excel. En déduire les rapports de réponses, sensibilité et limites.

Lancer le Solveur d'Excel

- Objectif à définir : Sélectionner la cellule $\boxed{\ldots}$ puis choisir l'option max.
- Cellules variables : Sélectionner les deux cellules des unités (en jaune) Puis on clique sur le bouton ajouter.
- Ajouter les contraintes : Sélectionner chaque contrainte puis on choisit <=7200 même chose pour les autres contraintes.

Ensuite, on choisit la méthode de résolution Simplexe PL, puis on clique sur Résoudre. À ce moment, Excel effectue un certain nombre de traitements afin de déterminer le scénario de fabrication qui permet d'optimiser au maximum la marge nette.

Fenêtre. Résultat du Solveur.

On peut demander à Excel d'afficher un rapport en cochant Rapport de plan pour voir les détails du calcul. Ensuite, on sélectionne Réponse (rapports) puis on clique sur OK : une autre feuille de calcul s'affichera alors automatiquement.

On va illustrer la méthode à suivre pour résoudre un problème d'optimisation à l'aide d'Excel

Étape 1 : Solution Optimale

x_1	x_2

Étape 2 : Fonction objectif

x_1	x_2	$= 116 * x_1 + 188 * x_2$ Puis entrer

Étape 3 : Les contraintes

14	32	$= 14 * x_1 + 32 * x_2$ Puis entrer	7200
7	4	$= 7 * x_1 + 4 * x_2$ Puis entrer	1500
1	0	$= 1 * x_1 + 0 * x_2$ Puis entrer	100

- **Rapports de réponses.** Le Solveur a trouvé une solution satisfaisante respectant toutes les contraintes et les conditions d'optimalité.
- **Rapports de sensibilité.** Les valeurs appelées admissibles d'augmentation et de diminution pour les cellules variables indiquent l'ampleur maximale des variations du coefficient de l'objectif qui laisse la solution optimale inchangée, en supposant que tous les autres coefficients restent constants. Le rapport de sensibilité associe un coût d'ombre à chacune des contraintes.
- **Rapports des limites.** On observe l'impact de chaque terme sur le résultat de la fonction objectif.

Présentation et prise en main du logiciel Géogébra

Le Géogébra est un logiciel de mathématiques qui regroupe la géométrie, de l'algèbre, de calcul formel et scientifique, de l'algorithmique, de la statistique etc. **GeoGebra** est un logiciel de géométrie dynamique dans le plan qui permet de créer des figures dans lesquelles il sera possible de déplacer des objets afin de vérifier si certaines conjectures ne sont pas dues uniquement à un positionnement particulier des objets. En résumé, il regroupe presque toutes les mathématiques.

Implémentation pratiques

1. Résolution avec logiciels et bibliothèques
   - Solveurs (Excel, LpSolve, CPLEX, Gurobi, GLPK, etc.)
   - Outils de programmation scientifique (Python : PuLP, Numpy, SciPy, Matplotlib)
   - Interfaces avec Java/C++
2. Mini-projets pratiques
   - Optimisation de la planification d'un sprint agile
   - Gestion des dépendances d'un projet logiciel
   - Affectation des ressources informatiques dans un cloud

Programmation linéaire avec Python (PuLP)

L'optimisation est une branche des mathématiques qui consiste à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes de maximisation ou de minimisation d'une fonction sur un ensemble. Et l'optimisation d'une fonction linéaire d'un problème classique par la méthode de simplexe qui génère la fatigue, les erreurs et la perte de temps. Et nous avons choisi de coder nos algorithmes à l'aide du **langage de programmation orienté objet Python** pour avoir une application informatique facilitant efficacement l'optimisation dans un laps de temps à l'aide de l'outil informatique.

Avec Python on peut faire des calculs scientifiques (librairie numpy), des graphiques (librairie matplotlib), etc. Pour atteindre notre objectif, nous nous sommes servit du langage de programmation orientée objet python pour informatiser la méthode dite de Simplexe, qui part d'une solution réalisable de base ou solution de base admissible que l'on n'améliore pas à pas.

La méthode du simplexe

- La méthode du simplexe est une méthode de résolution des problèmes de programmation linéaire. Elle permet de trouver la solution optimale (maximum ou minimum) d'une fonction objectif, tout en respectant un ensemble de contraintes linéaires.
- La méthode du simplexe est une technique algorithmique utilisée pour résoudre les problèmes de programmation linéaire, c'est-à-dire les problèmes d'optimisation dans lesquels la fonction objectif et les contraintes sont des expressions linéaires.

L'objectif de cette méthode est de déterminer la solution optimale (maximum ou minimum) d'une fonction objectif, tout en respectant un ensemble de contraintes sous forme d'inégalités ou d'égalités linéaires.

Le principe du simplexe repose sur une idée géométrique : l'ensemble des solutions admissibles forme un polyèdre convexe (une région délimitée par des plans). La méthode du simplexe explore les sommets de ce polyèdre, en passant d'un sommet à un autre adjacent, de manière à améliorer progressivement la valeur de la fonction objectif, jusqu'à atteindre le sommet optimal.

Cette méthode, introduite par George Dantzig en 1947, est aujourd'hui l'une des plus utilisées dans les domaines de la gestion, de l'économie, de la logistique, de la production et de la planification. Elle est à la fois simple dans son principe et puissante dans son efficacité, notamment pour les problèmes de grande dimension.

Exemple 1 : Problème de maximisation

Considérons le modèle linéaire (forme canonique) suivant :

$$\begin{cases} Maximiser \quad Z = 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Étape 1 : Mise sous forme standard

Ouvrages de référence

- V. Chvatal - Linear Programming, W.H.Freeman, New York, 1983.
- R. J. Vanderbei - Linear Programming, Foundations and Extensions, Springer-Verlag, 2008.
- C. Guéret, C. Prins et M. Sevaux-Programmation linéaire : 65 problèmes d'optimisation modélisés et résolus avec Visual Xpress, Eyrolles, 2000.
- C. Prins et M. Sevaux - Programmation linéaire avec Excel : 55 problèmes d'optimisation modélisés pas à pas et résolus avec Excel, Eyrolles, 2011.
- Vincent ISOZ. Recherche opérationnelle (solveurs). version 4.0 Révision 10 du 2014-11-25.
- Joël M. ZINSALO. Recherche Opérationnelle. Université d'Abomey Calavi, École Polytechnique d'Abomey Calavi.