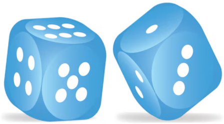
Probabilité & Statistique
Probabilité

Chapitre 1 : Analyse Combinatoire



PLAN

1. Expériences aléatoires - Evénements - Dénombrement
2. Arrangements
3. Permutations
4. Combinaisons

INTRODUCTION

INTRODUCTION

INTRODUCTION

- Historiquement, la notion de probabilité s'est dégagée à partir d'exemples simples empruntés aux jeux de hasard.
- L'analyse combinatoire est l'étude des ensembles finis du point de vue du nombre de leurs éléments. Elle porte sur le dénombrement de configurations d'objets satisfaisant des conditions données.
- La combinatoire sert d'outil dans plusieurs problèmes élémentaires en théorie des probabilités, domaine des mathématiques qui trouve son origine dans l'étude des jeux de hasard.
- Dans des domaines très différents comme le domaine médical, la sociologie, les sciences humaines etc, on s'intéresse à de nombreux phénoménes dans lesquels apparaît souvent l'effet du hasard.

INTRODUCTION

OBJECTIF

- Reconnaître une expérience, un événement et le vocabulaire ensembliste.
- Reconnaître les différentes situations : arrangements, permutations, combinaisons.
- Faire les calcus dans ces différentes situations.

Expériences aléatoires - Evénements - Dénombrement

Expériences aléatoires

Définitions

- Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prédire le résultat.
- Une expérience aléatoire est une expérimentation ou un phénomène conduisant à plusieurs résultats, et pour lequel on ne peut pas savoir à priori le résultat qui se produira.
- Une expérience est qualifiée d'aléatoire si l'on ne peut prévoir par avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques donne des résultats différents.
  Ces résultats sont appelés issus (ou possibilités).

Expériences aléatoires

Ensemble Fondemental

On note par ω le résultat d'une expérience aléatoire de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles : Ω est appelé l'ensemble fondamental ou encore l'univers des possibles.

L'univers des possibles ou l'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles.

Expérience 1

À l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés, on peut associer l'ensemble $\Omega = \{(1,1);(1,2);(1,3);\ldots\}$ à 36 éléments.

Expérience 2

On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure. Les issues possibles de cette expérience aléatoire sont : pile, face.

Évenement

Définition

Un événement est une assertion ou proposition logique relative au résultat de l'expérience. On dira qu'un événement est réalisé ou non suivant que la proposition est vraie ou fausse une fois l'expérience accomplie.

Exemple

A la réalisation d'un événement on peut donc associer tous les résultats de l'épreuve correspondante ; ainsi la somme supérieure ou égale à 10 de l'expérience précédente est l'ensemble des résultats suivants :
$\{(4,6);(5,5);(5,6);(6,6);(6,4);(6,5)\}$ c'est-à-dire une partie de Ω. On appelle événement élémentaire une partie de Ω réduite à un seul élément.

Dénombrement

Définition

Le dénombrement correspond au calcul du nombre de résultats de l'univers des résultats possibles lors d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes.

Remarque

Lors d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes, il est souvent utile de dénombrer les résultats possibles pouvant être obtenus. Pour cela, on peut faire recours à certaines techniques de dénombrement.

Cardinal

Soit Ω un ensemble qui a un nombre fini d'lments. Alors le cardinal de Ω, noté $\mathit{Card}(\Omega)$ (ou parfois $|\Omega| = \#\Omega$) est le nombre d'éléments de Ω. .

Dénombrement

Ensemble : Définition

Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments.

Ensemble vide

Un ensemble vide noté ϕ ou $\{\}$ est un ensemble qui ne contient aucun élément.

Ensemble des sous-ensembles

Soit A un ensemble, l'ensemble des sousensembles de A est appelé ensemble des parties de A ; on note $\mathcal{P}(A)$.

Exemple

Si $A = \{a, b\}$ alors $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Dénombrement

Produit Cartésien

Si A et B sont deux ensembles, alors le produit cartésien de A et B est :
$A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$

Exemple

$\{1, 2\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

Dénombrement

Soient $A \subseteq \Omega$ et $B \subseteq \Omega$

Union

$A \cup B = \{\omega \in A \textit{ ou } \omega \in B\}$ C'est l'ensemble des évńements élémentaires de A ou de B ou les deux. On interprète $A \cup B$ comme A ou B se réalisent.

Intersection

$A \cap B = \{\omega \in A \textit{ et } \omega \in B\}$ C'est l'ensemble des évńements élémentaires qui sont à la fois contenus dans A et contenus dans B. On interprète $A \cap B$ comme A et B se réalisent. On dit que deux événements A et B sont disjoints si $A \cap B = \phi$

Exemple

Si on considère un jeu de cartes avec A :" Tirer un coeur " et B : " tirer un 8 " alors :
$A \cup B$: " tirer un 8 ou un coeur " $A \cap B$: " tirer un coeur et un 8 ", c'est-à-dire " tirer un 8 de coeur".

Dénombrement

Différence

$A \backslash B = \{\omega \in A \text{ et } \omega \notin B\}$

C'est l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.

Complémentaire

$\bar{A} = A^c = \Omega \backslash A$

C'est l'ensemble des événements élémentaires qui ne sont pas dans A.

Exemple

On lance une pièce de monnaie :

$\{Pile\}^c = Face$

Dénombrement

Partition

On appelle partition de Ω une suite d'ensembles $(A_n)_{n\in N}$ de Ω, deux à deux disjoints et tels que leur réunion soit Ω. En d'autres termes : $i \neq j, A_i \cap A_j = \phi$ et $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \Omega$

Propriétés

Soient A et B deux ensembles finis. Alors :

1. $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.
2. Si $A \cap B = \phi$ alors $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$ (principe additif).
3. $card(A \times B) = card(A) \times card(B)$ (principe multiplicatif).

Dénombrement

Le tableau suivant présente les terminologies ensemblistes et probabilistes.

Notations	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
Ω	ensemble plein	événement certain
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω est une des réalisations possibles de A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c	complémentaire de A dans Ω	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles

ARRANGEMENT

Définition

Etant donné un ensemble E de n objets, un arrangement de p de ces objets est une suite ordonnée de p objets pris parmi n.

Remarque

On tient compte de l'ordre des objets.

Exemple

Le nombre de mots de 5 lettres (avec ou sans signification) formés avec les 26 lettres de l'alphabet correspond au nombre d'arrangements possibles avec $p = 5$ et $n = 26$.

Arrangement sans répétitions

Définition

Soit Ω un ensemble avec $card(\Omega) = n$. On constitue un échantillon de taille p ($p \leq n$), la disposition est ordonnée et sans répétition. On dit qu'on a un arrangement sans répétition de p éléments parmi n. Le nombre de p-arrangements d'un ensemble à n éléments est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Cela correspond à un tirage sans remise.

Factoriel

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$

Exemple 1

Pour accéder à un coffre-fort, il faut 5 lettres différentes.
Combien y a-t-il de mots de passes possibles ?

Exemple 1

Combien y a-t-il de tiercés lors d'une course de 20 chevaux ?

Arrangement avec répétitions ou p-arrangement

Définition

Lorsqu'un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangement avec répétition de p objets pris parmi n, est alors : n^p .

Voici le pourquoi

En effet :

- Pour le premier objet tiré, il existe n manières de ranger l'objet parmi n.
- Pour le second objet tiré, il existe également n possibilités d'arrangements car le premier objet fait de nouveau parti des n objets.
- On parle de tirage avec remise. Ainsi pour les p objets tirés, il y aura $n \times n \times n \times \cdots \times n$ (p fois) arrangements possibles, soit n^p

Exemple

Pour déverouiller un téléphone, il faut 4 chiffres.
Combien y a-t-il de mots de passes possibles ?

PERMUTATION

Permutation sans répétition ou Factoriel

Définition

Une permutation sans répétition de n éléments distincts est une suite ordonnée de ces n éléments. Autrement dit, c'est un arrangement de $p = n$ objets pris parmi n objets. Ainsi le nombre de permutations de n objets est :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Exemple

Combien y a-t-il de manières de placer les Chefs d'Etat de la zone UEMOA autour d'une table lors une réunion ?

Permutation avec répétition

Définition

On appelle permutation avec répétition de p éléments où n sont distincts $(n \leq p)$, une disposition ordonnée de l'ensemble de ces p éléments où le premier figure p_1 fois, le second p_2 fois, etc ; tel que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = p$. Le nombre de permutation avec répétitions est :

$$P = \frac{p!}{p_1!p_2!...p_n!}$$

Exemples

1. Combien de mots peut-on former (avec ou sans signification) à partir du mot “ Mamadou ” ?
2. Combien de mots peut-on former (avec ou sans signification) à partir du mot “ Blocage ” ?

COMBINAISON

Combinaison

Définition

Une combinaison de p objets pris dans E est un sous-ensemble de p de ces n objets.
L'ordre n'intervient pas.

Exemple

Le joueur de poker tire une combinaison de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. L'ordre des cartes ne compte pas.

Combinaison sans répétition

Définition

Une combinaison sans répétition correspond à un tirage sans remise et sans ordre. Le nombre de combinaisons sans répétition est donné par :
$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple

De combien de manières peut-on choisir une délégation de 6 personnes pris parmi un groupe de 20 personnes ?

Combinaison avec répétition

Définition

Une combinaison avec répétitions correspond au cas d'un tirage sans ordre et avec remise. Le nombre de combinaisons avec répétition de p objets parmi n est :
$C_{n+p-1}^{p} = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

Exemple

Soit la constitution de mots de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettre avec remise. Combien de mots peut-on en former ?

Quelques Propriétés

Propriétés

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \ \forall n, p \in \mathbb{N}$, on a les relations suivantes :

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$
2. $C_n^p = C_n^{n-p}$ (Complémentaire)
3. $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$ (Triangle de Pascal)
4. $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$ (Formule du binôme).