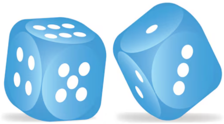
Probabilité & Statistique
Probabilité

Chapitre 2 : Calcul de Probabilité



PLAN

Vocabulaire

Définitions

- On appelle évènement A une partie de Ω. On note $A \subset \Omega$ et on dit que A est un sous-ensemble de Ω.
- L'univers Ω est appelé évènement certain : il est toujours réalisé puisqu'il contient toutes les issues.
- L'ensemble vide, noté ϕ est appelé évènement impossible : il n'est jamais réalisé puisqu'il ne contient aucune issue.

Vocabulaire

Définition

- Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque évènement élémentaire $\{a_i\}$ un nombre positif ou nul p_i tels que :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

  Le réel p_i est appelé probabilité de l'évènement élémentaire.
- La probabilité d'un événement quelconque A, notée $P(A)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Définitions et Propriétés

Propriétés

- La probabilité de l'évènement certain vaut 1.

  $P(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'évènement impossible vaut 0.

  $P(\phi) = 0$
- Pour tout évènement A, on a : $0 \leq P(A) \leq 1$

Définitions et Propriétés

Définition

Dans le cas où les probabilité p_i des évènements élémentaires sont toutes égales, on dit qu'on est en situation d'équiprobabilité sur Ω.

Dans ce cas, si Ω est constitué de n évènements élémentaires, la probabilité p de chaque évènement élémentaire est égale à $\frac{1}{n}$

Propriété

La probabilité d'un évènement quelconque A est alors :
$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues réalisant A}}{\text{Nombre total d'issues de } \Omega}$

Évenement

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω.

Définitions

- On appelle $A \cap B$ l'évènement constituée des issues qui sont à la fois dans A et dans B.
- On appelle $A \cup B$ l'évènement constituée des issues qui sont dans A ou dans B.
- Si $A \cap B = \phi$, on dit que A et B sont incompatibles ou disjoints.
- L'évènement contraire de A, noté $\bar{A}$, est l'évènement formé des issues ne réalisant pas A.

Propriétés

Soient A et B deux évènements.

Propriétés

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Lois de Morgan : $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Propriétés

Soient A et B deux évènements.

Propriétés

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriété

Soit A un évènement quelconque et $\bar{A}$ son évènement contraire.
On a : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ et $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Exemple

Exemple

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes et on note la carte obtenue.
On considère les évènements A : “ la carte est un As ” et B : “ la carte est un coeur ”.

Déterminer les probabilités suivantes :

- $P(A)$
- $P(B)$
- $P(\bar{B})$
- $P(A \cap B)$
- $P(A \cup B)$

Probabilité Conditionnelle

Définition

Soit $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ P)$ un espace probabilisé et B un évènement tel que $P(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle d'un évènement A sachant que B est réalisé, le nombre défini par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Cette probabilité représente la probabilité de voir l'évènement A se réaliser sachant que l'évènement B est réalisé.

Propriété

Soient deux évènements A, B tels que $P(B) > 0$ et $A \subset B$, alors

$$P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Remarque

Les deux notations suivantes sont équivalentes : $P_B(A)$ et $P(A/B)$.

Exemple

Exemple

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les évènements :
B : " la face obtenue porte un numéro pair " ;
A : " la face obtenue porte un numéro multiple de 3 ". Déterminons la probabilité d'obtenir un numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair.

✍**solution**

On a : $P(B) = \frac{3}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

Formule des probabilités composées

Propriété

Si A et B sont des évènements de probabilités non nulles, on a :

$$P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A) = P(A/B) \times P(B)$$

Généralisation

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) =$$
$$P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times \cdots \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Formule des probabilités composées

Exemple

Dans une urne contenant 10 boules blanches et 5 boules noires on tire successivement et sans remise 2 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

solution

Soient les évènements :

A_1 : " la première boule tirée est blanche "

A_2 : " la deuxième boule tirée est blanche "

$P(A_1 \cap A_2) = ???$

$P(A_1) = \frac{10}{15}$

$P(A_2/A_1) = \frac{9}{14}$

Donc $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2/A_1) \times P(A_1) = \frac{9}{14} \times \frac{10}{15}$

Formule des probabilités totales (ou complète)

Formule des probabilits totales

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles, On a :

$P(A) = P(A/B) \times P(B) + P(A/\bar{B}) \times P(\bar{B})$

Généralisation

Supposons que l'on ait une partition de Ω en n évènements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de probabilités non nulles. Alors :

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \times P(B_i) = P(A/B_1) \times P(B_1) + \cdots + P(A/B_n) \times P(B_n)$

Exemple

Une usine dispose de trois machines A, B et C qui fabriquent respectivement 20% , 30% et 50% de la production. Sachant que la probabilité qu'une ampoule défectueuse ait été fabriquée par A, B ou C est $P(D/A) = 0,05$; $P(D/B) = 0,04$; $P(D/C) = 0,01$. Calculer la probabilité :

1. qu'une ampoule soit défectueuse ;
2. pour qu'une ampoule défectueuse provienne de A .

Solution

Probabilité pour qu'une ampoule soit défectueuse

Appelons A, B, C les évènements l'ampoule a été fabriquée par A, B ou C.

$P(A) = 0,20\,;\ P(B) = 0,30\,;\ P(C) = 0,50.$

Pour calculer $P(D)$, on utilise la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) + P(D/C)P(C)$

$P(D) = 0,01 + 0,012 + 0,05 = 0,027$

Probabilité pour qu'une ampoule défectueuse provienne de A

$P(A/D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A)P(A)}{P(D)} = \frac{0{,}20\times 0{,}05}{0{,}027} = 0,37$

Formule de Bayes

Motivation

Calculer la probabilité de B sachant A à partir de celle de A sachant B.

Formule de Bayes (cas particulier)

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles. On a :

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)\times P(B)}{P(A)} = \frac{P(A/B)\times P(B)}{P(A/B)\times P(B)+P(A/\bar{B})\times P(\bar{B})}$$

Généralisation

Supposons que l'on ait une partition de Ω à n évènements B_1, B_2, ..., B_n de probabilités non nulles. Alors :

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i)\times P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A/B_i)\times P(B_i)}{\sum_{i=0}^{n} P(A/B_i)\times P(B_i)}$$

Exemple

Trois usines A1, A2 et A3 fournissent respectivement 25% , 35% et 40% des carreaux nécessaires à une entreprise de construction. Dans leurs livraisons, il y a une moyenne 5, 4 et 2% de carreaux inutilisables. Un carreau est choisi au hasard dans un stock important. Ce carreau est défectueux. Quelles sont les probabilités $P(A_1/D)$, $P(A_2/D)$ et $P(A_3/D)$.

Solution

Les hypothèses se traduisent par :

$P(A_1) = 0,25$, $P(A_2) = 0,35$, $P(A_3) = 0,40$
$P(D/A_1) = 0,05$, $P(D/A_2) = 0,04$, $P(D/A_3) = 0,02$

Calculons $P(A_1/D)$

$$P(A_1/D) = \frac{P(D/A_1)P(A_1)}{P(D/A_1)P(A_1)+P(D/A_2)P(A_2)+P(D/A_3)P(A_3)} = \frac{P(D/A_1)P(A_1)}{P(D)} = 0,36$$

Calculons $P(A_2/D)$

$$P(A_2/D) = \frac{P(D/A_2)P(A_2)}{P(D)} = 0,41$$

Calculons $P(A_3/D)$

$$P(A_3/D) = \frac{P(D/A_3)P(A_3)}{P(D)} = 0,23$$

Indépendance

Indépendance

Définition

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles. On dit que A et B sont indépendants si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple

On considère le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes.
$A =$ “ Tirer un As ”, $B =$ “ Tirer un coeur ” et $C =$ “ Tirer un As rouge ”. Étudier l'indépendance deux à deux.

Indépendance

✍**solution**

Indépendance de A et B

$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
$P(A \cap B) = \frac{1}{32}$
$P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$
Donc les évènements A et B sont indépendants.

Indépendance de B et C

$P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$
$P(C) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$
$P(B \cap C) = \frac{1}{32}$
$P(B) \times P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$
Donc les évènements B et C ne sont pas indépendants.

Indépendance mutuelle

Définition

Soient A, B et C trois évènements. Les évènements A, B et C sont mutuellement indépendants lorsque :

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Relation entre indpendance deux deux et indpendance mutuelle

- L'indépendance mutuelle entraine l'indépendance deux à deux.
- L'indépendance deux à deux n'entraine pas l'indépendance mutuelle.