Cours de Recherche Opérationnelle (RO)

Dr. Cheikh GUEYE[1,2]

[1]Université Cheikh Anta Diop de Dakar (UCAD-Sénégal)
Titulaire d'un Doctorat en Analyse, Statistiques et Applications (UCAD)
[2]Université Claude Bernard Lyon 1 (UCBL-France)
Titulaire d'un doctorat en Mathématiques Appliquées (UCBL)
Titulaire d'un Certificat en Data science
Laboratoire de Mathématiques Appliquées (LMA-UCAD)

cheikh.gueye1990@yahoo.fr, cheikh39.gueye@ucad.edu.sn

Institut Supérieur d'Informatique **Niveau:** L2 GL

LOGO ISI

Année: 2025-2026

Déroulement du cours

LOGO ISI

Informations générales

1. **Intitulé du cours:** Recherche Opérationnelle (RO)
2. **Niveau:** Licence/Master (selon approfondissement)
3. **Volume horaire:** 20h Cours + 10h TD/TP
4. **Prérequis:**
   - Mathématiques (algèbre linéaire, logique, probabilités de base)
   - Algorithmique et structures de données
   - Programmation (Python/R/Java/C++ ou langage équivalent)
   - Tableur Excel

LOGO ISI

Objectifs du cours

1. Comprendre les fondements de la Recherche Opérationnelle et leurs applications au développement logiciel.
2. Modéliser des problèmes de gestion, d'optimisation et d'ingénierie logicielle.
3. Utiliser des méthodes quantitatives et algorithmiques pour la prise de décision.
4. Développer des applications logicielles intégrant des modèles RO (planification, affectation, optimisation des ressources).

LOGO ISI

Introduction à la recherche opérationnelle

- La recherche opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.
- Traite des problemes d'optimisation:
  - **Maximisation** d'un profit, d'une performance, d'un rendement, ...
  - **Minimisation** d'un coût, d'une dépense, ...
- La démarche méthodologique utilisée pour résoudre un problème de décision à l'aide de la RO:
  - Identification des variables de décision,
  - décrire les contraintes,
  - et établir la fonctions objectif ou la fonction économique
  - Passage du problème réel (ou un problème posé en entreprise) au modèle mathématique (programmation linéaire)

Types de problèmes traités

Lorsqu'on est confronté à un problème

- Qui comprend un nombre fini (souvent très grand) de solutions admissibles parmi lesquelles on cherche la solution optimale ou proche de l'optimum : **Problème combinatoire**
- Qui consiste à trouver une solution optimale face à un problème dont les termes dépendent de l'interrelation entre entre ses propres agissements et ceux d'autres décideurs: **Problème concurrentiel**.
- Qui se pose en terme incertain : **Problème aléatoire**

Origines

- Pendant la Seconde Guerre mondiale: Pour fournir des techniques d'optimisation des ressources militaires.

Le premier sucés obtenu en 1940 par le Prix Nobel de physique **Patrick Blackett** qui résolut un problème d'implantation optimale de radars de surveillance.

- Le qualificatif opérationnelle vient du fait que les premières applications de cette discipline avait trait aux opérations militaires.

Expansion

- Après la seconde guerre mondiale (1950), la recherche opérationnelle fait son entrée dans les entreprises.
- Pendant les années 50 et 60, l'interet et le développement de la Recherche Opérationnelle a agrandi dans la suite de l'application sur le commerce et l'industrie. Prenons l'exemple du problème de calcul du projet optimal de transport de sable de la construction aux travaux d'édification à Moscou, où il y avait 10 points d'origine et 230 destinations. Pour la résolution ils ont fait usage d'un ordinateur Strena dans le mois de juin de 1958, et aprés 10 jours de travail, il a fourni une réduction du 11 % de coûts par rapport aux coûts originaux prévus.
- Auparavant on avait déjà posé ces problèmes dans une discipline connu comme Analyse d'Entreprise, qui n'avaient pas des méthodes si

effectifs que celles de la Seconde Guerre mondiale (par exemple la méthode du Simplexe). Les applications pas de guerre de la Recherche Opérationnelle s'étendent par tous les cadres, avec des problèmes de l'alimentation, élevage, distribution de culture dans l'agriculture, transport de marchandise, localisation, distribution du personnelle, problèmes de réseaux, de files d'attente, de graphes, etc.

Grâce à l'informatique, elle a pris un essor remarquable dans presque tous les domaines.

- Développement de la politique national d'administration de l'eau, y compris les nouvelles installations, les procédés d'opérations et les coûts (Ministère hollandais de l'infrastructure et de l'environnement (The Netherlands Rijkswaterstaat), 1985).
- Distribution optimal des ressources hydriques et thermiques dans le système national de génération d'energie (Electrobras/CEPAL Brasil, 1986).
- Restructuration total de la chaîne d'approvisionnement entre les fournisseurs, les usines, les centres de distribution, les endroits potentiels et les zones de commerce (Digital Equipment Corp., 1995).

- Optimisation du mélange d'ingrédients disponibles pour que les combustibles obtenus atteindraient aux demandes de vente et de qualité (Texaco, Inc., 1989).
- etc.

Définition du problème

Objectif : comprendre clairement la situation à étudier

1. Identifier le contexte et les objectifs (maximiser, minimiser, équilibrer. . .).
2. Déterminer les ressources disponibles (moyens, contraintes, données).
3. Identifier les décideurs, les acteurs et les variables du problème.

Exemple: une entreprise veut minimiser ses coûts de transport entre plusieurs dépôts et clients.

LOGO ISI

La recherche opérationnelle est une discipline des mathématiques appliquées qui s'intéresse à l'application du savoir mathématique aux autres domaines. La programmation linéaire, la programmation mathématique, la programmation floue, la programmation multicritère, la programmation stochastique, la programmation dynamique, l'optimisation et la recherche opérationnelle; la théorie des graphes; la théorie des jeux; la théorie du contrôle optimal, l'analyse numérique, les bio-mathématiques, la bio-informatique, la théorie de l'information; les probabilités et les statistiques, les mathématiques financières et l'actuariat; la cryptologie et, jusqu'à un certain point, la combinatoire et la géométrie finie; telle qu'appliquée à l'analyse des réseaux, ainsi qu'une bonne partie de ce qu'on appelle l'informatique sont autant de domaines d'application des mathématiques.

Le boum de la recherche opérationnelle coïncide avec la seconde guerre mondiale. Historiquement, le premier terme introduit fut celui de **programmation linéaire** inventé par George Dantzig dans les années 1940. Le terme programmation vient de l'usage du mot programme par les forces armées américaines pour établir des horaires de formation et des choix logistiques que Dantzig étudiait à l'époque. L'emploi du terme programmation avait également un intérêt pour débloquer des crédits en une époque où la planification devenait une priorité des gouvernements.

Outils scientifiques :

- Mathématiques Appliquées (Optimisation, Probabilités, Algèbre, Graphes, Jeux, Décision,. . .) ;
- Informatique (Algorithmique, Complexité, Contraintes)
- La recherche opérationnelle est avant tout un outil d'aide à la décision.

L'approche de la recherche opérationnelle face à un problème applicatif consiste à :

- élaborer un modèle (résultat d'un consensus entre le demandeur et le chercheur);
- développer un algorithme de résolution exacte ou approchée ;
- évaluer la qualité des solutions produites par l'algorithme dans l'environnement réel du problème.

Le chercheur opérationnel cherchera à fournir:

- un outil (logiciel) aussi générique que possible, i.e : utilisable et performant sur un ensemble d'instances ;
- non une solution d'une instance particulière.

La programmation linéaire occupe une place centrale de l'optimisation, car les problèmes de PL sont les problèmes d'optimisation les plus faciles - toutes les contraintes y étant linéaires. Beaucoup de problèmes réels de RO peuvent être exprimés comme un problème de PL. Pour cette raison un grand nombre d'algorithmes pour la résolution d'autres problèmes d'optimisation sont fondés sur la résolution de problèmes linéaires.

La programmation linéaire est essentiellement appliquée pour résoudre des problèmes d'optimisation à moyen et long terme (problèmes stratégiques et tactiques, dans le vocabulaire de la recherche opérationnelle).

Les domaines d'application de ces problèmes sont très nombreux aussi bien dans la nature des problèmes abordés (planification et contrôle de la production, distribution dans les réseaux) que dans les secteurs d'industrie: industrie manufacturière, énergie (pétrole, gaz, électricité, nucléaire), transport (aériens, routiers et ferroviaires), télécommunications, industrie forestière, finance. La recherche opérationnelle a aussi des applications dans le domaine de l'énergie.

Elle est couramment utilisée dans l'industrie pétrolière, principalement dans l'établissement des plans de production à long terme, à moyen terme, annuel, trimestriel et mensuel. Les résultats permettent aux décideurs d'avoir un guide pour faire les meilleurs choix dans les investissements, dans l'approvisionnement des bruts, dans l'utilisation des unités de raffinage, dans les canaux de distribution les plus rentables.

De même, les opérateurs du marché de l'électricité font largement appel à la recherche opérationnelle tant pour des problèmes stratégiques (par exemple des investissements sur le réseau) que pour des questions plus opérationnelles (stabilité du réseau, prévisions. . .).

Dans le cadre de l'industrie manufacturiere, la recherche opérationnelle permet notamment de trouver des plans de productions (ordonnancement de production), de disposer au mieux les machines dans un atelier, de diminuer le gaspillage des matières premières (problèmes de découpe) ou de l'énergie ou bien encore d'optimiser le conditionnement et la livraison des produits intermédiaires ou finis.

La recherche opérationnelle peut aider le décideur lorsque celui-ci est confronté à un problème combinatoire, aléatoire ou concurrentiel.

Un problème est dit combinatoire lorsqu'il comprend un grand nombre de solutions admissibles parmi lesquelles on cherche une solution optimale ou proche de l'optimum.

La plupart des problèmes combinatoires de la R.O. ont un graphe comme support:

- TSP généralisé (graphe des communications);
- Ordonnancement (graphe des précédences) ;
- Transport (graphe des liaisons) ;
- Emplois du temps (graphe des incompatibilités) ;
- Flots et circulations (graphe des liaisons)

La théorie des graphes sert de support à la résolution d'un vaste échantillon de problèmes, notamment certains issus de l'algorithmique classique, tels que la recherche du plus cour chemin entre deux endroits, le problème du voyageur de commerce (dans lesquels on cherche le chemin le plus court passant par n points), les problèmes d'ordonnancement de tâche, les problèmes de planning ou encore les problèmes d'optimisation de flux (algorithme de Ford-Fulkerson). Elle s'est également développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,...

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

LOGO ISI

Application 1: Problème de production

Une entreprise fabrique plusieurs produits, ce qui exige des ressources particulières (matières premières, machines, personnel ...) en quantités limitées. Chaque produit rapporte un certain bénéfice (connu) à l'entreprise.

Question

Quels produits l'entreprise doit-elle fabriquer et en quelle quantité pour réaliser le bénéfice total le plus élevé ?

Démarche

- Modélisation ou formulation du problème: variable de décision, fonction objectif et contraintes (modèle mathématique = PL).
- Résolution manuelle (graphique et simplexe): pour des problème de petite taille.
- Résolution informatique (problème de grande taille): Solveur Excel, LpSolve, Python, R, ...

LOGO ISI

Application 2: Problème de transport

Une entreprise dispose de plusieurs dépôts contenant chacun un certain nombre de containers. Différents magasins commandent des containers. On connaît le coût de transport de chaque dépôt aux magasins.

Question

Quelle est l'organisation des livraisons des containers pour minimiser le coût total de transport ?

LOGO ISI

Application 3: Problème d'affectation

n tâches doivent être affectées à n machines (1 tâche par machine). Le coût d'exécution de chaque tâche par chacune des machines est connu.

Question

Comment trouver l'affectation qui minimise le coût total ?

Application 4: Problème du voyageur de commerce

Un voyageur de commerce doit visiter n villes. La distance entre chaque ville est donnée.

Question

Trouver le plus court trajet passant par les n villes.

LOGO ISI

Application 5: Problème du sac à dos

On dispose de n objets donc chacun d'eux a une masse (ou volume) et une valeur connues.

Question

Comment transporter certains objets, afin de maximiser la valeur totale sans dépasser la capacité massique (ou volumique) du sac ?

On l'utilise aussi pour modéliser les situations suivantes, quelquefois en tant que sous-problème :

- dans des systèmes d'aide à la **gestion de portefeuille**: pour équilibrer la sélectivité et la diversification dans le but de trouver le meilleur rapport entre rendement et risque pour un capital placé sur plusieurs actifs financiers (actions. . .) ;
- dans le **chargement de bateau ou d'avion**: tous les bagages à destination doivent être amenés, sans être en surcharge; ou l'optimisation d'un navire de charge (cargo polyvalent ou porte-conteneurs) en fonction de plusieurs critères : poids, volume,

LOGO ISI

destination, marchandises spécifiques (dangereuses ou frigorifiques), importance des clients etc.

Face a un problème concret de type R.O.: Les étapes suivantes sont nécessaires

- **La modélisation.** Une transformation du problème concret par:
  - des équations et/ou inéquations mathématiques
  - des graphes (schématisation)
- **Résolution.** Techniques principales
  - Programmation linéaire
  - Programmation dynamique
  - Programmation en nombres entiers
  - Optimisation dans les réseaux
  - Programmation non linéaire
  - Modèles stochastiques
- **Interprétation**
- **Prise de décision**

Objectif : apprendre à modéliser les problèmes réels et à résoudre les programmes linéaires.

- De nombreux problèmes réels peuvent être exprimés comme des programmes linéaires.
- Les programmes linéaires peuvent être résolus efficacement par certains algorithmes.
- Ce sont d'excellents exemples de questions pratiques dont la résolution nécessite une combinaison de méthodes algorithmiques, de mathématiques élémentaires et de bon sens.

1. Formulation d'un programme linéaire (Modélisation).
2. Introduction + une approche naïve: la méthode graphique
3. L'algorithme du simplexe
4. Simplexe : comment éviter les pièges
5. Dualité et interprétation économique.
6. Programmation linéaire en nombres entiers.

Formulation du modèle mathématique (Modélisation)

Objectif: traduire le problème réel en langage mathématique

1. Définir les variables de décision (ex: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ou bien x_{ij}= quantité transportée de i vers j).
2. Écrire la fonction objectif ou la fonction économique (ex : minimiser le coût total $\sum c_i x_i$ ou bien $\sum c_{ij} x_{ij}$).
3. Établir les contraintes (ex : respect des capacités, de la demande, etc.).

C'est ici qu'on obtient un modèle mathématique de type linéaire, non linéaire, entier, etc.

La programmation linéaire est un cas particulier de la programmation mathématique, où l'on cherche à trouver un optimum (maximum ou minimum) d'une fonction linéaire à plusieurs variables, ces variables étant soumises à un système d'inéquations (d'équations) linéaires.

Modélisation

La formulation d'un problème d'optimisation comporte toujours les trois étapes suivantes:

- La première étape consiste à **choisir les variables** du problème.
  - On appelle variable toute quantité utile à la résolution du problème dont le modèle doit déterminer la valeur.
  - Cette définition permet de différencier les variables des paramètres, qui sont des données qui peuvent varier, par exemple d'une période à l'autre ou d'un scénario à l'autre.
- La deuxième étape consiste à **formuler mathématiquement l'objectif**.
  - On appelle fonction objectif (ou fonction économique) d'un problème d'optimisation le critère de choix entre les diverses solutions possibles.
- La troisième étape est la formulation des **contraintes** du problème.
  - On appelle contraintes du problème toutes les relations limitant le choix des valeurs possibles des variables. Ces relations peuvent être de simples bornes sur les variables.

PL

1. **Fonction objectif (ou fonction économique) linéaire**

   min le coût / max le profit

$$min/max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

2. **contraintes inégalité ou égalité linéaire**

   - **satisfaire la demande**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b_1$$

   - **avec des ressources limitées**

$$a'_1x_1 + a'_2x_2 + \cdots + a'_nx_n \leq b'_1$$

   ou

$$a''_1x_1 + a''_2x_2 + \cdots + a''_nx_n = b''_1$$

3. **quantités produites:** $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. x_i: variable de décision du problème

LOGO ISI

La programmation linéaire nous permet de résoudre un programme linéaire composé d'une fonction linéaire (fonction objectif) à optimiser (maximiser ou minimiser) sous certaines contraintes exprimées en un système d'équations ou d'inéquations linéaires.

Exemple 1

Une entreprise spécialisée dans la fabrication de matériels informatiques, propose à son catalogue d'ordinateurs des centaines de référence. Pour simplifier, on ne s'intéresse ici qu'a deux types d'ordinateurs : le Core i3 et le Core i7. Chacun d'eux comporte un processeur (le même) mais les deux modèles différent en particulier par le nombre de barrettes mémoires. Plus précisément, le Core i3 comporte 2 barrettes alors que le Core i7 en comporte 6. Le marché pour ces composants est tel qu'on ne peut espérer acheter auprès des fournisseurs habituels plus de 10 000 processeurs pour le trimestre à venir et plus de 48 000 barrettes. Une autre limitation intervient sur la production: l'assemblage est caractérisé, en particulier, par une opération délicate, qui pour le Core i3 est de 3 minutes alors que pour le Core i7 elle n'est que d'une minute. On ne dispose a priori pour l'assemblage de ces deux types de machines que de 24 000 minutes pour le trimestre à venir.

Enfin, compte tenu des conditions actuelles du marché, on peut espérer retirer un profit de 40 000 FCFA sur le Core i3 et de 80 000 FCFA sur le Core i7.

L'objectif est de déterminer les quantités de chacun des deux types d'ordinateurs à fabriquer de manière à obtenir le plus grand profit possible.

Questions

1. Modéliser ce programme sous forme d'un programme linéaire en précisant les variables de décision, la fonction objectif et les contraintes.
2. Écrire la forme matricielle.
3. Résolution graphique le modèle obtenu.

LOGO ISI

Exemple 2

Une usine fabrique des chaises et des tables. Chaque semaine l'usine commande la même quantité de bois, connaît le temps de travail de ses employés et la durée de fonctionnement de ses machines. Sachant qu'une table rapporte 6 euros et une chaise 4, quel est le mix chaises-tables qui maximise le revenu de l'usine?

	Table	Chaise	Quantité disponible
Équipement	3	9	81
Main d'oeuvre	4	5	55
Bois	2	1	20

1. Modéliser ce programme sous forme d'un programme linéaire.
2. Écrire le programme obtenu sous la forme matricielle.
3. Résoudre graphiquement le problème linéaire.

Exemple 3

Une entreprise de relation publique veut faire un sondage d'opinion. Chaque employé peut faire chaque jour 80 interviews par téléphone ou 40 interviews direct.

Un employé ne peut faire qu'un seul de sondage type pendant une journée. Afin d'avoir un échantillon représentatif on doit satisfaire les trois critères:

- Au moins 3000 interviews
- Au moins 1000 interviews par téléphone
- Au moins 800 interviews directe

L'employé conduisant les interviews par téléphone est payé 150 UM et L'employé conduisant les interviews directes est payés 170 UM. Modéliser ce problème.

Question

1. Modéliser ce problème
2. Écrire le programme obtenu sous la forme matricielle.
3. Résoudre graphiquement le problème linéaire.

- Une **fonction objectif** z (ou une **fonction économique**) est une fonction linéaire de n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ telle que $z = z(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, avec $c_1, c_2, \ldots,$ et c_n sont des nombres réels.
- Le n-uplet $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ est dit **solution admissible (ou réalisable)**, s'il vérifie toutes les contraintes du programme linéaire.
- On appelle **solution optimale** toute solution admissible qui optimise la fonction objectif z.
- L'ensemble des **solutions admissibles** du programme linéaire est appelée région des solutions admissibles.

LOGO ISI

Les hypothèses de la programmation linéaire

Comme toute opération visant à modéliser des phénomènes concrets et réels de notre quotidien, la programmation linéaire suppose que certaines hypothèses soient vérifiées afin que le programme linéaire final décrivant le problème soit valable:

- La contribution de chaque variable à la valeur de la fonction objectif est proportionnelle à la valeur de cette variable.
- La contribution de chaque variable est indépendante de la valeur des autres variables.
- Les variables de décision du problème $x_1, x_2 \ldots$ sont positives et ils prennent des valeurs réelles non entières.
- Les paramètres du problème autres que les variables de décision ont une valeur connue avec certitude.
- La fonction objectif est décrite par une fonction linéaire des variables de décision.

Rappel: Les étapes de formulation d'un PL

Généralement, il y a trois étapes à suivre pour modéliser un problème concret via un programme linéaire:

- Identifier les variables de décision du problème et les représenter sous forme symbolique: $x_1, x_2 \ldots$
- Identifier les contraintes du problème et les exprimer par un système d'équations ou d'inéquations linéaires.
- Identifier la fonction objectif à maximiser ou à minimiser et la représenter sous forme linéaire en fonction des variables de décision.

LOGO ISI

Résolution du modèle, analyse et interprétation des résultats

Objectif : trouver la ou les meilleures solutions possibles.

1. Choisir une méthode de résolution:
   - Méthode du simplexe (pour la programmation linéaire).
   - Méthodes graphiques (pour deux variables).
   - Branch and Bound (pour les entiers).
   - ou utilisation de logiciels (Excel Solver, etc.).
2. Calculer la solution optimale et vérifier la faisabilité.

Objectif : donner un sens concret aux résultats numériques

1. Traduire les valeurs des variables dans le contexte réel du problème.
2. Vérifier la cohérence avec la situation pratique.
3. Réaliser une analyse de sensibilité (impact des variations de données).

LOGO ISI

Mise en œuvre de la solution (prise de décision)

Objectif : appliquer concrètement les recommandations

1. Présenter la solution aux décideurs.
2. Intégrer les résultats dans le processus décisionnel.
3. Mettre en place le suivi et l'évaluation des résultats réels.

Révision du modèle si nécessaire

Si le contexte change (nouvelles contraintes, nouvelles données), on met à jour le modèle et on recommence le processus.

En résumé, les étapes clés sont: Définition du problème, Modélisation mathématique, Résolution du modèle, Interprétation des résultats, Mise en œuvre et suivi.

LOGO ISI

Exercice: Modéliser le problème suivant

Exercice 1: Problème de production

Une entreprise produit n biens différents. Pour cela, elle dispose de m types de ressources. Elle possède b_j unités de la ressource j pour $j = 1, \ldots, m$. La production d'une unité du bien i entraîne un profit égal à c_i, pour $i = 1, \ldots, n$. Pour produire une unité du bien i, elle a besoin de a_{ij} unités de chaque ressource j.

Quelle quantité de chaque bien doit produire l'entreprise afin de maximiser le profit ?

Exercice 2: Problème de rangement

On considère n objets que l'on doit ranger dans un sac dont la capacité massique (volumique) est P. Chaque objet i a un poids p_i et une valeur v_i. On cherche un rangement de valeur maximale.

Exercice 3: Problème d'alimentation

On se propose de réaliser une alimentation économique pour des bestiaux, qui contient obligatoirement 4 sortes de composants nutritifs, A, B, C et D. L'industrie alimentaire produit précisément deux aliments M et N qui contiennent ces composants: 1 Kg d'aliment M contient 100 g de A, 100 g de C, 200 g de D; 1 Kg d'aliment N contient 100 g de B, 200 g de C, 100 g de D. Un animal doit consommer par jour au moins: 0.4 Kg de A; 0.6 Kg de B; 2 Kg de C; 1.7 Kg de D. L'aliment M coûte 10 euros le Kg et N coûte 4 euros le Kg.

Quelles quantités d'aliments M et N doit-on utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse?

Exercice 4: Problème de médecine

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats:

- Petite taille: elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille: elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine.

Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Exercice 5: Problème de recrutement

Une société industrielle doit recruter trois techniciens afin de renforcer certain de ses quatre groupes de travail dont le but est de maximiser le nombre de pièces fabriquées par l'ensemble de ses employés. La rentbilité de ces techniciens se mesure par le nombre de pièces additionnelles que va produire chaque groupe.

Nombre de techniciens	1	2	3
Groupe 1	50	80	90
Groupe 2	40	50	85
Groupe 3	20	30	80
Groupe 4	30	40	100

Déterminer le meilleur recrutement.

Exercice 6: Politique d'achat optimale

Un marchant d'un certain bien dispose d'une capacité de stockage (pour ce bien) de K unités et on admet que le coût de stockage est nul. Sur n périodes ($n \in \mathbb{N}^*$), on connaît les demandes d_i et les prix unitaires d'achat p_i de ce bien. Sachant que les achats se font en début de période, on démarre et finit avec un stock nul, les quantités sont entières, le problème consiste à trouver la meilleure stratégie d'approvisionnement c'est-à-dire déterminer la politique optimale d'achat.

Période i	1	2	$\ldots$	n
Demande d_i	d_1	d_2	$\ldots$	d_n
Prix unitaire	p_1	p_2	$\ldots$	d_n

Programmation linéaire

1. Tout problème mathématique qui consiste à optimiser (maximiser un profit, minimiser un coût) une fonction linéaire de plusieurs variables liées par des relations linéaires est dit programmation linéaire.
2. L'importance de la PL résulte du fait qu'un très grand nombre de modèles constituent des extensions de programmes linéaires. Ce qui fait qu'elle est rencontrée dans diverse domaines.
   - Pb d'affectation (Programme Linéaire en Variables Binaires (PLVB))
   - Pb du sac 'a dos (Programme Linéaire en Nonbres Entiers (PLNE) ou en VB)
   - etc.
3. **Méthode de résolution**
   - Méthode graphique (uniquement 2 variables de décisions)
   - Méthode du simplexe
   - Dualité et interprétation économique
   - Applications: allocation de ressources, optimisation de coûts logiciels

   De manière générale, la résolution d'un problème de PL nécessite la mise en oeuvre d'un algorithme.

Modélisation

La formulation d'un problème mathématique d'un programme linéaire suit trois étapes.

1. **Choix des variables de décision ou structurelles:** les inconnus qui interviennent dans la fonction linéaire à optimiser.
2. **Identification de la fonction économique ou fonction objectif**: la fonction à optimiser. Puis spécification de la nature d'optimisation c'est à dire s'il s'agit d'une maximisation ou d'une minimisation.
3. **Détermination des contraintes**: se sont les restrictions des variables (relations entre variables). Elles peuvent s'interpréter comme les disponibilités des ressources (contraintes technologiques).

LOGO ISI

Exemple Problème de production

Une entreprise produit n biens différents. Pour cela, elle dispose de m types de ressources. Elle possède b_j unités de la ressource j pour $j = 1, \ldots, m$. La production d'une unité du bien i entraîne un profit égal à c_i, pour $i = 1, \ldots, n$. Pour produire une unité du bien i, elle a besoin de a_{ij} unités de chaque ressource j.

Quelle quantité de chaque bien doit produire l'entreprise afin de maximiser le profit ?

Modélisation

- Choix des variables de décision: Soit x_i la quantité de bien i qu'il faut produire;
- Identification de la fonction économique z: si on produit une quantité x_i du bien i, alors cela rapporte un profit de $c_i x_i$. Donc

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

- Détermination des contraintes :
  - Contraintes technologiques qui limitent les unités de fabrication (disponibilité des ressources):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_j,\ avec\ j = 1, \ldots, m$$

  - Contraintes de non négativité (ou la positivité des quatités produites) des quantités produites: $x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$.

On obtient ainsi le programme linéaire suivant:

$$(P) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \geq 0\ où\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

où sous forme matricielle

$$(P):\begin{cases} Max\ \mathbf{z}=\mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \rightarrow \textit{Fonction objectif} \\ \mathbf{Ax}\leq \mathbf{b} \rightarrow \textit{Contraintes} \\ \mathbf{x}\geq \mathbf{0} \rightarrow \textit{Conrainte de positivités} \end{cases}$$

avec

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

c^T : la transposée de c.

Application

Un atelier fabrique deux produits P_1 et P_2 à base de deux principales matières premières M_1 et M_2. Il dispose de 200 unités de matière M_1 et de 640 unités de M_2. Le produit P_1 nécessite une quantité de 5 unités de M_1 et de 10 unités de M_2. Quant au produit P_2, il nécessite une quantité de 4 unités de M_1 et de 16 unités de M_2. La quantité de P_1 que peut produire la machine en une journée ne peut excéder 25.

Les marges bénéficiaires de P_1 et P_2 sont respectivement 1 000 F CFA et 1 400 F CFA.

Quelle quantité doit produire l'atelier afin de maximiser le bénéfice journalier ?

Modélisation

- Variables de décision: Soit x_1 et x_2 désignent respectivement les quantités produites de P_1 et P_2.
- Fonction objectif: $z = 1000x_1 + 1400x_2$

- Les contraintes:
  - Contrainte liée à la disponibilité M_1 : $5x_1 + 4x_2 \leq 200$
  - Contrainte liée à la disponibilité M_2 : $10x_1 + 16x_2 \leq 640$
  - Contrainte liée à la machine: $x_1 \leq 25$
  - Contraintes de non négativité: $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

En résumé, on obtient le modèle linéaire suivant:

$$(P) : \begin{cases} Max\ z = 1000x_1 + 1400x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ 10x_1 + 16x_2 \leq 640 \\ x_1 \leq 25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

LOGO ISI

Un vecteur

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$$

est dit solution réalisable ou admissible s'il vérifie l'ensemble des contraintes.

L'ensemble des solutions réalisables est appelé domaine réalisable (c'est un polyèdre convexe).

Lorsque celui ci est vide, on dit que le problème n'admet pas de solution.

LOGO ISI

Résolution graphique

- Lorsqu'il n'y a que **deux variables de décision**, un problème linéaire peut être résolu de manière purement graphique. Cette résolution graphique permet de mettre en évidence certaines propriétés que possède n'importe quel problème de programmation linéaire.

  $\rightarrow$ A chaque couple de variables x_1 et x_2, on associe un point du plan dont les coordonnées correspondent aux valeurs des variables.

  $\rightarrow$ Les variables étant positives, ces points sont situés dans l'orthant positif (le quart Nord-Est du plan) ou

$$\mathbb{R}^+ = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \right\}$$

- La résolution graphique ne concerne que des problèmes avec 2 variables alors que les problèmes réels peuvent en avoir plusieurs milliers, voire centaine de milliers.

LOGO ISI

Lorsque le nombre de variables est au plus égal à deux, on peut envisager une résolution graphique du problème. Cette technique nous permettra de comprendre la méthode générale du simplexe.

Chaque contrainte est représentée par un demi plan.

Nous déterminons le domaine réalisable en vérifiant le sens des inégalités de chacune des contraintes. Ce domaine est un ensemble convexe.

Considérons le modèle de production donné de l'exemple.

$$(P) : \begin{cases} Max\ z = 1000x_1 + 1400x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ 10x_1 + 16x_2 \leq 640 \\ x_1 \leq 25 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

LOGO ISI

Démarche

- **Représentation des contraintes.** Représenter toutes les contraintes.
- **Domaine réalisable.** La région délimitée par des segments représente la frontière entre le domaine admissible et non admissible.
- **Solution optimale.** $x_1^* = 16$ et $x_2^* = 30$. La valeur optimale est $z^* = 5800$ F CFA.

LOGO ISI

Implémentation pratiques

1. Résolution avec logiciels et bibliothèques
   - Solveurs (Excel, LpSolve, CPLEX, Gurobi, GLPK, etc.)
   - Outils de programmation scientifique (Python: PuLP, Numpy, SciPy, Matplotlib)
   - Interfaces avec Java/C++
2. Mini-projets pratiques
   - Optimisation de la planification d'un sprint agile
   - Gestion des dépendances d'un projet logiciel
   - Affectation des ressources informatiques dans un cloud

LOGO ISI

Méthodologie et Évaluation

Méthodes pédagogiques

1. Cours magistraux avec exemples concrets
2. TD axés sur la modélisation et la résolution manuelle
3. TP informatiques avec implémentation de modèles RO
4. Études de cas et mini-projets

Modalités d'évaluation

1. Contrôle continu : exercices, mini-projets (20 %)
2. TP/Projet logiciel (20 %)
3. Examen final écrit ou pratique (60 %)

La RO en Génie Logiciel offre ainsi une approche scientifique et rigoureuse pour améliorer la qualité, la performance et l'efficacité des projets informatiques.

Références bibliographiques

1. Christelle GUERET, Christian PRINS, Marc SEVAUX, Programmation linéaire, Eyrolles, Paris, 2000.
2. SIMMONARD Michel, La programmation linéaire, Dunod 1972.
3. R. Favre, B. Lemaire, C. Picouleau, Précis de recherche opérationnelle, 5ème éd., Dunod, 2000.
4. Jacquet-Lagrèze, E., Programmation Linéaire - Modélisation et mise en oeuvre informatique, Economica, 1998.
5. Faure R., Lemaire B., Picouleau C, Précis de Recherche Opérationnelle, Dunod, 2009, 6e édi-tion.
6. Vallin Ph., Vanderpooten D., Aide à la Décision - Une approche par les cas, Ellipses, 2002, 2 e édition.
7. LPSolve (http ://groups.yahoo.com/group/lp solve/) : autre solveur de programmation linéaire.
8. SCILAB(http ://www.scilab.org/) : L'environnement de calcul scientifique open-source de référence.