Syllabus

Chapitre 1: Introduction à la théorie des graphes

1.1) Introduction et notion de base

1.1.1) L'utilisat° des graphes

1.1.2) Qu'est-ce qu'un graphe?

1.1.3) A quoi sert un graphe ?

1.2) Un graphe non-orienté

1.3) Un graphe orienté

1.4) Graphe complet - sous graphe

1.5) Chaines et cycles

1.6) Convexité

1.7) Matrice d'adjacente

1.8) TD et T.P

Chapitre 2: Algorithmes et Applications

2.1) Algorithme Dijkstra : recherche du plus court chemin

2.2) Problème d'ordonnancement

2.3) Problème d'affectation

Chapitre 1 : Introduction à la théorie des graphes

I - Introduct° et notion de base

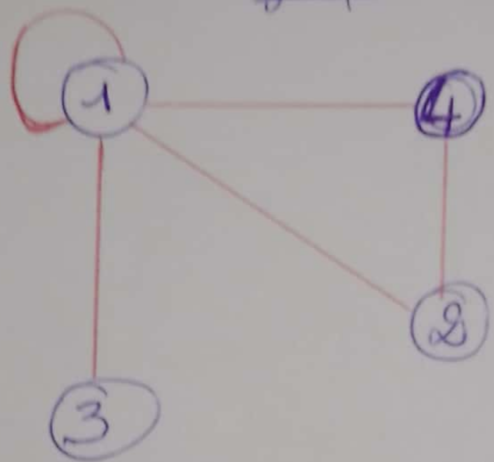
On va commencer le cours sur la T.G avec définit° de base.

La théorie des graphes est un domaine mathématique qui ouvre un grand champ de modélisat° conduisant à des solut° efficaces pour de nbreux problèmes.

Un graphe est un ensemble de sommets

Exemple

graphe 1



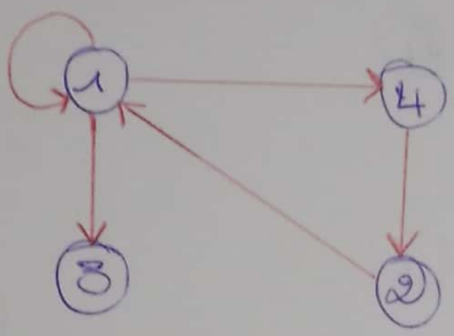
Les sommets 1, 2, 3, 4 sont reliés par les arêtes.

- Les sommets 1 et 4 sont adjacents car ils sont reliés par une arête. Par contre 2 et 3 ne sont pas adjacents.
- On peut avoir des arêtes qui vont d'un sommet à un autre par exemple 1 et 2 mais aussi on peut avoir une arête qui part d'un sommet et qui revient sur le même sommet 1 : c'est une boucle

Le graphe 1 est une collect de sommets ① ② ③ et ④ avec plus un certain nbre d'arêtes entre certains sommets. Le graphe est non-orienté par ce que les arêtes n'ont pas d'orientation. Par exemple, on peut aller de ① à ② ou bien de ② à ① ~~mais on ne peut~~. Par si on rajoute une orientation sur les arêtes par exemple on peut aller de ② à ① mais on ne peut pas aller directement de ① à ② (voir graphe 2) on parle de graphe orienté

Exemple

graphe 2



I - 1. Utilisation des graphes

Le graphe est un objet mathématique simple et puissant qui permet de modéliser et de résoudre de nbreux problèmes réels. Les champs d'application sont vastes:

- informatique : pour representer des reseaux, un système de gest° de fichiers, des diagrammes etc.
- transport : pour representer un réseau de ligne des bus, les liaisons aériennes, etc.

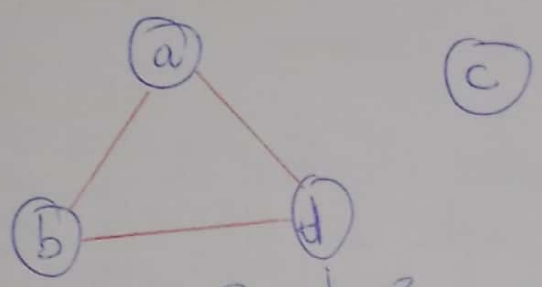
- mathématiques, probas et stats : en RO (optimisation) en processus stochastique avec les chaînes de Markov
- le plan schématisé de rues
- un arbre généalogique
- etc.

NB : Dans la suite, on se limitera aux graphes finis, c'est-à-dire qui ont un nbre fini de sommets

* un graphe non-orienté

Soit G un graphe $G = (S, A)$ où S : ensemble des sommets et A : ensemble des arêtes

Exple 1 :



graphe 3

1) Identifier le type de graphe
2) Déterminer les deux sous-ensembles S et A

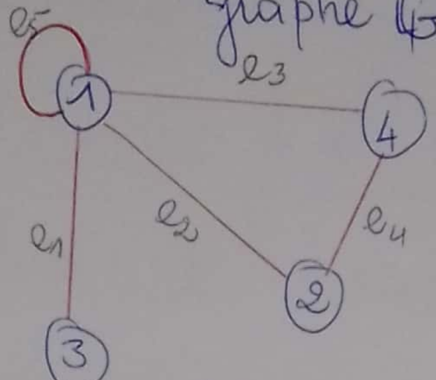
Solution

1) graphe 3 est un graphe non-orienté

2) $S = \{a; b; c, d\}$ $A = \{\{a, b\}; \{b; d\}; \{a; d\}\}$

Exple 2: Considérons le graphe suivant

graphe G4



1) Le graphe G4 est ~~simple~~ non orienté

2) ordre d'un graphe: c'est le nombre de sommets. C'est-à-dire le cardinal de G

ordre de $G4 = 4 = card(S)$

3) $S = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ l'ensemble des sommets

$A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

4) degré d'un graphe: c'est une notion pour un sommet donné par exemple le sommet 2. Par définit° le degré c'est le nbre d'arêtes dont le sommet en question est l'extrémité

sommets	1	2	3	4
degré	5	2	1	2

NB: les boucles comptent double

5) la taille d'un graphe: le nbre d'arêtes est appelé la taille d'un graphe. (taille de $G4 = |A| = 5$)

6) Les sommets ② et ③ ne sont pas adjacents. De même ③ et ④

7) ① et ④, ① et ②, ① et ③ sont adjacents

Définition : Un G-N-O simple est la donneé d'un ensemble fini, non vide, de points appelé sommets et d'un ensemble de liens entre deux sommets, appelés arêtes, deux sommets étant reliés par au ~~plus~~ moins une arête.

Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents .

* Graphe complet ~~complet~~

- Non orienté
  - chaque couple de sommets est relié par une arête.
  - pas de boucle
- Orienté
  - tous les sommets soient adjacents
  - pas de boucle

Un GC est un graphe tel qu'il existe tjrs une arête entre deux sommets quelconques. ~~Les~~

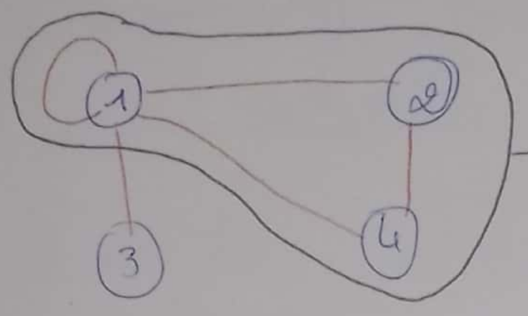
Le graphe G4 n'est pas complet car ② et ③ ne sont pas adjacents et contient une boucle

* Sous graphes

Un SG est un sous-ensemble de sommets. Si on prend un certain sommet du graphe ainsi que toutes les arêtes qui les relient entre eux-même

Exple

~~graphe G4~~



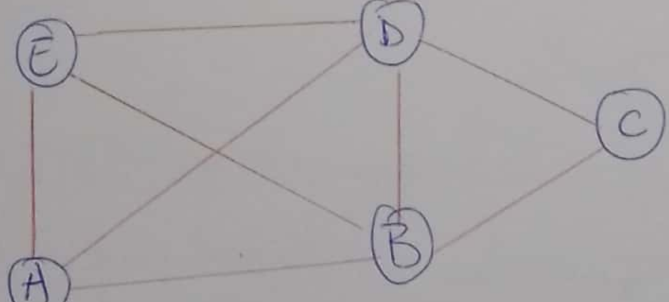
Graphe G5

graphe G4

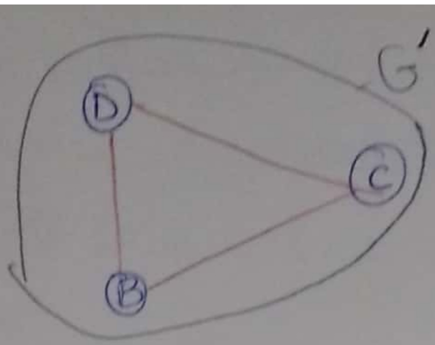
G5 est un SG de G4

Un SG d'un graphe G est un graphe G' composé de certains sommets de G ainsi que de toutes les arêtes qui le relient.

Exemple: On considère le graphe suivant

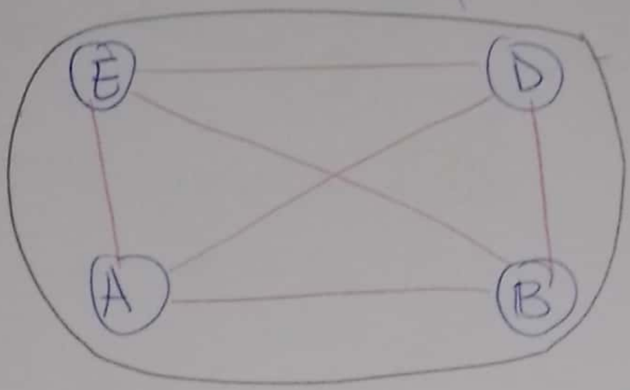


graphe G



G' est un SG de G

BDC est un SG complet de G d'ordre 3



G'' est un SG de G

ABDE est un SG complet de G d'ordre 4

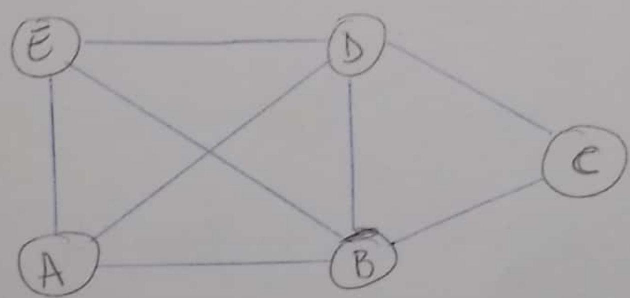
Cycles - Chaine

a - Chaines

Une chaine est une liste ordonnée de sommets tels que sommet de la liste est adjacent au svt.

- Longueur d'une chaine est le nbre d'arêtes qui la composent.

Exemple



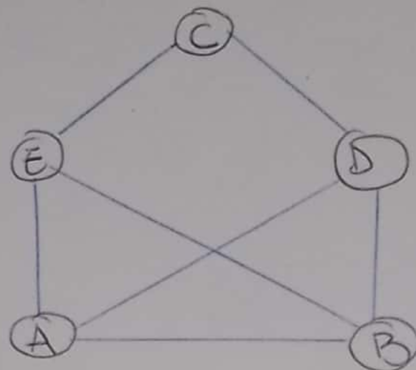
A—B—D—C—D—E—A : longueur égale 6

A — E — D — B — A — D : longueur égale à 5

A — E — C — D — E : n'est pas une chaine

- une chaine est fermée lorsque l'origine et l'extrémité sont confondues

Exemple

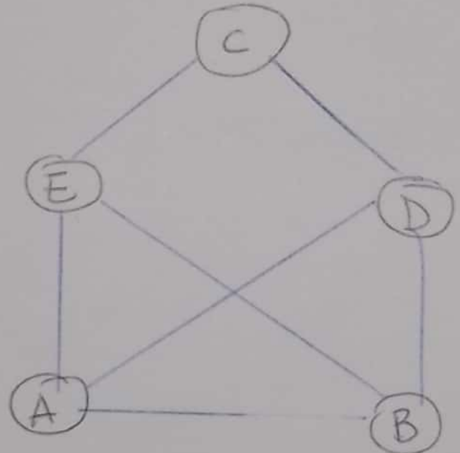


C — E — B — D — C : chaine de longueur = 4 : fermée

b - Cycles

Un cycle est une chaine fermée dont toutes les arêtes sont distintes

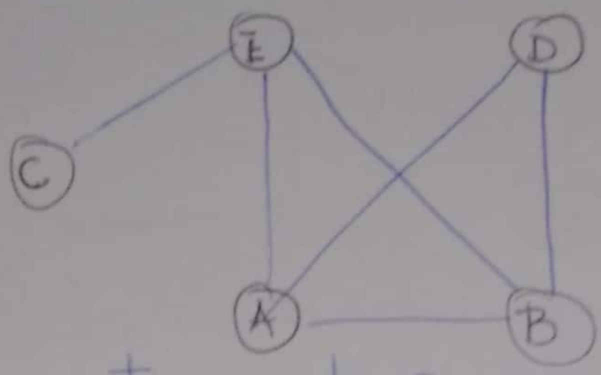
Exemple



E — C — D — A — E : chaine de longueur 4, c'est une chaine fermée et c'est un cycle

- la distance entre 2 sommets est la plus courte longueur des chaines qui les relient

Exemple:



Distance entre D et C :

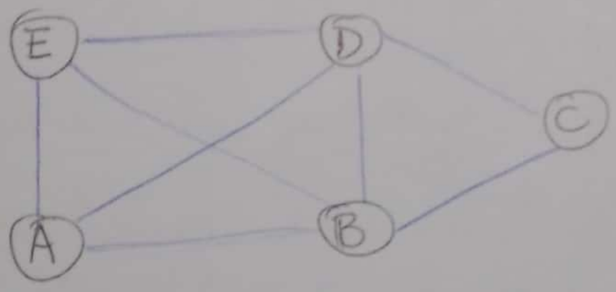
D — A — E — C
D — B — E — C
} chaines de longueur 3

- le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre 2 sommets du graphe

- Un graphe est connexe s'il existe toujours une chaine entre 2 sommets distincts

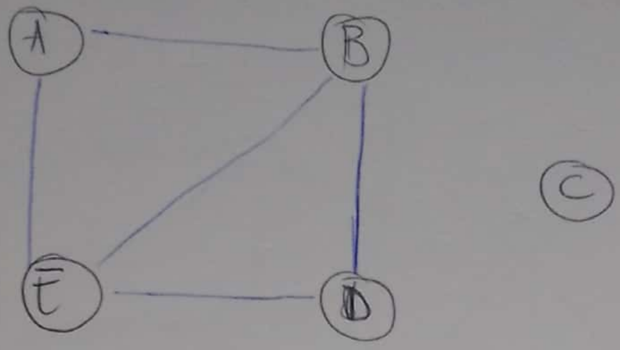
Exemples:

On considère le graphe G1 suivant



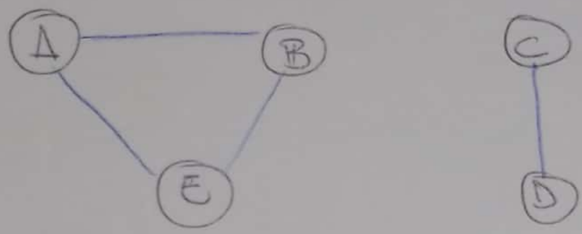
Le graphe G1 est connexe

graphe G2



Le graphe G2 n'est pas connexe car il contient un sommet isolé C

graphe G3

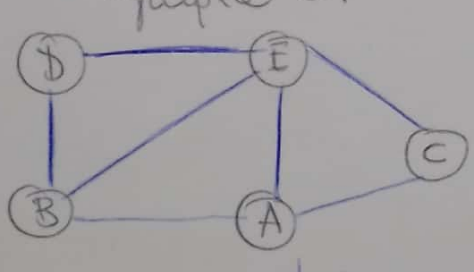


G3 n'est pas connexe car A et D ne sont pas reliés par une chaine.

- chaîne eulerienne est une chaine qui contient une ~~fois~~ fois et une seule fois chaque arête du graphe. (à Revoir)

Exemple.

graphe G1

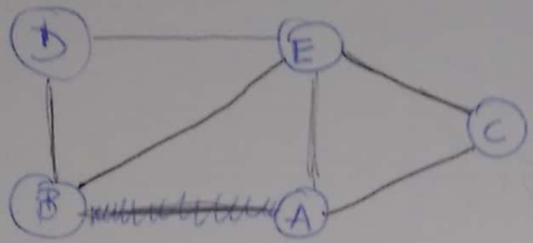


une chaine qui parcourt toutes les arêtes d'un graphe connexe une et une seule fois.

A - B - D - E - C - A - E - B : chaine eulerienne

- cycle eulerien : est une chaine eulerienne fermée

Exemple :

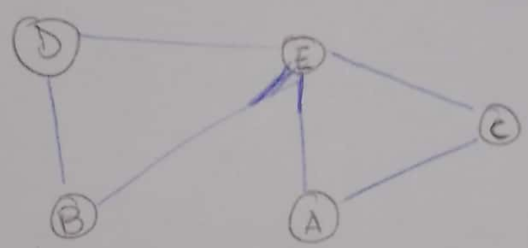


D — B — E — A — C — E — D : cycle eulerien

A — C — E — B — D — E — A : cycle eulerien

- un graphe connexe G admet un cycle eulerien ssi tous ses sommets sont de degré pair

Exemple le graphe G ci contre est connexe et tous ses sommets sont de degré pair



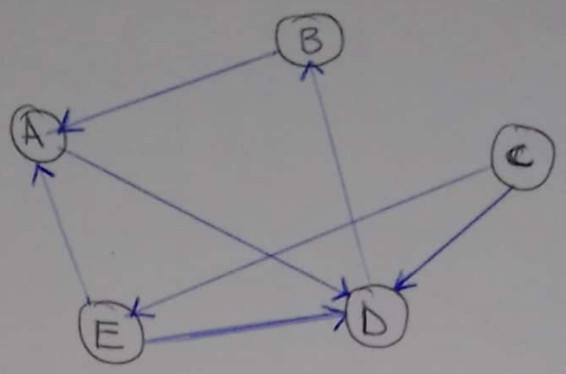
Sommets	A	B	C	D	E
degré	2	2	2	2	4

G est un graphe connexe

Représentation par un tableau

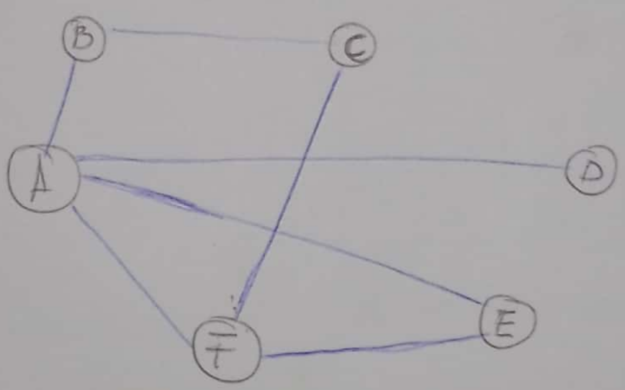
Les croix designant les arêtes (ou arc) entre les sommets. Elles peuvent être remplacées par des valeurs designant les longueurs des arêtes

Exemple 1 :



Arrivée / Départ	A	B	C	D	E
A				X	
B	X				
C				X	X
D		X			
E	X			X	

Exemple 2 :



Départ \ arr	A	B	C	D	E	F
A		X		X	X	X
B	X		X			
C		X				X
D	X					
E	X					X
F	X		X		X	

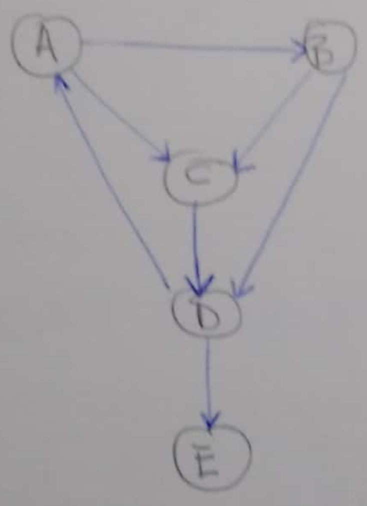
Representation matricielle (ou matrices adjacences)

On peut representer un graphe simple par une matrice d'adjacence, c'est une matrice carrée dont les termes designent la présence d'un arc (flèche) entre 2 sommets donnés, un "1" à la position (i, j) signifie que le sommet i est adjacent au sommet j

illustrat°

	i	j
i	0	1
j	0	0

Exemple 1: On considere le graphe suivant



graphe G1

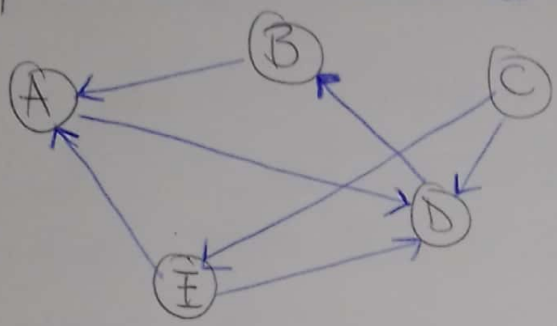
Tableau

Départ \ Arrivé	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	0	0	1	1	0
C	0	0	0	1	0
D	1	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0

Matrice d'adjacence

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2: On considere le graphe soit



Tableau

Départ \ Arrivé	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	0
B	1	0	0	0	0
C	0	0	0	1	1
D	0	1	0	0	0
E	1	0	0	1	0

Matrice d'adjacence

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

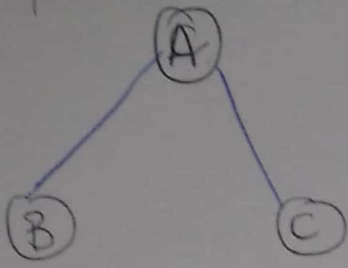
Theoreme 1:

Rappel: graphe simple

On appelle G.S, un graphe qui n'a pas de boucle et qui a au plus une arête entre 2 sommets

Dans un G S N.O, la somme des degrés de tous les sommets est egale au double du nbre d'arêtes.

Exemple :



$deg(A) = 2 \quad deg(B) = 1 \quad deg(C) = 1$

$deg(A) + deg(B) + deg(C) = 2+1+1 = 4$

Somme des degrés $= 4$

Nbre d'arêtes $\times 2 = 2 \times 2 = 4$

Somme des degrés = Nbre d'arêtes $\times$ 2

Exple :

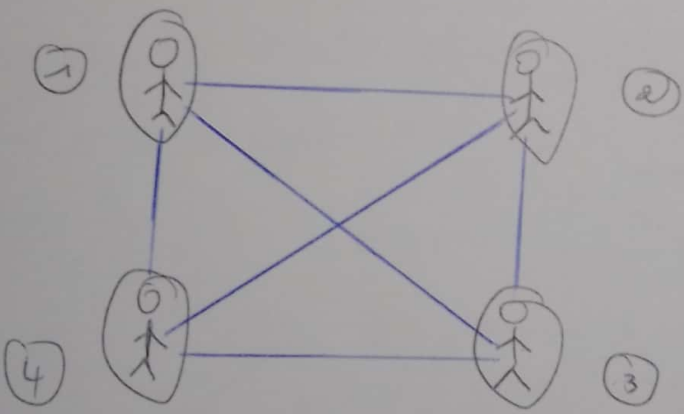
5 joueurs doivent rencontrer chacun 3 autres joueurs, est-ce possible ?

Si c'est possible, chaque sommet est de degré 3. La somme des degrés $= 5 \times 3 = 15$.

15 est un nbre empair donc ce n'est pas possible.

Par contre c'est possible avec 4 joueurs. Somme des degrés $= 4 \times 3 = 12$. Nbre d'arêtes $\times 2 = 6 \times 2 = 12$

Somme des degrés = Nbre d'arêtes $\times$ 2



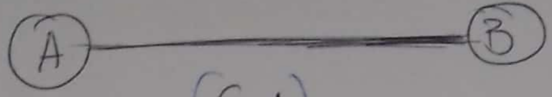
~~Définition~~

Théorème 2 :

Dans un graphe d'ordre n, les degrés de chaque sommet vaut $n-1$ et le nbre d'arêtes $\frac{n(n-1)}{2}$.

Exples

1) Considérons le graphe suit



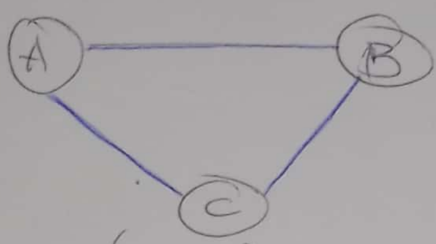
$n=2$

(G1)

le degré de chaque sommet est : $n-1 = 2-1 = 1$

le nbre d'arêtes vaut $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2(2-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

2) Considérons le graphe suit



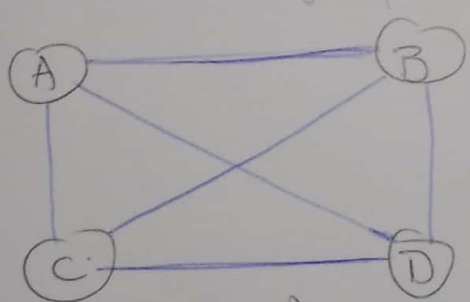
$n=3$

(G2)

le degré de chaque sommet vaut : $n-1 = 3-1 = 2$

le nbre d'arêtes vaut : $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = \frac{3\times 2}{2} = 3$

3) On considère le graphe suit !



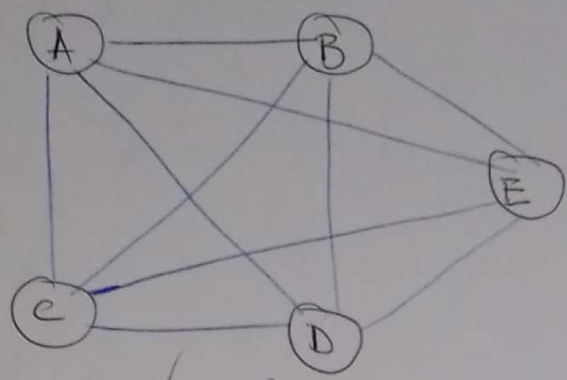
$n=4$

(G3)

le degré de chaque sommet $= 4-1 = 3$

le nbre d'arêtes $= \frac{4(4-1)}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$

4) On considère le graphe suit



$n = 5$

(G4)

Le degré de chaque sommet $= 5 - 1 = 4$

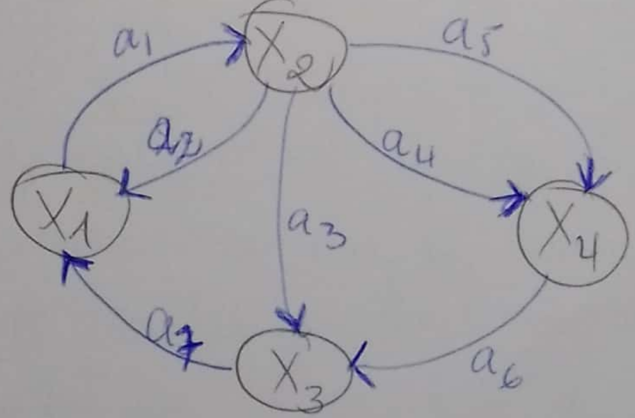
Le nbre d'arêtes $= \frac{5(5-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

Compléments

a) Matrices associées

La matrice associée du graphe G est une matrice carré d'ordre n (nbre de sommets $= n$), où chaque ligne et chaque colonne correspond à un sommet du graphe les élts de la matrice associée indique le nbre d'arc orienté dans le m̂ sens reliant deux sommets

Exple



(G)

Scanné avec CamScanner

G est un graphe orienté : $G(S;A)$ où $S = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$: ensemble des sommets, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ ensemble des arêtes.

- La matrice d'adjacences de G est la suite :

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	1	0	0
X_2	1	0	1	1
X_3	1	0	0	0
X_4	0	0	1	0

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice associée de G est la suite

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	1	0	0
X_2	1	0	1	2
X_3	1	0	0	0
X_4	0	0	1	0

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Matrice d'incidence aux arcs (arêtes)

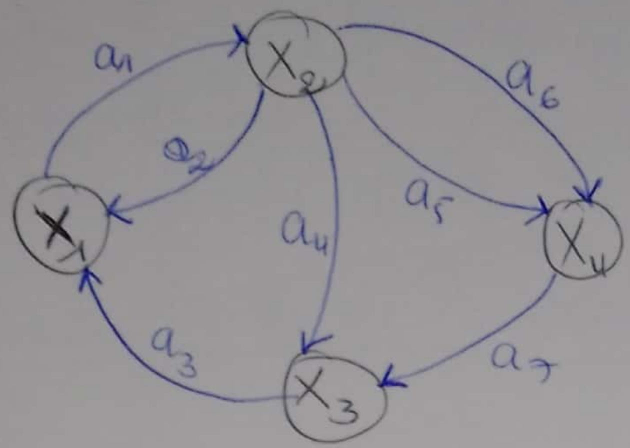
La matrice d'incidence aux arcs d'un graphe $G = (S;A)$ est une matrice n lignes et m colonnes, ses elts prennent les valeurs $+1$; 0 et -1. Chaque ligne de la matrice est associée à un sommet et chaque colonne à un arc. Chaque elt de la matrice indique la relation entre un sommet et un arc comme suit :

$+1$: signifie que le sommet est une extrémité initiale de l'arc

-1 : " " " " " " terminale de l'arc

0 : pas de relation entre le sommet et l'arc.

Exple : Considerons le graphe svt :



$G = (S ; A)$ où $S = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4\}$ et $A = \{a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; a_6 ; a_7\}$

arêtes / sommets	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
X_1	1	-1	-1	0	0	0	0
X_2	-1	1	0	1	1	1	0
X_3	0	0	1	-1	0	0	-1
X_4	0	0	0	0	-1	-1	1

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

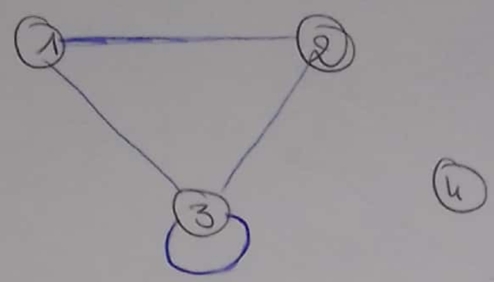
Remarque : Cette matrice ne convient pas pour les graphes avec boucle.

Notation : Les elts de la matrice d'incidence aux arcs sont définis svts

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ est l'extremité initiale de } a_j \\ -1 & \text{si } x_i \text{ est " terminale de l'arc } a_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ⓒ Voisin d'un sommet

On considère le graphe suivant :



sommets	1	2	3	4
degré	2	2	4	0

L'ensemble des voisins de sommet A est noté $\Gamma(A)$ (gamma de A)

$\Gamma(1) = \{1 ; 2\}$ $\Gamma(2) = \{1 ; 3\}$ $\Gamma(3) = \{1 ; 2 ; 3\}$ $\Gamma(4) = \emptyset$

Rappel : Degré sortant - Degré entrant

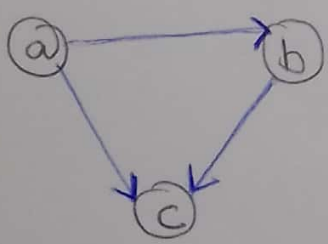
① Le nbre d'arcs sortants d'un sommet S est appelé degré sortant de S. Not: $d^+(S)$

L'ensemble des prédécesseurs de S sera noté $\Gamma^-(S)$

② Le nbre d'arcs entrants d'un sommet S est appelé degré entrant de S. Not. $d^-(S)$.

L'ensemble des successeurs de S sera noté $\Gamma^+(S)$

Exple : Considérons le graphe suivant



- Le degré sortant de chaque sommet

$d^+(a) = 2$ $d^+(b) = 1$ $d^+(c) = 0$

- Le degré entrant de chaque sommet.

$d^-(a) = 0$ $d^-(b) = 1$ $d^-(c) = 2$

- Les prédécesseurs de chaque sommet

$\Gamma^-(a) = \emptyset$ $\Gamma^-(b) = \{a\}$ $\Gamma^-(c) = \{a;b\}$

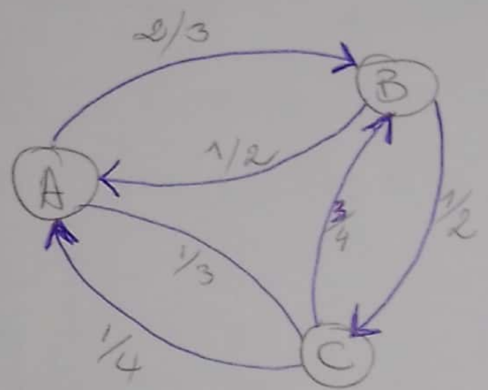
- Les successeurs de chaque sommet

$\Gamma^+(a) = \{b;c\}$ $\Gamma^+(b) = \{c\}$ $\Gamma^+(c) = \phi$

Partie 2: Chaine de Markrov

Definition

Dans une equipe de football, on étudie les passes que se font 3 attaquants A, B et C. Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont schématisees sur le graphe orienté et pondéré. Chaque passe de ballon correspond à une nouvelle experience aléatoire dont les issus sont A, B ou C (un des trois attaquants est susceptible de recevoir le ballon).



Par exemple, la probabilité qu'un attaquant A passe le ballon à un attaquant B est égale à 2/3.
Les poids (sommets) des arcs sont alors des probabilités.
Un tel schéma est appelé un graphe probabiliste.

Definition:
Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré possedant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Par exemple, la somme des poids issus de A est : $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$

la somme des poids des arcs issus de B : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$

" " " " de C : $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$

Marche aléatoire

On considère la variable aléatoire X_n prenant les valeurs A, B ou C. A l'etape n, A, B ou C s'appelle les états de X_n.

Par exemple, $X_3 = B$ signifie que l'attaquant B possède le ballon après la troisieme passe

$X_2 = A$: l'attaquant A possède le ballon après la 2^e passe.

La suite de variable aléatoire (X_n) est appelé marche aleatoire ou chaine de Markov sur l'ensemble des issues $\{A; B; C\}$.

Dans une chaine de Markov, l'etat du processus à l'etape n+1 ne depend que celui à l'etape n, mais non à ses etapes anterieurs. Ainsi, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon ne dépend que de la position precedente du ballon (en A ou en B) mais non de ses positions antérieures

Probabilité de transition

On considère la loi de probabilité de X_n, appelé probabilité de transition, qui donne la probabilité que ~~l'~~ attaquant possède le ballon à l'étape n ($n^{ième}$ passe).

On note par exemple ~~$P(X_n) = A(X_{n+1} = C)$~~

$P_{X_n=A}(X_{n+1}=C) = \frac{1}{3}$; $P_{X_n=B}(X_{n+1}=A) = \frac{1}{2}$

$P_{X_n=A}(X_{n+1}=B) = \frac{2}{3}$; $P_{X_n=B}(X_{n+1}=C) = \frac{1}{2}$

$P_{X_n=C}(X_{n+1}=A) = \frac{1}{4}$; $P_{X_n=C}(X_{n+1}=B) = \frac{3}{4}$

$P_{X_n=A}(X_{n+1}=C) = \frac{1}{3}$ la probabilité que le ballon se trouve chez l'attaquant C après $(n+1)^{ème}$ passe sachant que c'est l'attaquant A qui envoie le ballon. Il s'agit d'une probabilité conditionnel. On la note $P(C/A)$.

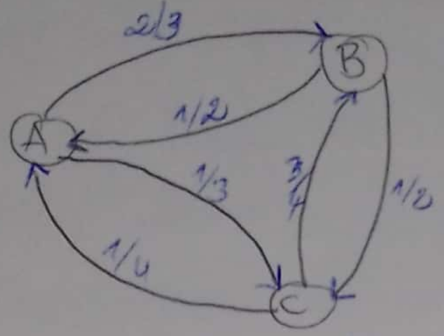
Cette probabilité ne dépend pas de n

Matrice de transition

Définition

La matrice de transition d'une chaine de Markov est la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients P_{ij} situés sur la ligne i et la colonne j est la probabilité de transition portée par l'arc reliant le sommet i vers le sommet j et 0 dans le cas contraire

Exemple : Considérons l'exemple précédent



La matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{transition du sommet A vers les autres sommets} \\ \longrightarrow \text{transition du sommet B vers les autres sommets} \\ \longrightarrow \text{" \quad " \quad C \quad " \quad " \quad "} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{vers A} & \text{vers B} & \text{vers C} \end{array}$$

On trouve par exemple à l'intersect° de la 1ère ligne et de la 2e colonne, la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant B alors qu'il se trouvait chez l'attaquant A.

Remarques :

- Le coef P_{11} de la matrice P est nul car la probabilité que l'attaquant A garde le ballon est nulle. Il en est de même que les coefs P_{22} et P_{33}
- La somme des coefs d'une même ligne d'une matrice de transit° est égal à 1.

Définition
L'état probabiliste après n étapes de la chaîne de Markov est la matrice ligne dont les coefs sont des probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.
Exemple : Dans l'exemple des passeurs au football, la matrice ligne des états après la 3e étape donnerait les probabilités que le ballon se trouve chez l'attaquant A, chez l'attaquant B, l'attaquant C après 3 passes.
L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de transition de l'étape n à l'étape n+1.
On note P_n, Q_n et R_n les probabilités que le ballon se trouve respectivement chez l'att A, chez l'att B et chez l'att C après $n^{ième}$ passe.
A l'aide de la formule des probabilités totales, on cherche P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1} en fonct de P_n, Q_n et R_n

$$\begin{cases} P_{n+1} = \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{4}R_n \\ Q_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{3}{4}R_n \\ R_{n+1} = \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{3}P_n \end{cases}$$

Chapitre 2 : Algorithme de Dijkstra et Ordonnancement de Projet

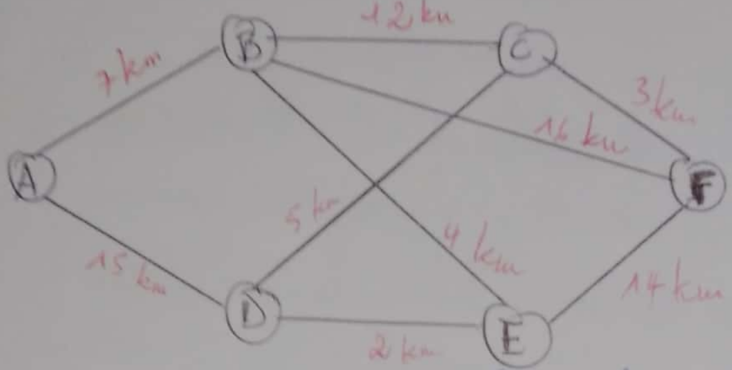
1 - Introduction

La théorie des graphes est un domaine des mathématiques et de l'informatique qui vise à représenter divers problèmes de la vie réelle sous forme de graphe. Une application courante consiste à modéliser un réseau routier reliant ≠tes villes. L'un des principaux enjeux est l'optimisation des distances entre 2 points. Pour résoudre ce problème, on utilise l'algorithme de Dijkstra. Prononcé par approximation « Dextra », l'algorithme de Dijkstra est utilisé pour trouver le chemin le plus court entre 2 sommets d'un graphe, qu'il soit orienté ou non orienté.
Il permet, par exemple, de déterminer le plus court chemin pour se rendre d'une ville à une autre connaissant le réseau routier d'une région. Plus précisément, il calcule des plus courts chemins à partir d'une source vers tous les autres sommets dans un graphe orienté ~~point~~ pondéré par des réels positifs. On peut aussi l'utiliser pour calculer le plus court chemin entre un sommet de départ et un sommet d'arrivée

2- Algorithme de Dijkstra

Edsger Dijkstra est un mathématicien et informaticien néerlandais. C'est l'un des pionners de l'informatique. Il est né en 1930 et decede en 2002.

Définition : l'algorithme de Dijkstra sert à résoudre le problème du plus court chemin entre deux points. Considérons un ensemble de ville.



La distance entre chaque ville est matérialée par des nbres. Par exemple entre A et B il y a 7 km.

Question : chercher le + court chemin de A à F.

Voici comment se déroule l'algorithme.

Nous créons un tableau qui comporte autant de colonnes que de villes et nous ajoutons une colonne pour les calculs intermediaires.

A	B	C	D	E	F	
0A						
0A	7A		15A			0+7 0+15
•	7A	13B		11B	23B	12+7=13 4+7=11 16+7=23
•	•	•	13E	11B	25E	2+11=13 14+11=25
•	•	18D	13E			5+13=18
•	•	18D			21C	3+18=21
•	•				21C	

Démarche pour remplir le tableau

- Nous partons de A et nous inscrivons 0A en dessous de A. Comme c'est la seule valeur possible, nous la considérons comme la meilleure et nous inscrivons en rouge à la ligne suivante et nous validons la colonne par des points.

- Partant de A, nous pouvons aller à B et cela nous coûte 7 km et nous inscrivons 7A. Partant de A, nous pouvons aller à D et cela nous coûte 15 km et nous inscrivons 15A.

Entre 15A et 7A, quel est le meilleur choix possible?

7A est le meilleur choix possible et vous inscrivons à la ligne sote en dessous de 7A en rouge et nous validons la colonne B et nous reviendrons pas

- Partant de B, nous pouvons aller a C et cela nous coûte 12km et on ajoute 7km déjà parcourut (12km + 7km = 19km) et nous inscrivons 19B.

Partant de B, nous pouvons aller à E et cela nous coûte 4km et on ajoute 7km déjà parcourut (4km+7km = 11 km) et nous inscrivons 11B

Ensuite, nous pouvons aller a E et cela nous

Ensuite, nous pouvons aller de B à F et il nous faut 16 km et on ajoute 7km déjà parcourut (16km+7km = 23km) et nous inscrivons 23B.

Entre 19B, 11B et 23B, quel est le meilleur choix possible?

11B est le meilleur choix et nous inscrivons 11B à la ligne sote en dessous de 11B en rouge.

- $E \xrightarrow{2km} D$ et $2km + 11km = 13 km \Rightarrow 13E$

  $E \xrightarrow{14km} F$ et $14 km + 11km = 25 km \Rightarrow 25E$

Entre 13E et 25E, quel est le meilleur choix possible?

13E est le meilleur choix possible et nous inscrivons à la ligne sote en dessous de 13E en rouge. 13E.

- $D \xrightarrow{5km} C$ et $5km + 13km = 18km \Rightarrow 18D$

18D est le meilleur choix et nous inscrivons à la ligne sote en dessous de 18D en rouge 18D

- $C \xrightarrow{3km} F$ et $3km + 18km = 21 km \Rightarrow 21C$

21C est le meilleur choix possible

Nous sommes arrivés à la destinat° et nous avons parcouru un distance totale de 21 km.

Il nous reste à trouver les chemins de A à F. Pour cela, nous remontons à l'aide du tableau. De F, nous remontons à C, de C à D, de D à E, de E à B, de B à A. (F-C-D-E-B-A).

Le trajet le plus optimal pour aller de A à F est donc $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F$, ce qui représente un total de 21 km.

Application : Problème du plus court chemin en théorie des graphes

- Optimiser le trafic urbain
- Navigation des robots
- Traitement de texte (Latex)
- Conception des cartes electroniques
- Appels de fonction dans les algorithmes avancés
- Routage des messages dans les télécoms.

Il y a 2 classes ~~d'al~~ d'algorithme

Classe A1 : Trouver les plus courts chemins entre un sommet source S et les autres sommets du graphe.

* Algorithme de Dijsktra

* Algorithme de Bellman Ford

Classe P2 : Trouver les plus courts chemins entre tous les couples de sommets du graphe :

* Algorithme de Dantzig
* Algorithme de Floyd