МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра систем штучного інтелекту

Звіт до лабораторної роботи №4

з дисципліни *«Теорія інформації»*

Виконав:
ст. гр. КН-211
Головень Ростислав
Викладач:
д.т.н. Косаревич Р. Я.

Львів – 2019 р.

Лабораторна робота №4

СЕРЕДНЯ КІЛЬКІСТЬ ІНФОРМАЦІЇ ТА ІНФОРМАЦІЙНА ПРОПУСКНА ЗДАТНІСТЬ ДИСКРЕТНИХ КАНАЛІВ ЗВ'ЯЗКУ

Варіант 5

Завдання:

1. Задано трійковий стаціонарний канал без пам’яті та без витирання. Ймовірності p(xi, yk) сумісного виникнення символу xi на вході каналу та символу yk – на його виході для різних варіантів наведені у другому стовпці таблиці 1. Знайти середню кількість I(Y,X) інформації, що переноситься одним символом та інформаційну пропускну здатність C каналу.

5	$\begin{bmatrix} 0{,}255 & 0{,}007 & 0{,}048 \\ 0{,}024 & 0{,}085 & 0{,}042 \\ 0{,}021 & 0{,}008 & 0{,}51 \end{bmatrix}$

Таблиця 1

2. Розрахувати пропускну здатність C двійкового стаціонарного симетричного по входу каналу без пам’яті із витиранням. Вихідні дані, а саме, ймовірності:

– правильного прийому двійкового символу q ;

– помилки при його передачі по каналу pП ;

– витирання символу pВ ,

для різних варіантів наведені у таблиці 2.

5	0,83	0,03	0,14

Таблиця 2

Код програми:

```
#___task1___
A = dlmread('file.txt');
N = 3;
f1 = 0;
f2 = 0;
tmp1 = 0;
tmp2 = 0;
tmp3 = 0;
x = A(:,1); # 1 ствб м A з фйл
y = A(:,2); # 1 ствб м A з фйл
x = zeros(1, N); # масив 1xN
y = zeros(1, N); # масив 1xN
A1 = zeros(N); # масив рзмр N


for i = 1 : round (N)
  for j = 1 : round (N)
    y(i) += A(i,j);
    x(i) += A(j,i);
   endfor
   f2 = y(i) * log2(y(i));
   tmp2 += y(i) * log2(y(i)); # p(y) * log2(y) | H(y)
   disp(f2)
endfor
disp("___________")
for i = 1 : round(N)
  for j = 1 : round(N)
    A1(i,j) = A(j,i) / x(i); # p(xi, yk)
    f1 = A(i,j) * log2 (A1(i,j));
    tmp1 += A(i,j) * log2 (A1(i,j)); # p(xi,yk) * log2p(yk/xi) | H(y,x)
    disp(f1)
  endfor
  tmp3 += A1(1,i) * log2 (A1(1,i)); # p(xi,yk) * log2p(xi,yk)  | C
endfor

Hy = -tmp2; # H(y) = - sum(p(x,y) * log2(y))
Hyx = - tmp1; # H(y,x) = - sum sum p(xi,yk) * log2p(yk/xi)
I = Hy - Hyx; # I = H(y) - H(y;x)
C = log2(N) + tmp3; # C = maxI(x;y)

disp("H(y) for task 1: "), disp(Hy); # ентропія
disp("H(y|x) for task 1: "), disp(Hyx); # середня/повна умовна ентропія
disp("I(y,x) for task 1: "), disp(I); # середня к-сть інформації
disp("C for task 1: "), disp(C); # пропускна здатність
disp("__________________________");



#___task 2___
q = 0.83; # правильний прийом двійкового каналу
qP = 0.03; # помилка при його передачі по каналу
pV = 0.14; # витирання символу
tmp3 = q * log2(q) + qP * log2(qP) + pV * log2(pV);
C1 = log2(2) + tmp3;
disp("C for task 2: "), disp(C1); # пропускна здатність
```

Розрахункові формули:

- Сумісна ентропія

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} p(x_i, y_k) \cdot log_2 p(x_i, y_k)$$

- Середня або умовна ентропія:

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^{M} p(x_i) \cdot H(Y/x_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} p(x_i) \cdot p(y_k/x_i) \cdot log_2 p(y_k/x_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} p(x_i, y_k) \cdot log_2 p(y_k/x_i) \ ,$$

- Середня к-сть інформації:

$$I(X;Y) = \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{i=0}^{Q-1} P(x_j)P(y_i|x_j)\log\left[P(y_i|x_j)/P(y_i)\right]$$

де $P(y_i) \equiv P(Y = y_i) = \sum_{k=0}^{q-1} P(x_k)P(y_i|x_k)$

- Пропускна здатність каналу:

$$C = \max_{P(x_j)} I(X;Y) = \max_{P(x_j)} \sum_{j=0}^{q-1}\sum_{i=0}^{Q-1} P(x_j)P(y_i|x_j)\log\left[P(y_i|x_j)/P(y_i)\right]$$

- Пропускна здатність симетричного каналу:

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \log_2 N - H(\text{рядок матриці переходу})$$

Завдання 1:

Знайдемо безумовні ймовірності $\mathrm{p}(x_i)$ *та* $\mathrm{p}(y_i)$:

$\mathrm{p}(x_1) = 0.31$; $\mathrm{p}(x_2) = 0.151$; $\mathrm{p}(x_3) = 0.539$;

$\mathrm{p}(y_1) = 0.3$; $\mathrm{p}(y_2) = 0.1$; $\mathrm{p}(y_3) = 0.6$;

Перевіримо умови нормування:

$\mathrm{p}(x_1) + \mathrm{p}(x_2) + \mathrm{p}(x_3) = 1$;

$\mathrm{p}(y_1) + \mathrm{p}(y_2) + \mathrm{p}(y_3) = 1$;

Знайдемо ентропію розподілу безумовних ймовірностей H(X):

$\mathrm{H(X)} = -(0.31 * \log_2 0.31 + 0.151 * \log_2 0.151 + 0.539 * \log_2 0.539) = 1.4162$

Побудуємо матрицю умовних ймовірностей за формулою $\mathrm{p}\left(\mathrm{x_i}/\mathrm{y_j}\right) = \mathrm{p}(\mathrm{x_i}; \mathrm{y_j})/\mathrm{p}(\mathrm{y_i})$:

$$\begin{pmatrix} 0.85 & 0.07 & 0.08 \\ 0.8 & 0.85 & 0.07 \\ 0.07 & 0.08 & 0.85 \end{pmatrix}$$

Тоді знайдемо загальну умовну ентропію H(X/Y):

$\mathrm{H(X/Y)} = 0.76129$

Тепер можемо знайти середню к-сть інформації за формулою I(X;Y) = H(X) - H(X/Y):

$\mathrm{I(X; Y)} = 1.4162 - 0.76129 = 0.65494$

Знайдемо пропускну здатність C *каналу за формулою* $\mathrm{C} = \max\limits_{p(x)} I(X;Y)$

$\mathrm{C} = \max\limits_{p(x)} I(X;Y) = \log_2 N - H(0.85;\ 0.07;\ 0.08)$

$\mathrm{C} = \log_2 3 - (-(0.85 * \log_2 0.85 + 0.07 * \log_2 0.07 + 0.08 * \log_2 0.08)) = 0.82560$

Завдання 2:

Розраховуємо пропускну здатність C *двійкового стаціонарного симетричного по входу каналу без пам'яті із витиранням за формулою:*

$\mathrm{C} = \max\limits_{p(x)} I(X;Y) = \log_2 N - H(\text{рядок матриці переходу})$

Матриця:

$$\begin{pmatrix} 0{,}83 & 0{,}03 & 0{,}14 \\ 0{,}03 & 0{,}83 & 0{,}14 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{C} = \log_2 2 - H(0.83;\ 0.03;\ 0.14) =$
$= \log_2 2 - (-(0.83 * \log_2 0.83 + 0.03 * \log_2 0.03 + 0.14 * \log_2 0.14)) = 0.22801$

Результати:

```
H(x) for task 1:
 1.4162
H(x|y) for task 1:
 0.76129
I(x,y) for task 1:
 0.65494
C for task 1:
 0.82560
_______________________________
C for task 2:
 0.22801
```

Висновок: на даній лабораторній роботі я дослідив пропускну здатність каналу зв'язку. Програмно реалізував розрахунок середньої кількості інформації та пропускної здатності каналу.

Визначивши середню кількість інформації і пропускну здатність каналів підтвердилися властивості, що $C \geq 0$, оскільки $I(X;Y) \geq 0$ та $C \leq \log|X|$ оскільки $C = \max I(X;Y) \leq \max H(X) = \log|X|$ і $C \leq \log|Y|$ з тієї ж причини, а з останньої властивості слідує, що максимум можна знайти і він скінченний.

Інформаційні втрати в каналі зв'язку визначаються умовною ентропією H(X/Y) одного джерела щодо іншого. Підтвердилась теорема, що для симетричного каналу, коли в каналі наявні завади, умовна ентропія на його вході і виході H(X/Y) знаходиться в діапазоні 0 ≤ H(X/Y) ≤ H(X). Тоді пропускна здатність каналу визначається за формулою $C = \max\limits_{p(x)} I(X;Y) = \log_2 k - H(X/Y)$. При зменшенні рівня завад пропускна здатність каналу C прямує до максимального значення, а при збільшенні рівня завад – до нуля.