Problem Sets

Number Theory (เลือกทำระหว่างข้อคู่หรือข้อคี่)

1. จงแสดงวิธีทำและหาค่าดังต่อไปนี้
    a. (177 **mod** 31 + 270 **mod** 31) **mod** 31
    b. (177 **mod** 31 * 270 **mod** 31) **mod** 31
    c. (–133 **mod** 23 + 261 **mod** 23) **mod** 23
    d. (893 **mod** 79)^4 **mod** 26

Solution:

a. 13
b. 19
c. 13
d. 16

2. จงอ่านค่านาฬิกาแบบ 12 ชั่วโมง เมื่อเวลาผ่านไป 100 ชั่วโมงหลังจากเวลา 6:00

Solution:

10:00 เพราะ (6 + 100) **mod** 12 = 10

3. จงอ่านค่านาฬิกาแบบ 24 ชั่วโมง เมื่อเวลาผ่านไป 168 ชั่วโมงหลังจากเวลา 19:00

Solution: 19:00 เพราะ (19 + 168) **mod** 24 = 19

4. จงหาเลขจำนวนเต็มมา 5 จำนวนที่ congruent กับ 4 modulo 12

Solution: 16, 28, 40, 52, 64

5. จงหาเลขจำนวนเต็มทุกจำนวนระหว่าง −100 และ 100 ที่ congruent กับ −1 modulo 25

Solution:

เริ่มต้นที่ −1 แล้ว บวกหรือลบ 25 ไปเรื่อยๆจะได้ −1, −26, −51, −76, 24, 49, 74, 99

6. จงแปลงเลขฐาน 2 ของ $(1\ 0101\ 0101)_2$ เป็นฐาน 10

Solution: 341

7. จงแปลงเลขฐาน 16 ของ $(ABBA)_{16}$ เป็นฐาน 2

Solution:

$(1010\ 1011\ 1100\ 1101\ 1110\ 1111)_2$

8. จงบรรยายวิธีการแปลงเลขฐาน 8 เป็นเลขฐาน 16

Solution:

เริ่มจากแปลงเลขฐาน 8 เป็นเลขฐาน 2 จากนั้นแปลงเลขฐาน 2 ที่ได้มาเป็นเลขฐาน 16

9. จงแสดงวิธีทำโดยการใช้ Modular exponentiation ในการหาค่า 7^{129} **mod** 99

Solution:

7^{129} **mod** 99 $= (7 * 7^{128})$ **mod** 99

$= (7 * (7^{2})^{64})$ **mod** 99

$= (7 * (49)^{64})$ **mod** 99

$= (7 * (49^{2})^{32})$ **mod** 99

$= (7 * (2401$ **mod** $99)^{32})$ **mod** 99

$= (7 * (25^{32}))$ **mod** 99

$= (7 * (25^{2})^{16})$ **mod** 99

$= (7 * (625$ **mod** $99)^{16})$ **mod** 99

$= (7 * 31^{16})$ **mod** 99

$= (7 * (31^{2})^{8})$ **mod** 99

$= (7 * (961$ **mod** $99)^{8})$ **mod** 99

$= (7 * 70^{8})$ **mod** 99

$= (7 * (70^{2}$ **mod** $99)^{4})$ **mod** 99

$= (7 * (4900$ **mod** $99)^{4})$ **mod** 99

$= (7 * 49^{4})$ **mod** 99

$= (7 * (49^{2}$ **mod** $99)^{2}$ **mod** 99

$= (7 * (2401$ **mod** $99)^{2})$ **mod** 99

$= (7 * 25^{2})$ **mod** 99

$= 19$

10. จงแสดงวิธีทำโดยการใช้ Fast Modular exponentiation ในการหาค่า 71^{767} **mod** 3120

Solution:

$b^n = 71^{767}$, $n = (10\ 1111\ 1111)_2$

$71^{767} = 71^{512} * 71^{128} * 71^{64} * 71^{32} * 71^{16} * 71^{8} * 71^{4} * 71^{2} * 71$

71^2 **mod** 3120 = 5041 **mod** 3120 = $\underline{1921}$

71^4 **mod** 3120 = $(71^2)^2$ **mod** 3120 = 1921^2 **mod** 3120 = $\underline{2401}$

71^8 **mod** 3120 = $(71^4)^2$ **mod** 3120 = 2401^2 **mod** 3120 = $\underline{2161}$

71^{16} **mod** 3120 = $(71^8)^2$ **mod** 3120 = 2161^2 **mod** 3120 = $\underline{2401}$

71^{32} **mod** 3120 = $(71^{16})^2$ **mod** 3120 = 2401^2 **mod** 3120 = $\underline{2161}$

71^{64} **mod** 3120 = $(71^{32})^2$ **mod** 3120 = 2161^2 **mod** 3120 = $\underline{2401}$

71^{128} **mod** 3120 = $(71^{64})^2$ **mod** 3120 = 2401^2 **mod** 3120 = $\underline{2161}$

71^{256} **mod** 3120 = $(71^{128})^2$ **mod** 3120 = 2161^2 **mod** 3120 = 2401

71^{512} **mod** 3120 = $(71^{256})^2$ **mod** 3120 = 2401^2 **mod** 3120 = $\underline{2161}$

71^{767} **mod** 3120 = 2161 * 2161 * 2401 * 2161 * 2401 * 2161 * 2401 * 1921 * 71 **mod** 3120

= 791

11. จงแสดงให้เห็นว่าเลข 251 เป็นจำนวนเฉพาะโดยใช้วิธี Trial division

Solution:

วิธีของ Trial division คือใช้จำนวนเฉพาะที่มีค่าน้อยกว่า รากของ 251 ซึ่งรากของ 251 คือ 15.843 ดังนั้นจำนวนเฉพาะที่จะนำมาใช้คือ 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13

แต่ปรากฎว่าเลข 2, 3, 5, 7, 9, 11, และ 13 หาร 251 ไม่ลงตัว

ดังนั้น 251 จึงเป็นจำนวนเฉพาะ

12. จงหาค่าที่ได้จากการแยกตัวประกอบเฉพาะ (Prime factorisation) ของ 126 และ 729

Solution:

126 = 2 * 63

= 2 * 3 * 21

= 2 * 3 * 3 * 7

729 = 3 * 243

= 3 * 3 * 81

= 3 * 3 * 3 * 27

= 3 * 3 * 3 * 3 * 9

= 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3

= 3^6

13. มีเลขจำนวนเต็มบวกใดบ้างที่มีค่าน้อยกว่า 30 และเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (Relatively Prime) กับเลข 30

Solution:

ตัวประกอบเฉพาะของ 30 คือ 2, 3, และ 5 เนื่องจาก 7 เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่ามากกว่ารากของ 30

ดังนั้นเลขจำนวนเต็มที่หารไม่ลงตัวด้วยเลขจำนวนเฉพาะทั้ง 3 ตัวมี 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, และ 29

อีกวิธีก็คือ หาจำนวนเต็มที่ทำให้ ค่า gcd กับเลข 30 แล้วมีค่าเท่ากับ 1

14. จงหา หารร่วมมาก (หรม หรือ gcd) ของคู่จำนวนเต็มต่อไปนี้

a. $3^7 * 5^3 * 7^3$, $2^{11} * 3^5 * 5^9$

b. $11 * 13 * 17$, $2^9 * 3^7 * 5^5 * 7^3$

c. 23^{31}, 23^{17}

d. 41 * 43 * 53, 41 * 43 * 53

e. $3^{13} * 5^{17}$, $2^{12} * 7^{21}$

f. 1111, 0

Solution:

ถ้าได้เลขมาในรูปของตัวประกอบจำนวนเฉพาะ วิธีคือหาตัวยกกำลังที่เล็กสุดระหว่าง 2 ฝั่งของแต่ละจำนวนเฉพาะ

a. $3^5 * 5^3$

b. ไม่มีตัวประกอบเฉพาะที่เหมือนกัน ดังนั้น gcd คือ 1

c. 23^{17}

d. 41 * 43 * 53

e. ไม่มีตัวประกอบเฉพาะที่เหมือนกัน ดังนั้น gcd คือ 1

f. 1111

15. จงใช้ Euclidean algorithm ในการหาค่าดังต่อไปนี้

 a. gcd(111, 201)

 b. gcd(1001, 1331)

 c. gcd(12345, 54321)

<u>Solution</u>:

a. gcd(111,201) = gcd(111,90) = gcd(90,21) = gcd(21,6) = gcd(6,3) = gcd(3,0) = 3

b. gcd(1001, 1331) = gcd(1001, 330) = gcd(330, 11) = gcd(11, 0) = 11

c. gcd(12345, 54321) = gcd(12345, 4941) = gcd(4941, 2463) = gcd(2463, 15) = gcd(15, 3) = gcd(3, 0) = 3

16. จงหาลำดับของ Pseudorandom numbers ที่ได้จาก Linear congruential generator จากสูตร $x_{n+1} = (3x_n+2)$ **mod** 13 และค่า seed $x_0 = 1$

Solution:

a. $x_1=(3x_0+2)$ **mod** 13 = (3 ∗ 1) + 2 **mod** 13 = 5

b. $x_2=(3x_1+2)$ **mod** 13 = (3 ∗ 5) + 2 **mod** 13 = 4

c. $x_3=(3x_2+2)$ **mod** 13 = (3 ∗ 4) + 2 **mod** 13 = 1

เนื่องจาก ค่า x_3 มีค่าเท่ากับ x_0 ดังนั้น ลำดับจะซ้ำไปเรื่อยๆ ก็คือ 1, 5, 4, 1, 5, 4, ...

เลขบัตรประชาชนในประเทศไทยมีจำนวน 13 หลัก $x_1x_2...x_{13}$

- 12 หลักแรกมีไว้ระบุตัวบุคคล
- หลักสุดท้าย x_{13} คือ check digit ที่เข้าสมการข้างล่างนี้

$$s = \sum_{i=1}^{12}(14 - i)x_i \ mod\ 11$$

$$x_{13} = 1 - s,\ if\ s \le 1$$

$$x_{13} = 11 - s,\ if\ s > 1$$

17. จงหา Check digit ของเลขบัตรดังต่อไปนี้

a. 5-6500-83524-44-?

b. 4-9101-98734-02-?

Solution:

a. 0

b. 1

18. จงตรวจสอบว่าเลขดังต่อไปนี้ ถูกต้องหรือไม่

a. 9-4096-73431-39-3

b. 6-8030-53463-10-7

Solution:

a. ไม่ถูกต้อง

b. ถูกต้อง

Cryptography (เลือกทำระหว่างข้อคู่หรือข้อคี่)

19. จงเข้ารหัสข้อความ “DO NOT PASS” โดยการแปลงตัวหนังสือเป็นตัวเลข ตาม encryption function ที่กำหนดดังต่อไปนี้ จากนั้นทำการแปลงตัวเลขกลับเป็นตัวอักษรที่เข้ารหัสแล้ว
    a. Caesar cipher
    b. f(p) = (p + 13) **mod** 26
    c. f(p) = (3p + 7) **mod** 26

Solution:

a. GR QRW SDVV

b. QB ABG CNFF

c. QX UXM AHJJ

20. จงถอดรหัสข้อความที่เข้ารหัสไว้ “CEBBOXNOB XYG” โดยใช้ Shift cipher ที่มีค่า f(p) = (p + 10) **mod** 26

Solution:

SURRENDER NOW

21. จงถอดรหัสข้อความที่เข้ารหัสไว้ "DY CVOOZ ZOBMRKXMO DY NBOKW" โดยใช้ Shift cipher ที่มีค่า f(p) = (p + k) **mod** 26 ให้ใช้สมมติฐานในการหาค่า k โดยดูจากตัวอักษรที่ใช้บ่อยที่สุดในภาษาอังกฤษ

<u>Solution:</u>

จากการวิเคราะห์จำนวนตัวอักษรใน ciphertext พบว่าตัว O ปรากฎบ่อยที่สุด สมมติว่า ตัวหนังสือภาษาอังกฤษที่ใช้บ่อยที่สุดโดยทั่วไปคือตัว E

ดังนั้นเป็นไปได้ว่า ตัวหนังสืออาจขยับไป 10 ตำแหน่งจาก E (4) ไป O (14)

$$14 = 4 + k \ \mathbf{mod}\ 26$$

จะได้ว่าค่า k น่าจะคือ 10 จากนั้นลองขยับทั้งข้อความถอยหลังไป 10 ตำแหน่ง ได้ผลลัพธ์คือ "TO SLEEP PERCHANCE TO DREAM"

เพราะว่าข้อความที่ได้จากการถอดรหัสดูสมเหตุสมผล ดังนั้นสมมติฐานที่ว่า k = 10 จึงถูกต้อง

22. จงเขียน Shift ciphers ในรูปของ Cryptosystem

<u>Solution:</u>

กำหนดให้ข้อความคือ strings ที่ประกอบด้วยสมาชิกใน $\boldsymbol{Z}_{26}$

P คือเซตของ strings ของสมาชิกใน $\boldsymbol{Z}_{26}$

C คือเซตของ strings ของสมาชิกใน $\boldsymbol{Z}_{26}$

K = $\boldsymbol{Z}_{26}$

E ประกอบด้วย function ในรูปของ $E_k(p) = (p + k)\ \mathbf{mod}\ 26$

D ประกอบด้วย function ในรูปของ $D_k(p) = (p - k)\ \mathbf{mod}\ 26$

23. จงเข้ารหัสข้อความ “UPLOAD” โดยใช้ RSA system ที่มีค่า n = 53 * 61 และ e = 17.

    a. แปลงตัวอักษรเป็นเลขจำนวนเต็มก่อนแล้วจึงจับกลุ่ม โดยที่กลุ่มหนึ่งกลุ่มมีตัวเลข 4 ตัว

Solution:

แปลงข้อความเป็นตัวเลขจะได้ 2015 1114 0003

แต่ละกลุ่มของเลข 4 ตัวให้เป็น M จากนั้นเอามาเข้าสมการ $C = M^e \textbf{ mod } n$

n = 53 * 61 = 3233 และ gcd(e, (p – 1)(q – 1)) = gcd(17, 52*60) = 1 แปลว่าใช้เลขยกกำลัง 17 ได้ และใช้หาค่า inverse ได้เวลาต้องการถอดรหัสข้อความ

ดังนั้นสูตรคือ $C = M^{17} \textbf{ mod } 3233$

หาค่าของแต่ละกลุ่มจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

2015^{17} **mod** 3233 = 2545

1114^{17} **mod** 3233 = 2757

0003^{17} **mod** 3233 = 1211

ข้อความที่เข้ารหัสคือ 2545 2757 1211

24. จงหาข้อความต้นฉบับโดยใช้ RSA system ที่มีค่า n = 43 * 59 และ e = 13 โดยที่ข้อความที่เข้ารหัสไว้คือ 0667 1947 0671

    a. ในการถอดรหัส ตัว decryption exponent (d) คือค่า inverse ของ e = 13 modulo 42 * 58 = 937

<u>Solution</u>:

สมการคือ $M = C^d \textbf{ mod } n$ เมื่อหาค่าของแต่ละกลุ่มจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

0667^{937} **mod** 2537 = 1808

1947^{937} **mod** 2537 = 1121

0671^{937} **mod** 2537 = 0417

แปลงตัวเลขกลับเป็นตัวอักษรจะได้คำว่า SILVER

Counting (เลือกทำระหว่างข้อคู่หรือข้อคี่)

25. จงหาจำนวนครั้งของ Print ใน algorithm ข้างล่างนี้

```
for i := 1 to n
    for j := 1 to n
        print "hello"
    for k := 1 to n
        print "hello"
```

<u>Solution</u>:

Loop ข้างใน print จำนวน 2*n* ครั้ง

Loop ข้างนอกทำงาน *n* ครั้ง ดังนั้นจำนวนครั้งโดยรวมคือ $n * 2n = 2n^2$

26. นักศึกษาแต่ละคนถูกจำแนกอยู่ในชั้นปีที่ 1, 2, 3 หรือ 4 จงหาจำนวนนักศึกษาขั้นต่ำที่จะทำให้มีอย่างน้อย 8 คนที่อยู่ในชั้นปีเดียวกัน

<u>Solution</u>:

ให้ 4 ชั้นปีนี้คือ pigeonholes

ถ้ามีนักเรียน 28 คน แต่ละชั้นปีก็อาจจะมีได้ 7 คน

แต่ถ้ามีนักเรียน 29 คน จะต้องมีชั้นปีอันใดอันหนึ่งที่มีนักเรียนอย่างน้อย 8 คน ดังนั้นจำนวนนักศึกษาขั้นต่ำคือ 29 คน

หรือหาจำนวนที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 4 และเมื่อปัดขึ้นแล้วเป็น 8

29/4 = 7.25 ปัดขึ้นเป็น 8

27. ไพ่หนึ่งสำรับจะมีจำนวน 52 ใบ ประกอบด้วยไพ่ 4 ชุด ชุดละ 13 ใบ แต่ละชุดจะมีสัญลักษณ์ได้แก่ โพดำ โพแดง ข้าวหลามตัด และดอกจิก ในชุด 13 ใบ ประกอบด้วยตัวเลข 2 ถึง 10 และมี J (jack) Q (queen หรือ แหม่ม) K (king) A (ace) จงหาจำนวนไพ่ขั้นต่ำที่ต้องจั่วจากสำรับเพื่อให้ได้
    a. อย่างน้อย 3 ใบจาก 1 ชุด เช่น ace 3 ใบ หรือ king 3 ใบ
    b. อย่างน้อย 3 aces
    c. Ace ข้าวหลามตัด

<u>Solution:</u>

a. 1 ชุดมี 13 ใบ ถ้าจั่ว 26 ใบก็มีโอกาสเป็นไปได้ที่จะได้ 2 ใบของแต่ละชุด เช่น ace 2 ใบ, เลขสอง 2 ใบ, ..., queen 2 ใบ, king 2 ใบ
    i. ดังนั้นต้องจั่วไพ่ที่ 27 จึงจะการันตีว่าจะมีบางชุดที่มี 3 ใบ
    ii. Pigeonhole คือ 13 ใบและตัวไพ่คือ pigeon
b. ในกรณีโชคร้ายสุดคือ จั่วได้ 48 ใบไม่มี ace เลย ดังนั้นต้องจั่วทั้งหมด 51 ใบ จึงจะมั่นใจได้ว่ามี ace อย่างน้อย 3 ใบ
c. ในกรณีโชคร้ายสุดคือ จั่วได้ 51 ใบไม่มี ace ข้าวหลามตัดเลย ดังนั้นต้องจั่วทุกใบเพื่อจะมั่นใจ

28. จงแสดงให้เห็นว่ามีอย่างน้อย 6 คนในรัฐ California ที่มีประชากร 37 ล้านคน มีชื่อที่ขึ้นต้นด้วย 3 ตัวอักษรที่เหมือนกัน และเกิดในวันเดียวกันของปี (ไม่จำเป็นต้องเป็นปีเดียวกัน)

    a. ให้สมมติว่าชื่อทุกคนขึ้นต้นด้วย 3 ตัวอักษร และ 1 ปีมี 366 วัน

29. จงแสดงให้เห็นว่ามีอย่างน้อย 6 คนในรัฐ California ที่มีประชากร 37 ล้านคน มีชื่อที่ขึ้นต้นด้วย 3 ตัวอักษรที่เหมือนกัน และเกิดในวันเดียวกันของปี (ไม่จำเป็นต้องเป็นปีเดียวกัน)

    a. ให้สมมติว่าชื่อทุกคนขึ้นต้นด้วย 3 ตัวอักษร และ 1 ปีมี 366 วัน

<u>Solution:</u>

ต้องหาก่อนว่ามีจำนวน combination ของชื่อขึ้นต้นกับวันเกิดเท่าไร

Product rule บอกว่ามี 26 วิธีในการเลือกแต่ละตัวอักษร และ 366 วันในการเลือกวันเกิด ดังนั้น 26 * 26 * 26 * 366 = 6,432,816 วิธีที่เป็นไปได้

เมื่อนำมาประยุกต์กับหลักการของ Pigeonhole โดยที่ Pigeonhole คือจำนวนวิธีข้างบน และ จำนวนประชากร 37 ล้านคือ pigeon

ดังนั้นจะมีอย่างน้อย 37,000,000 / 6,432,8161 = 5.75 ปัดขึ้นเป็น 6 คนที่มีชื่อขึ้นต้นและวันเกิดเหมือนกัน

30. จงหาค่าของแถวใน Pascal’s triangle ที่มีค่า binomial coefficients $C(9, k)$, $0 \le k \le 9$

Solution:

หาแถวที่ 9 ของสามเหลี่ยมปาสคาลโดยการหาค่า binomial coefficients หรือนำตัวเลขแถวที่ 8 มาบวกกัน ตามตัวอย่างดังรูป

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  28  56  70  56  28   8   1
```

คำตอบคือ 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

31. ให้ $b_n = 2b_{n-1} + n - 2^n$ and $b_0 = 5$ จงแสดงความสัมพันธ์ของ

a. b_{n-1} ในรูปของ b_{n-2}

b. b_n ในรูปของ b_{n-2}

c. b_n ในรูปของ b_{n-3}

<u>Solution</u>:

a. $b_{n-1} = 2b_{n-2} + (n - 1) - 2^{n-1}$

b. ใช้ข้อ a เพื่อแทน b_{n-1} ในรูปของ b_{n-2}

$$
\begin{aligned}
b_n &= 2b_{\mathrm{n}-1} + n - 2^{\mathrm{n}} \\
&= 2(2b_{\mathrm{n}-2} + (n - 1) - 2^{n-1}) + n - 2^n \\
&= 4b_{\mathrm{n}-2} + 3n - 2*2^n - 2
\end{aligned}
$$

c. ความสัมพันธ์เวียนเกิดของ b_{n-2} คือ

$$b_{n-2} = 2b_{n-3} + (n - 2) - 2^{n-2}$$

ใช้ข้อ b เพื่อแทน b_n ในรูปของ b_{n-2}

$$b_n = 4b_{n-2} + 3n - 2 * 2^n - 2$$

แทนที่ b_{n-2} จะได้

$$
\begin{aligned}
b_n &= 4(2b_{n-3} + (n - 2) - 2^{n-2}) + 3n - 2 * 2^n - 2 \\
&= 8b_{n-3} + 4n - 8 - 2^{\mathrm{n}} + 3n - 2 * 2^{\mathrm{n}} - 2 \\
&= 8b_{n-3} + 7n - 3 * 2^n - 10
\end{aligned}
$$

32. จงหาสมการของความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation)

    $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$ โดยใช้ recursive method

<u>Solution:</u>

$$
\begin{aligned}
&a_n = 2a_{n-1} + 2^n \\
&= 2(2a_{n-2} + 2^{n-1}) + 2^n = (2^2 a_{n-2} + 2 * 2^{n-1}) + 2^n = (2^2 a_{n-2} + 2^n) + 2^n = 2^2 a_{n-2} + 2 * 2^n \\
&= 2^2(2a_{n-3} + 2^{n-2}) + 2 * 2^n = (2^3 a_{n-3} + 2^2 * 2^{n-2}) + 2 * 2^n = (2^3 a_{n-3} + 2^n) + 2 * 2^n = 2^3 a_{n-3} + 3 * 2^n
\end{aligned}
$$

33. นางสาว P มีเงินเริ่มต้น 1000 บาท นางสาว P ลงทุนและได้ผลตอบแทน 5% ต่อปี (ดอกเบี้ยทบต้น หรือ Compound Interest) แต่ตอนท้ายปีทุกครั้งจะทำการถอนเงิน 100 บาท หลังจากที่ได้รับดอกเบี้ย ตัวอย่างเช่น สิ้นปีที่ 1 จำนวนเงินที่คงเหลือคือ 1000 + 0.05(1000) – 100 = 950

    a. จงสร้าง ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relation) และเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) สำหรับจำนวนเงินที่นางสาว P ควรมีหลังจากเวลาผ่านไป *n* ปี

        i. นิยามให้ a_0 และ a_n โดยที่ a_n สำหรับ $n > 0$ เป็นจำนวนเงินในบัญชีคงเหลือ ณ สิ้นปี *n*

    b. นางสาว P จะมีจำนวนเงินเหลือในบัญชีเท่าไรหลังจากที่ถอนเงิน 100 บาท ณ สิ้นปีที่ 3

    c. จงสร้างสมการสำหรับ a_n ที่ไม่รวม ความสัมพันธ์เวียนเกิด (หรือ a_n) ในฝั่งขวาของสมการ

        i. $$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right),$$

d. ใช้สมการที่ได้จากข้อที่แล้วในการหาว่าต้องใช้เวลากี่ปีก่อนที่จะถอนเงินจนเหลือ 0 บาท

<u>Solution:</u>

a. a_n คือจำนวนเงินของปีที่แล้ว a_{n-1} บวกด้วยดอกเบี้ยที่ได้รับ ($0.05a_{n-1}$) ลบด้วย เงินถอน 100 บาท

ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

$$a_n = a_{n-1} + 0.05a_{n-1} - 100$$

$$= 1.05a_{n-1} - 100 \text{ , if } n > 0$$

$$a_0 = 1000$$

b. ใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดจะได้

$$a_1 = 1050 - 100 = 950$$

$$a_2 = 1.05a_1 - 100 = 897.5$$

$$a_3 = 1.05a_2 - 100 = 842.38$$

ดังนั้นหลังจากถอนเงิน ณ สิ้นปีที่ 3 จะมียอดเงินคงเหลือ 842.38 บาท

c. จากความสัมพันธ์เวียนเกิดจะได้

$a_1 = 1.05a_{n-1} - 100$

$a_2 = 1.05a_{n-2} - 100$

$a_3 = 1.05a_{n-3} - 100$

และเป็นแบบนี้ไปเรื่อยๆ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1.05a_{n-1} - 100 \\
&= 1.05(1.05a_{n-2} - 100) - 100 \\
&= 1.05^2a_{n-2} - (1.05 * 100) - 100 \\
&= 1.05^2(1.05a_{n-3} - 100) - (1.05 * 100) - 100 \\
&= 1.05^3a_{n-3} - (1.05^2 * 100) - (1.05 * 100) - 100 \\
&\ldots \\
&= 1.05^na_0 - (1.05^{n-1} * 100) - (1.05^{n-2} * 100) - \ldots - (1.05^2 * 100) - (1.05 * 100) - 100 \\
&= (1.05^n * 1000) - 100(1.05^{n-1} + 1.05^{n-2} + \ldots + 1.05^2 + 1.05 + 1)
\end{aligned}
$$

แทนด้วยสูตรผลรวมที่ให้มาจะได้

$$
\begin{aligned}
&= 1.05^n * 1000 - 100 * ((1 - 1.05^n)/(1 - 1.05)) \\
&= 1.05^n * 1000 + 2000(1 - 1.05^n) \\
&= 2000 - 1.05^n(1000)
\end{aligned}
$$

d. แทนค่า n หลายๆค่าจะพบว่า $a_{14} = 20.07$ ส่วน $a_{15} = -78.93$

เพราะฉะนั้น ณ สิ้นปีที่ 15 ยอดเงินคงเหลือคือ 1.05 * 20.07 = 21.07

เมื่อถอนเงิน 100 บาท ยอดเงินคงเหลือจึงเป็น 0 บาท (กรณีถอนเกินไม่ได้)

34. จงหาจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 400 ที่

a. หารด้วย 6 ลงตัว
b. หารด้วย 6 ไม่ลงตัว
c. หารด้วย 7 และ 9 ไม่ลงตัว
d. หารด้วย 7 หรือ 9 ไม่ลงตัว

<u>Solution:</u>

a. 400/6 = 66(⅔) ปัดลง เนื่องจากตัวที่ 67 คือ 402 ดังนั้นมี 66 ตัว

b. เนื่องจากข้อ *a* เรารู้ว่ามี 66 ตัวที่หารลงตัว ดังนั้นจำนวนที่หารไม่ลงตัวคือ 400 – 66 = 334 ตัว

c. หารด้วย 7 และ 9 ลงตัวคือมีค่าเท่ากับหา ครน. ของ 7 และ 9

   ซึ่ง ครน.คือ 63 จากนั้นหา 400/63 ปัดลง = 6

   ดังนั้น มี 394 ค่าที่หารด้วย 7 และ 9 ไม่ลงตัว

d. ข้อนี้ไม่สามารถหาจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว แล้ว บวกกับ จำนวนที่หารด้วย 9 ลงตัวโดยตรงได้ เพราะจะนับจำนวนเต็มเช่น 63 หรือ 126 ซ้ำกัน เพราะมันหารด้วย 7 และ 9 ลงตัว

   ให้ A_1 = {x | 1 ≤ x ≤ 400, x หารด้วย 7 ลงตัว} และ
   A_2 = {x | 1 ≤ x ≤ 400, x หารด้วย 9 ลงตัว}

   ต้องการหา $|A_1 \cup A_2|$

   $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

   $= \text{floor}(400/7) + \text{floor}(400/9) - \text{floor}(400/63)$

$= 57 + 44 - 6$

$= 95$

ดังนั้นมีจำนวนที่หารด้วย 7 หรือ 9 ไม่ลงตัวคือ 400 – 95 = 305 ตัว

35.มีจำนวนสมาชิกเท่าไรใน $A_1 \cup A_2$ ถ้า A_1 มีสมาชิก 12 ตัว และ A_2 มีสมาชิก 18 ตัวและ

a. $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

b. $|A_1 \cap A_2| = 6$

c. $A_1 \subseteq A_2$

Solution:

a. $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

$= 12 + 18 - |A_1 \cap A_2|$

$= 30 - |A_1 \cap A_2|$

จากโจทย์ คือ $|A_1 \cap A_2| = 0$ ดังนั้นคำตอบคือ 30

b. จากโจทย์ คือ $|A_1 \cap A_2| = 6$ ดังนั้นคำตอบคือ $30 - 6 = 24$

c. ถ้า $A_1 \subseteq A_2$ ดังนั้น $A_1 \cap A_2$ คือ A_1 จึงได้ว่า $|A_1 \cap A_2| = |A_1| = 12$

คำตอบคือ $30 - 12 = 18$

36. แบบสำรวจครัวเรือนในประเทศไทยเปิดเผยว่า ประชากร 96% มีทีวีอย่างน้อย 1 ตัว, 98% มีโทรศัพท์ในบ้าน และ 95% มีทั้งทีวีอย่างน้อย 1 ตัวและมีโทรศัพท์ในบ้าน จงหาว่ามีกี่ % ที่ไม่มีทั้งทีวีและโทรศัพท์บ้าน

Solution:

ให้ T เป็นจำนวนครัวเรือนที่มีทีวี ซึ่ง $|T| = 96$

ให้ P เป็นจำนวนครัวเรือนที่มีโทรศัพท์ ซึ่ง $|P| = 98$

จากโจทย์ $|T \cap P| = 95$

หา $|T \cup P| = 96 + 98 - 95$

$= 99$

ดังนั้นมีแค่ 1% (100-99) ของจำนวนประชากรที่ไม่มีทั้งทีวีและโทรศัพท์บ้าน

Relations (เลือกทำ 7 ข้อ)

37. จงเขียนคู่อันดับทั้งหมดใน relation R จาก A = {0,1,2,3,4} ไปยัง B={0,1,2,3}, โดยที่ $(a, b) \in R$ เมื่อ

    a. $a = b$.

    b. $a + b = 4$.

    c. $a > b$.

    d. $a \mid b$.

    e. $\gcd(a, b) = 1$.

    f. $\operatorname{lcm}(a, b) = 2$.

<u>Solution</u>:

a. {(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)}

b. {(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)}

c. {(1,0),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3)}

d. {(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,2),(3,0),(3,3),(4,0)} *a* ห้ามเป็น 0

e. {(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)} คือคู่ที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน

f. {(1, 2), (2, 1), (2, 2)}

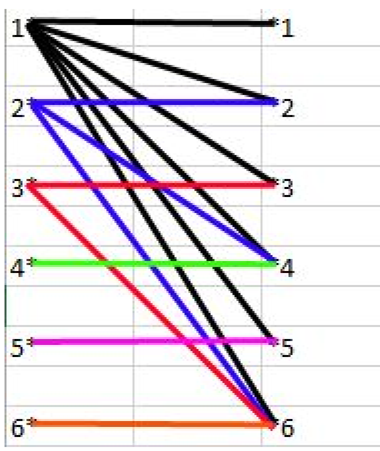
38. จงเขียนคู่อันดับทั้งหมดใน relation R = {(a, b) | a divides b} บน set {1,2,3,4,5,6}

   a. แสดงความสัมพันธ์เชิงกราฟ

   b. แสดงความสัมพันธ์ในรูปตาราง

<u>Solution:</u>

R = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1.6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)}



R	1	2	3	4	5	6
1	x	x	x	x	x	x
2		x		x		x
3			x			x
4				x		
5					x	
6						x

39. จากความสัมพันธ์ R บน set {1, 2, 3, 4} จงหาว่ามีคุณสมบัติ reflexive, symmetric, antisymmetric, transitive หรือไม่

   a. {(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)} – Transitive

   b. {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)} – Reflexive, Symmetric และ Transitive

   c. {(2,4),(4,2)} – Symmetric

   d. {(1,2),(2,3),(3,4)} – Antisymmetric

e. {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)} – Reflexive, Symmetric, Antisymmetric และ Transitive

f. {(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)} – ไม่มี

40. จากความสัมพันธ์ R บน set ของทุกคน จงหาว่ามีคุณสมบัติ reflexive, symmetric, antisymmetric, transitive หรือไม่

    a. นาย a สูงกว่านาย b – Antisymmetric และ Transitive

    b. นาย a กับนาย b เกิดวันเดียวกัน – Reflexive, Symmetric, และ Transitive

41. จากความสัมพันธ์ R บน set ของจำนวนจริงทุกตัว จงหาว่ามีคุณสมบัติ reflexive, symmetric, antisymmetric, transitive หรือไม่

    a. $x + y = 0$ – Symmetric

    b. $x = \pm y$ – Reflexive, Symmetric, and Transitive

    c. $x = 2y$ – Antisymmetric

    d. $xy \geq 0$ – Reflexive, and Symmetric

    e. $xy = 0$ – Symmetric

    f. $x = 1$ – Antisymmetric, and Transitive

    g. $x = 1$ or $y = 1$ – Symmetric

42. จงแสดงความสัมพันธ์เหล่านี้บนเซต {1, 2, 3} ด้วย matrix

a. {(1, 1), (1, 2), (1, 3)}
b. {(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)}
c. {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}
d. {(1, 3), (3, 1)}
e. จงวาด directed graph ของแต่ละความสัมพันธ์ในข้อ a, b, c, d.

Solution:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

43. จงเขียนคู่อันดับทั้งหมดในความสัมพันธ์บนเซต {1, 2, 3} ที่สอดคล้องกับ matrix ดังต่อไปนี้

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solution:

a. (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), และ (3, 3)
b. (1,2), (2,2), และ (3,2)
c. (1,1), (1.2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), และ (3,3)

44. ให้ R เป็นความสัมพันธ์ที่แสดงด้วย matrix ดังนี้

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

จงเขียน matrix ที่ได้จาก

a. R^2

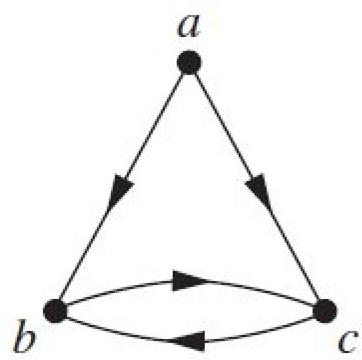
b. R^3

c. R^4

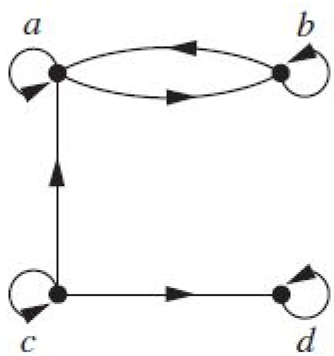
<u>Solution</u>:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

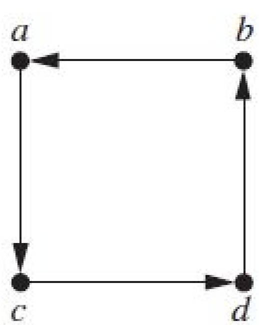
45. จงเขียนคู่อันดับทั้งหมดของความสัมพันธ์ที่แสดงอยู่ใน directed graphs และ จงหาว่ามีคุณสมบัติ reflexive, symmetric, antisymmetric, transitive หรือไม่

a. 

– ไม่มี

b. 

– Reflexive

c. 

– Antisymmetric