Soluzione di Fully Fuzzy Linear Systems

Gambuti G.P., Di Nuzzi P., Libardi M., Russo A.

Cos'e' la logica Fuzzy?

La **logica fuzzy** (o logica sfumata) e' una logica in cui si puo' attribuire a ciascuna proposizione un grado di verita' diverso da 0 e 1 e compreso tra di loro. E' una logica polivalente, ossia un'estensione della logica booleana. E' legata alla teoria degli insiemi sfocati.
Con grado di verita' o valore di appartenenza si intende quanto e' vera una proprieta', che puo' essere, oltre che vera (= a valore 1) o falsa (= a valore 0) come nella logica classica, anche parzialmente vera e parzialmente falsa.

Logica Fuzzy

Nella logica classica, un caso puo' avere due valori, *Vero o Falso*;
Nella logica fuzzy invece i valori possono essere **Vero, Falso oppure un valore intermedio tra i due**.
I connettivi che si usano nella logica fuzzy sono i seguenti:

- AND $\wedge$
- OR $\vee$
- NOT $\neg$
- IF-THEN $\Rightarrow$
- IF-AND-ONLY-IF $\Leftrightarrow$

Connettivi logica Fuzzy

Il risultato dei connettivi logici Fuzzy e' descritto dalle tabelle di verita':

p	q	p AND q	p OR q	p IF-THEN q	p IF-AND-ONLY-IF q
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Numeri Fuzzy

Un numero fuzzy e' la generalizzazione di un numero reale, nel senso che non riferisce un preciso valore ma un range di possibili valori. un qualsiasi numero fuzzy, $\tilde{A}$ = (p, q, r), ha determinate proprieta' e operazioni possibili.

Operazioni aritmetiche sui numeri Fuzzy triang.

Definizione 1 (Oper. aritmetiche):

$$\begin{aligned}
\textit{considerando due numeri Fuzzy triangolari } \tilde{A} = (p, q, r) \textit{ e } \tilde{B} = (s, m, n). \\
\textit{Addizione: } \tilde{A} \oplus \tilde{B} = (p, q, r) \oplus (s, m, n) = (p + s, q + m, r + n). \\
\textit{Sottrazione: } \tilde{A} \ominus \tilde{B} = (p, q, r) \ominus (s, m, n) = (p - s, q - m, r - n). \\
\textit{Moltiplicazione: } \tilde{A} \otimes \tilde{B} = (p, q, r) \otimes (s, m, n) = (ps, pm + sq, pm + sr). \\
\textit{Molt. per uno scalare: } \lambda \otimes \tilde{A} = \lambda \otimes (p, q, r) = \begin{cases} (\lambda p, \lambda q, \lambda r) \; se \; \lambda \geq 0 \\ (-\lambda p, -\lambda q, -\lambda r) \; se \; \lambda < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1}$$

Sistemi lineari e FFLS

Le equazioni lineari vengono utilizzate per descrivere molte tra le relazioni e progressi nel mondo reale, come ad esempio:

- predire profitti (e altre applicazioni in economia)
- calcolare la velocita’ di una reazione, in chimica
- molti problemi di Fisica, come ad esempio il moto di un proiettile
- ecc.

In particolare, *un sistema lineare dove gli elementi della matrice dei coefficienti e quelli del vettore dei termini noti sono numeri fuzzi, si definisce Fully Fuzzy Linear System (FFLS)*

Metodi di risoluzione

Per risolvere il sistema abbiamo due metodi:

- Utilizzando l'eliminazione di Gauss Jordan, dopo aver ridotto il sistema in matrici.
  K. Abdul Razak S. Muruganandam and K.Rajakumar. "Solving fully fuzzy linear systems by Gauss Jordan Elimination Method". In: *Journal of Physics: Conference Series 1362 (2019) 012087* ()
- utilizzando il metodo della ST Decompopsition.
  A.Karpagam V.Vijayalakshmi S. Surabhi. "Fully Fuzzy Linear Systems in Python Programming". In: *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)* (2020)

noi utilizzeremo il primo metodo, dato che lo conosciamo gia' dalle precedenti lezioni, applicato ai sistemi di equazioni lineari.
$\rightarrow$ **Esaminiamo meglio il metodo con un esempio:**

4. Numerical Example

Consider the following FFLS (taken from [5]) and solve it by proposed method.

$(6, 1, 4) \otimes (x_1, y_1, z_1) \oplus (5, 2, 2) \otimes (x_2, y_2, z_2) \oplus (3, 2, 1) \otimes (x_3, y_3, z_3) = (58, 30, 60)$

$(12, 8, 20) \otimes (x_1, y_1, z_1) \oplus (14, 12, 15) \otimes (x_2, y_2, z_2) \oplus (8, 8, 10) \otimes (x_3, y_3, z_3) = (142, 139, 257)$

$(24, 10, 34) \otimes (x_1, y_1, z_1) \oplus (32, 30, 30) \otimes (x_2, y_2, z_2) \oplus (20, 19, 24) \otimes (x_3, y_3, z_3) = (316, 297, 514)$

Solution

The given FFLS may be written as

$$\begin{pmatrix} (6,1,4) & (5,2,2) & (3,2,1) \\ (12,8,20) & (14,12,15) & (8,8,10) \\ (24,10,34) & (32,30,30) & (20,19,24) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1,y_1,z_1) \\ (x_2,y_2,z_2) \\ (x_3,y_3,z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (58,30,60) \\ (142,139,257) \\ (316,297,514) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 14 & 8 \\ 24 & 32 & 20 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 8 & 12 & 8 \\ 10 & 30 & 19 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 20 & 15 & 10 \\ 34 & 30 & 24 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 58 \\ 142 \\ 316 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 30 \\ 139 \\ 297 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 60 \\ 257 \\ 514 \end{pmatrix}$$

The augmented matrix

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 58 \\ 12 & 14 & 8 & 142 \\ 24 & 32 & 20 & 316 \end{pmatrix}$$

Applying elementary row operations on matrix (A, b)

First $R_1 \to \frac{R_1}{6}$, we get $\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{6} & \frac{3}{6} & \frac{58}{6} \\ 12 & 14 & 8 & 142 \\ 24 & 32 & 20 & 316 \end{pmatrix}$

Again we apply elementary operations in sequence

$R_2 \to R_2 - 12 R_1, R_3 \to R_3 - 24 R_1, R_2 \to \frac{R_2}{4}, R_3 \to R_3 - 12 R_2,$

$R_3 \to \frac{R_3}{2}, R_2 \to R_2 - \frac{1}{2} R_3, R_1 \to R_1 - \frac{5}{6} R_2, R_1 \to R_1 - \frac{1}{2} R_3$

Finally, we get $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

From this row reduced form of augmented Matrix (A, b),

we have $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 3$.

The augmented matrix

$$(A, h - Mx) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 10 \\ 12 & 14 & 8 & 23 \\ 24 & 32 & 20 & 50 \end{pmatrix}$$

Similarly, applying elementary row operations on Matrix (A, h – Mx) in sequence

$R_1 \to \frac{R_1}{6}, R_2 \to R_2 - 12 R_1, R_3 \to R_3 - 24 R_1, R_2 \to \frac{R_2}{4}, R_3 \to R_3 - 12 R_2,$

$R_3 \to \frac{R_3}{2}, R_2 \to R_2 - \frac{R_3}{2}, R_1 \to R_1 - \frac{5}{6} R_2, R_1 \to R_1 - \frac{R_3}{2}$

Finally, we get $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

From this row reduced form of augmented matrix (A, h – Mx),

we have $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = \frac{1}{2}$.

Similarly, applying elementary row operations on augmented matrix

$$(A, g - Nx) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 31 \\ 12 & 14 & 8 & 72 \\ 24 & 32 & 20 & 156 \end{pmatrix}$$

Finally, we get $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

From this row reduced form of augmented matrix (A, g – Nx),

we have $z_1 = 3, z_2 = 2, z_3 = 1$.

Substituting the values of x_i, y_i, z_i where $i = 1, 2, ..., n$ in the FFLS solution

$\tilde{\mathbf{x}}_i = (x_i, y_i, z_i)$, for all $i = 1, 2, ..., n$

we get

$\tilde{\mathbf{x}}_{-} = (x_1, y_1, z_1) = (4, 1, 3)$

$\tilde{\mathbf{x}}_2 = (x_2, y_2, z_2) = (5, 1/2, 2)$

and $\tilde{\mathbf{x}}_{-} = (x_3, y_3, z_3) = (3, 1/2, 1)$

We have the same solution with this method as the system given in [5].

Bibliografia

S. Muruganandam, K. Abdul Razak and K.Rajakumar. “Solving fully fuzzy linear systems by Gauss Jordan Elimination Method”. In: *Journal of Physics: Conference Series 1362 (2019) 012087* ().

V.Vijayalakshmi S. Surabhi, A.Karpagam. “Fully Fuzzy Linear Systems in Python Programming”. In: *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)* (2020).