

# Soluzione di Fully Fuzzy Linear Systems

Gambutì G.P., Di Nuzzi P., Libardi M., Russo A.

# Problema:

"Linear system of equations are vital for contemplating and comprehending an expansive extent of the issues in connected science, ordinarily in numerous applications a portion of the parameters in our issues are spoken to fuzzy numbers; presented the ideas of fuzzy numbers and fuzzy math, fuzzy numbers number-crunching is connected and valuable in calculation of direct frameworks."

estratto da: K. Abdul Razak S. Muruganandam and K.Rajakumar. "Solving fully fuzzy linear systems by Gauss Jordan Elimination Method". In: *Journal of Physics: Conference Series* 1362 (2019) 012087 ()

# Cos'è la logica Fuzzy?

La **logica fuzzy** (o logica sfumata) è una logica in cui si può attribuire a ciascuna proposizione un grado di verità diverso da 0 e 1 e compreso tra di loro. È una logica polivalente, ossia un'estensione della logica booleana. È legata alla teoria degli insiemi sfocati.

Con grado di verità o valore di appartenenza si intende quanto è vera una proprietà, che può essere, oltre che vera (= a valore 1) o falsa (= a valore 0) come nella logica classica, anche parzialmente vera e parzialmente falsa.



Figure: Lotfi Aliasker Zadeh, fondatore della logica Fuzzy

# Logica Fuzzy

Nella logica classica, un caso puo' avere due valori, *Vero* o *Falso*;

Nella logica fuzzy invece i valori possono essere **Vero**, **Falso** oppure un valore intermedio tra i due.

I connettivi che si usano nella logica fuzzy sono i seguenti:

- AND  $\wedge$
- OR  $\vee$
- NOT  $\neg$
- IF-THEN  $\Rightarrow$
- IF-AND-ONLY-IF  $\Leftrightarrow$

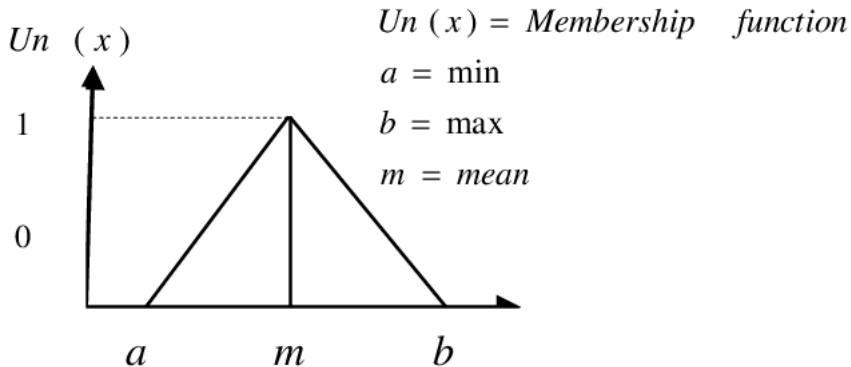
# Connettivi logica Fuzzy

Il risultato dei connettivi logici Fuzzy e' descritto dalle tabelle di verita':

p	q	p AND q	p OR q	p IF-THEN q	p IF-AND-ONLY-IF q
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

# Numeri Fuzzy

Un numero fuzzy e' la generalizzazione di un numero reale, nel senso che non riferisce un preciso valore ma un range di possibili valori. un qualsiasi numero fuzzy,  $\tilde{A} = (p, q, r)$ , ha determinate proprieta' e operazioni possibili.



# Operazioni aritmetiche sui numeri Fuzzy triang.

**Definizione 1** (Oper. aritmetiche):

*considerando due numeri Fuzzy triangolari  $\tilde{A} = (p, q, r)$  e  $\tilde{B} = (s, m, n)$ .*

*Addizione:  $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (p, q, r) \oplus (s, m, n) = (p + s, q + m, r + n)$ .*

*Sottrazione:  $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (p, q, r) \ominus (s, m, n) = (p - s, q - m, r - n)$ .* (1)

*Moltiplicazione:  $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (p, q, r) \otimes (s, m, n) = (ps, pm + sq, pm + sr)$ .*

*Molt. per uno scalare:  $\lambda \otimes \tilde{A} = \lambda \otimes (p, q, r) = \begin{cases} (\lambda p, \lambda q, \lambda r) & \text{se } \lambda \geq 0 \\ (-\lambda p, -\lambda q, -\lambda r) & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$*

# Sistemi lineari e FFLS

Le equazioni lineari vengono utilizzate per descrivere molte tra le relazioni e progressi nel mondo reale, come ad esempio:

- predire profitti (e altre applicazioni in economia)
- calcolare la velocità di una reazione, in chimica
- molti problemi di Fisica, come ad esempio il moto di un proiettile
- ecc.

In particolare, *un sistema lineare dove gli elementi della matrice dei coefficienti e quelli del vettore dei termini noti sono numeri fuzzy, si definisce Fully Fuzzy Linear System (FFLS)*



# Metodi di risoluzione

Per risolvere il sistema abbiamo due metodi:

- Utilizzando l'eliminazione di Gauss Jordan, dopo aver ridotto il sistema in matrici.  
S. Muruganandam and K.Rajakumar, "Solving fully fuzzy linear systems by Gauss Jordan Elimination Method"
- utilizzando il metodo della ST Decomposition.  
A.Karpagam V.Vijayalakshmi S. Surabhi. "Fully Fuzzy Linear Systems in Python Programming". In: *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)* (2020)

noi utilizzeremo il primo metodo, dato che lo conosciamo già' dalle precedenti lezioni, applicato ai sistemi di equazioni lineari.

→ **Esaminiamo meglio il metodo con un esempio:**

#### 4. Numerical Example

Consider the following FFLS (taken from [5]) and solve it by proposed method.

$$(6, 1, 4) \otimes (x_1, y_1, z_1) \oplus (5, 2, 2) \otimes (x_2, y_2, z_2) \oplus (3, 2, 1) \otimes (x_3, y_3, z_3) = (58, 30, 60)$$

$$(12, 8, 20) \otimes (x_1, y_1, z_1) \oplus (14, 12, 15) \otimes (x_2, y_2, z_2) \oplus (8, 8, 10) \otimes (x_3, y_3, z_3) = (142, 139, 257)$$

$$(24, 10, 34) \otimes (x_1, y_1, z_1) \oplus (32, 30, 30) \otimes (x_2, y_2, z_2) \oplus (20, 19, 24) \otimes (x_3, y_3, z_3) = (316, 297, 514)$$

*Solution*

The given FFLS may be written as

$$\begin{pmatrix} (6, 1, 4) & (5, 2, 2) & (3, 2, 1) \\ (12, 8, 20) & (14, 12, 15) & (8, 8, 10) \\ (24, 10, 34) & (32, 30, 30) & (20, 19, 24) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1, y_1, z_1) \\ (x_2, y_2, z_2) \\ (x_3, y_3, z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (58, 30, 60) \\ (142, 139, 257) \\ (316, 297, 514) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 14 & 8 \\ 24 & 32 & 20 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 8 & 12 & 8 \\ 10 & 30 & 19 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 20 & 15 & 10 \\ 34 & 30 & 24 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 58 \\ 142 \\ 316 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 30 \\ 139 \\ 297 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 60 \\ 257 \\ 514 \end{pmatrix}$$

The augmented matrix

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 58 \\ 12 & 14 & 8 & 142 \\ 24 & 32 & 20 & 316 \end{pmatrix}$$

Applying elementary row operations on matrix (A, b)

$$\text{First } R_1 \rightarrow \frac{R_1}{6}, \text{ we get } \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{6} & \frac{3}{6} & \frac{58}{6} \\ 12 & 14 & 8 & 142 \\ 24 & 32 & 20 & 316 \end{pmatrix}$$

Again we apply elementary operations in sequence

$$R_2 \rightarrow R_2 - 12 R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 24 R_1, R_2 \rightarrow \frac{R_2}{4}, R_3 \rightarrow R_3 - 12 R_2,$$

$$R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2}, R_2 \rightarrow R_2 - \frac{1}{2} R_3, R_1 \rightarrow R_1 - \frac{5}{6} R_2, R_1 \rightarrow R_1 - \frac{1}{2} R_3$$

$$\text{Finally, we get } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

From this row reduced form of augmented Matrix (A, b),

we have  $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 3$ .

The augmented matrix

$$(A, h - Mx) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 10 \\ 12 & 14 & 8 & 23 \\ 24 & 32 & 20 & 50 \end{pmatrix}$$

Similarly, applying elementary row operations on Matrix (A, h - Mx) in sequence

$$R_1 \rightarrow \frac{R_1}{6}, R_2 \rightarrow R_2 - 12 R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 24 R_1, R_2 \rightarrow \frac{R_2}{4}, R_3 \rightarrow R_3 - 12 R_2,$$

$$R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2}, R_2 \rightarrow R_2 - \frac{R_3}{2}, R_1 \rightarrow R_1 - \frac{5}{6} R_2, R_1 \rightarrow R_1 - \frac{R_3}{2}$$

$$\text{Finally, we get } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

From this row reduced form of augmented matrix (A, h - Mx),

$$\text{we have } y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = \frac{1}{2}.$$

Similarly, applying elementary row operations on augmented matrix

$$(A, g - Nx) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 31 \\ 12 & 14 & 8 & 72 \\ 24 & 32 & 20 & 156 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finally, we get } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

From this row reduced form of augmented matrix (A, g - Nx),

$$\text{we have } z_1 = 3, z_2 = 2, z_3 = 1.$$

Substituting the values of  $x_i, y_i, z_i$  where  $i = 1, 2, \dots, n$  in the FFLS solution

$$\tilde{x}_i = (x_i, y_i, z_i), \text{ for all } i = 1, 2, \dots, n$$

we get

$$\tilde{x}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (4, 1, 3)$$

$$\tilde{x}_2 = (x_2, y_2, z_2) = (5, 1/2, 2)$$

$$\text{and } \tilde{x}_3 = (x_3, y_3, z_3) = (3, 1/2, 1)$$

We have the same solution with this method as the system given in [5].

## Bibliografia



S. Muruganandam, K. Abdul Razak and K.Rajakumar. "Solving fully fuzzy linear systems by Gauss Jordan Elimination Method". In: *Journal of Physics: Conference Series 1362* (2019) 012087 ().



V.Vijayalakshmi S. Surabhi, A.Karpagam. "Fully Fuzzy Linear Systems in Python Programming". In: *International Journal of Engineering and Advanced Technology (IJEAT)* (2020).