Lösungen zu den Rechenbeispielen von Numerical Computing

Nikolas Hauschka

Dezember 2019

1

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind Produkte und Summen von Matrizen dieser Art.

a) $A * B$

Da die Größen der Matrizen wie Dominosteine zusammenpassen, kann man diese beiden Matrizen miteinander multiplizieren. In diesem Fall haben wir die Maße 2x3 und 3x2. Die Anzahl der Zeilen der Ergebnismatrix ist 2, da das linke Ende der "Dominokette" 2 ist. Die Anzahl der Spalten der Ergebnismatrix ist 2, da das rechte Ende der "Dominokette" 2 ist. Das Ergebnis ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1*2-2*1+0*1 & 1*4-2*0+0*3 \\ -1*2+0*1+2*1 & -1*4+0*0+2*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $B * A$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

c) $A * C$

Diese Matrizen lassen sich nicht multiplizieren, da die Größen 2x3 und 2x2 nicht wie Dominosteine zusammenpassen.

d) $A^T * (C + D)$

$$C + D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e) $(C + D) * A$

Da $C + D$ symmetrisch ist, gleicht sie ihrer Transponierten. Das heißt $(C + D) = (C + D)^T$ Außerdem gilt die Regel $(P * Q)^T = Q^T * P^T$ Daraus folgt:

$(C + D) * A = (((C + D) * A)^T)^T = (A^T * (C + D)^T)^T = (A^T * (C + D))^T$

Das heißt, wir erhalten die Transponierte Matrix vom Ergebnis aus c)

$(C + D) * A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) yAx

Die Größen sind 2x1, 2x3 und 3x1. Diese passen nicht, da 2x1 und 2x3 nicht wie Dominosteine zusammenpassen.

b) $y^T Ax$

Da die Matrixmultipikation assoziativ ist, ist es egal, ob wir zuerst die linken beiden oder die rechten beiden Matrizen multiplizieren.

$Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y^T Ax = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$

c) $x^T Ay$

Die Großen sind 1x3, 2x3 und 2x1, also unpassend.

d) $x^T (y^T A)^T$

Da das Ergebnis eine 1x1-Matrix ist, können wir sie transponieren, ohne dass sie verändert wird.

$x^T (y^T A)^T = (x^T (y^T A)^T)^T = (y^T A)x = y^T Ax$

Also stimmt dieses Ergebnis mit dem aus b) überein.

3

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

Zuerst muss man zeigen, dass $A = B * C$ ist, was kein Problem sein sollte. Als nächstest müssen bestimmte Determinanten berechnet werden. Dazu machen wir die Beispiele in einer anderen Reihenfolge.

b) $det(B)$

Da B eine Dreiecksmatrix ist, ist die Determinate einfach das Produkt der Diagonalelemente.

$det(B) = 1 * 1 * 1 = 1$

c) $det(C)$

$det(C) = 4 * 1 * 5 = 20$

a) $det(A)$

Da die Determinantenfuktion multiplikativ ist, gilt:

$det(A) = det(B * C) = det(B) * det(C) = 20$

d) $det(A^2)$

$det(A^2) = det(A * A) = det(A) * det(A) = 400$

e) $det(A^{-1})$

$det(A^{-1}) = (det(A))^{-1} = \frac{1}{20}$

f) $det(ABC)$

$det(ABC) = det(A^2) = 400$

g) $det(C^T C)$

Die Determinante ändert sich nicht, wenn man eine Matrix tranponiert.

$det(C^T C) = det(C^T) * det(C) = det(C) * det(C) = 400$

4

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

Gesucht sind Inverse, wobei es auch hier sinnvoll ist, die Beispiele in einer anderen Reihenfolge zu machen.

b) B^{-1}

Um das Inverse zu bestimmen, schreiben wir die Matrix B neben die Einheitsmatrix und versuchen, auf der linken Seite durch elementare Zeilenoperationen auf die Einheitsmatrix zu kommen. Wir machen das einmal ausfürlich. Zuerst eliminieren wir die 2, indem wir die zweite Zeile mit dem (-2)-fachen der ersten Zeile addieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die -4 werden wir los, indem wir mit dem 4-fachen der ersten Zeile addieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Schließlich kann man die 3 loswerden, indem man mit dem -3-fachen der zweiten Zeile addiert. Dann erhält man:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 10 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein kann man erkennen, dass:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ l & m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ -l+km & -m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) C^{-1}

Auch hier kann man die Inverse auf ähnliche Weise bestimmen. Wir werden dazu erst einmal durch geeignete Multiplikation dafür sorgen, dass die Hauptdiagonale nur aus Einsern besteht.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

Spielt man das gleiche Spiel wir vorher, erhält man:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 3/20 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

d) $C^{-1}B^{-1}$

$$C^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/5 & 3/20 \\ 4 & -4/5 & 3/5 \\ 2 & -3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

a) A^{-1}

Ähnlich wie beim Transponieren lässt sich das Inverse eines Produkts auf die Faktoren übertragen, wenn man diese vertauscht:

$A^{-1} = (B * C)^{-1} = C^{-1} * B^{-1}$

So wären wir bei Beispiel d).

5

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

a) $B^{-1}C^{-1}$

$$B^{-1}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 3/20 \\ -1/2 & 1/2 & 3/10 \\ 5/2 & -1/2 & -1/10 \end{pmatrix}$$

c) $(A^{-1})^T$

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 5/4 & 4 & 2 \\ -1/5 & -4/5 & -3/5 \\ 3/20 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

b) $(A^T)^{-1}$

Da es egal ist, ob man zuerst invertiert oder umgekehrt, stimmt dieses Ergebnis mit c) überein.

6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

a) Welche der Matrizen sind orthogonal?

Keine, da alle mittleren Spaltenvektoren nicht die Norm 1 haben.

b) Welche der Matrizen sind symmetrisch?

Nur B, da sie mit ihrer Transponierten übereinstimmt.

c) Man bestimme a und b, sodass folgende Matrix orthogonal wird:

$$a * \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt der beiden Spaltenvektoren muss 0 ergeben, das heißt:

$3a * 4a + 4a * ba = 0$

Wäre $a = 0$, dann hätten die Spaltenvektoren nicht die Norm 1, also ist a ungleich 0, das heißt, wir können durch a dividieren und kommen auf:

$3 * 4 + 4 * b = 0 \Rightarrow 4b = -12 \Rightarrow b = -3$

Da die Spaltenvektoren jetzt die Norm $5a$ haben, muss $a = 1/5$ oder $a = -1/5$ gelten.

7

Welche der Folgenden Matrizen ist positiv oder negativ definit?

In diesem Beispiel sind alle Matrizen symmetrisch, weshalb wir gewisse Kriterien anwenden können.

a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Da dies eine Diagonalmatrix ist, können wir die Eigenwerte -4, -1 und -5 leicht ablesen. Da diese alle negativ sind, folgt die negative Definitheit aus dem Eigenwertkriterium.

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

Schauen wir uns die Hauptuntermatrizen an, indem wir unterste und rechteste Zeilen löschen , erhalten wir:

$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

Die kleinste dieser Hauptuntermatrizen hat die Determinante 0, weshalb die Matrix aus der Angabe wegen des Hauptminorenkriteriums weder positiv noch negativ definit ist.

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Um die Definitheit dieser Matrix zu bestimmen, bestimmen wir wieder die Hauptuntermatrizen. Das heißt, wir löschen unterste Zeilen und rechteste Spalten und erhalten:

$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$

Die Determinanten davon sind alle Positiv (nämlich 2, 2, 7), weshalb die positive Definitheit aus dem Hauptminorenkriterium folgt.

d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Bei diesem Beispiel folgt die positive Definitheit ganz analog.

8

Gegeben sei folgende reelle Matrix:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \alpha \\ -2 & 6 & -1 \\ \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Für welche α ist A positiv definit?

Hier wenden wir das Hauptminorenkriterium an. Die Hauptuntermatrizn lauten also:

$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & \alpha \\ -2 & 6 & -1 \\ \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Trivialerweise sind die Determinanten der ersten beiden Untermatrizen positiv. Für die Dritte gilt:

$det(A) = 24 + 2\alpha + 2\alpha - 6\alpha^2 - 8 - 2 = -6\alpha^2 + 4\alpha + 14$

Verwendet man eine Lösungsformel, kommt man auf die Nullstellen $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{88}}{6}$ und $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{88}}{6}$ des quadratischen Polynoms.

Der Quadratische Koeffizien -6 des Polynoms gibt an, dass die Parabel nach unten geöffnet ist. Daraus folgt, dass genau alle Funktionswerte zwischen den Nullstellen positiv sind. Genau in diesen Fällen ist die Matrix positiv definit.

b) Für $\alpha = 0$ sind die Eigenwerte und Eigenvektoren zu bestimmen.

Zieht man von allen Hauptdiagonalelementen λ ab und berechnet die Determinante davon, kommt das charakteristische Polynom heraus.

$$det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(6-\lambda) - (2-\lambda) - 4(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = (1-\lambda)(2-\lambda)(7-\lambda)$$

Somit erhalten wir die Eigenwerte 1, 2 und 7. Setzt man $\lambda = 1$ so kommt heraus:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & 0 \\ -2 & 6-1 & -1 \\ 0 & -1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verwendet man elementare Zeilenoperationen (d.h. Wir multiplizieren Zeilen mit einem Faktor oder wir addieren Vielfache von Zeilen mit anderen), so erhält man eine einfachere Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt konstruieren wir einen nicht-0-Vektor, der von dieser Matrix auf 0 abgebildet wird. Da die Mittlere Spalte weniger Nullen beinhaltet, wählen wir zuerst den mittleren Eintrag des Eigenvektors. Wir wählen hierfür 1. Gezielt lässt sich ermitteln, dass man die anderen Einträge so wählen muss:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{denn} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog lassen sich die Eigenvektoren zu den Eigenwerten 2 und 7 bestimmen. Solche sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{und} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das sind nicht die einzigen Lösungen, da jedes Vielfache eines Eigenvektors (außer dem Nullvektor) auch wieder ein Eigenvektor ist.

c) Man bestimme die Determinante von A.

Diese wurde schon bei a) bestimmt.

11

Gegeben sind:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

a) Gesucht sind die charakteristischen Polynome.

Wie bei Aufgabe 8 zieht man λ von den Hauptdiagonalelementen ab und berechnet anschließend die Determinanten. Alle drei charakteristischen Polynome schauen dann so aus:

$(4 - \lambda)^3$

b) Gesucht sind die Eigenwerte.

Die einzige Nullstelle der charakteristischen Polynome ist 4. Diese ist sogar dreifach.

d) Gesucht sind die Eigenvektoren für die Eigenwerte.

Fangen wir mit der ersten Matrix an. Wir ziehen unseren Eigenwert von den Hauptdiagonalelementen ab und kommen auf die Nullmatrix:

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & 4-4 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt müssen wir möglichst viele linear unabhängige Vektoren (in diesem Fall 3) bestimmen, die von der Matrix auf 0 abgebildet werden. Der Einfachheit halber nehme ich $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Jetzt machen wir Ähnliches mit der zweiten Matrix.

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & 5-4 & 1 \\ 0 & 1 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch elementare Zeilenumformungen erzeugen wir möglichst viele Nullzeilen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da wir maximal zwei Nullzeilen erzeugen können, erwarten wir uns zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Auch hier lässt sich relativ leicht ablesen, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabängige Vektoren sind, die von der Matrix auf 0 abgebildet Werden. Diese sind Eigenvektoren. Bei der dritten Matrix machen wir fast das gleiche.

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 4 & 0 \\ 3 & 4-4 & 6 \\ 0 & -2 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da wir hier nur eine Nullzeile erzeugen können, gibt es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor zu bestimmen. Ich wähle hierfür $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Man bestimme die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte:

Die Algebraische Vielfachheite ist bei Eigenwert 4 bei allen drei Matrizen 3, da 4 eine dreifache Nullstelle des charackteristischen Polynoms ist. Die geometrischen Vielfachheiten sind 3, 2 beziehungsweise 1, da es genau so viele linear unabhänigige Eigenvektoren zum Eigenwert gibt.

12

Gegeben sei:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

a) Man bestimme das charakteristische Polynom.

$$p(\lambda) = (1-\lambda)((2-\lambda)(4-\lambda)-1)$$

b) Man bestimme die Eigenwerte von A und die Matrix D mit den Eigenwerten in der Hauptdiagonale.

Die Eigenwerte sind 1, $3+\sqrt{2}$ und $3-\sqrt{2}$. Diese werden in beliebiger Reihenfolge in einer Diagonale angeordnet. Also zum Beispiel so:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

c) Man überprüfe, dass $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind (zu welchen Eigenwerten?)

Dafür wenden wir unsere Matrix auf die Vektoren an, um zu schauen, um welchen Faktor (Eigenwert) der Vektor gestreckt wird.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist das ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Das gleiche machen wir mit den anderen Vektoren.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2\sqrt{2}+1 \\ 0 \\ -1+\sqrt{2}+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2\sqrt{2} \\ 0 \\ 3+\sqrt{2} \end{pmatrix} = (3+\sqrt{2}) * \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2\sqrt{2}+1 \\ 0 \\ -1-\sqrt{2}+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2\sqrt{2} \\ 0 \\ 3-\sqrt{2} \end{pmatrix} = (3-\sqrt{2}) * \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

13

Gegeben sei:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Wie transformiert man die Matrix A mit Hilfe der Eigenvektoren in die dazu ähnliche DiagonalMatrix?

Eine passende Diagonalmatrix D haben im vorigen Beispiel bestimmt. Für die Transformationsmatrix T benötigen wir passende Eigenvektoren, die im vorigen Beispiel auch gegeben sind. Grundsätzlich muss man Eigenvektoren nicht normieren, aber in diesem konkreten Beispiel macht es die ganze Sache einfacher. Wir werden später sehen, warum das so ist. Wenn wir die Eigenvektoren normieren (also durch deren Länge dividieren) kommen wir auf folgend Vektoren:

$$w_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; w_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}, \; w_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Jetzt haben wir drei (hässliche) normierte Eigenvektoren. Diese sind sogar orthogonal auf einander (d.h. Das Skalarprodukt zwischen zwei verschiedenen Vektoren ist 0). Als nächstes bilden wir die Transformationsmatrix T, wobei darauf zu achten ist, dass die Reihenfolge der Eigenvektoren in T mit der Reihenfolge der entsprechenden Eigenwerte in D übereinstimmt. Es gilt also:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Da die Matrix T orthogonal ist können wir sie ganz einfach invertieren, indem wir sie transponieren. Somit kommen wir auf folgende Transformation:

$D = T^{-1}AT$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

b) Man bestimme die Determinante von A.

$det(D) = 1 * (3+\sqrt{2}) * (3-\sqrt{2}) = 7$

Aus der Multiplikativität von der Determinantenfunktion folgt:

$7 = det(D) = det(T^{-1}AT) = det(T^{-1}) * det(A) * det(T) = (det(T))^{-1} * det(T) * det(A) = det(A)$

Daran erkennt man auch, dass zwei ähnliche Matrizen immer die gleiche Determinante haben.

14

Gegeben sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht sind verschiedene Normen davon. Die 1-Norm eines Vektors addiert die Beträge aller Einträge. Die Unendlichnorm nimmt vom Betrag her den größten Wert. Die 1-Norm einer Matrix, die auch Spaltensummennorm genannt wird (Eselsbrücke: Die 1 schaut wie eine Spalte aus), bestimmt man, indem man die Beträge der Einträge spaltenweise addiert und von den Summen den größten Wert bestimmt. Bei der Unendlichnorm, die auch Zeilensummennorm genannt wird (Eselsbrücke: Der liegende Achter "bildet" eine Zeile), macht man das gleiche nur Zeilenweise.

a) $||A||_1, ||A||_\infty$

$||A||_1 = max\{|2| + |1| + |3|, |-1| + |0| + |-1|, |1| + |1| + |4|\} = max\{6, 2, 6\} = 6$

$||A||_\infty = max\{|2| + |-1| + |1|, |1| + |0| + |1|, |3| + |-1| + |4|\} = max\{4, 2, 8\} = 8$

b) $||A^{-1}||_1, ||A^{-1}||_\infty$

Vorsicht: Die Normen sind NICHT multiplikativ, das heißt, es gilt NICHT im Allgemeinen $||A^{-1}|| = ||A||^{-1}$. Wir müssen also A invertieren.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$||A^{-1}||_1 = max\{\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}\} = \frac{9}{2}$

$||A^{-1}||_\infty = \frac{7}{2}$

c) $||A||_1||A^{-1}||_1$, $||A||_\infty||A^{-1}||_\infty$

Vorsicht: Die Normen sind NICHT multiplikativ, das heißt, es gilt NICHT im Allgemeinen $||AB|| = ||A|| * ||B||$.

$||A||_1||A^{-1}||_1 = 6 * \frac{9}{2} = 27$

$||A||_\infty||A^{-1}||_\infty = 8 * \frac{7}{2} = 28$

d) $||x||_1$, $||x||_\infty$

$||x||_1 = |1| + |-1| + |1| = 3$

$||x||_\infty = max\{|1|, |-1|, |1|\} = 1$

e) $||Ax||_1$,$||Ax||_\infty$

Vorsicht: Es gilt NICHT im Allgemeinen $||Ax|| = ||A|| * ||x||$.

$Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$||Ax||_1 = |4| + |2| + |8| = 14$

$||Ax||_\infty = max\{|4|, |2|, |8|\} = 8$

f) $||A||_1||x||_1$,$||A||_\infty||x||_\infty$

$||A||_1||x||_1 = 6 * 3 = 18$

$||A||_\infty||x||_\infty = 8 * 1 = 8$

15

Seien a, b, c in Gleitkommadarstellung mit 8 Stellen gegeben:

$a = 0,23371258.10^{-4}$
$b = 0,33678429.10^2$
$c = -0,33677811.10^2$

a) Man zeige, dass $(a + b) + c$ und $a + (b + c)$ nicht gleich sind.

Bei dieser Aufgabe muss man nach jeder Operation auf 8 Nachkommastellen runden. In diesem Fall gilt das Assoziativgesetz nicht.

$a + b = 0,00000023371258.10^2 + 0,33678429.10^2 = 0,33678452.10^2$
$0,33678452.10^2 - 0,33677811.10^2 = 0,641.10^{-3}$

$b + c = 0,33678429.10^2 - 0,33677811.10^2 = 0,618.10^{-3}$
$0,023371258.10^{-3} + 0,618.10^{-3} = 0,64137126.10^{-3}$

Durch die Rundungen wurden die Ergebnisse leicht gefälscht und sind deshalb nicht gleich.

b) Welches der beiden Ergebnisse ist genauer?

Das exakte Ergebnis ist $0,641371258.10^{-3}$, also ist das zweite Ergebnis genauer. Das liegt an zwei wichtigen Punkten, die das erste Ergebnis verfälschen. Erstens werden zwei "unterschiedlich große" Zahlen addiert, wodurch die kleine Zahl fast "weggerundet" wird. Danach entsteht eine Auslöschung, die den kleinen Fehler vergrößert.

16

Seien a, b, c gegeben:

$a = 0,0345,\ b = 29,\ c = 2$

a) Man bringe a, b, c in Gleitkommadarstellung mit Mantissenlänge 4.

$a = 0,345.10^{-1},\ b = 0,29.10^{2},\ c = 0,2.10^{1}$

b) Zeige, dass $(a * b) * c$ nicht gleich $a * (b * c)$ ist.

$a * b = 0,345.10^{-1} * 0,29.10^{2} = 0,1001.10^{1}$
$0,1001.10^{1} * 0,2.10^{1} = 0,2002.10^{1}$

$b * c = 0,58.10^{2}$
$0,345.10^{-1} * 0,58.10^{2} = 0,2001.10^{1}$

Da $0,2002.10^{1}$ nicht gleich $0,2001.10^{1}$ ist, gilt das Assoziativgesetz nicht.

c) Welches der beiden Ergebnisse ist genauer?

Da bei der zweiten Rechnung nicht gerundet wurde, ist das entsprechende Ergebnis exakt und somit genauer.

17

Gegeben sei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Man bsteimme für die Matrix A die bei der Gauß-Elimination auftretendenden Elementarmatrizen M_1 und M_2.

Die Elementarmatrix M_1 hat diese Gestalt:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für das obere ? dividieren wir den entsprechenden Eintrag von A durch das Diagonalelement von A in Spalte 1 und ändern das Vorzeichen. Das heißt, es ist -2/1. Analoges gilt für den unteren Eintrag.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir definieren B als:

$$B = M_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die zweite Elementarmatirx bestimmen wir so:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{32}}{b_{22}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Man bestimme damit dann die entsprechende LU-Zerlegung.

Die obere Dreiecksmatrix U wird so bestimmt:

$$U = M_2 M_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die untere Dreiecksmatrix müssen wir erst einmal die Elementarmatrizen invertieren. Das ist besonders einfach, da wir einfach die Vorzeichen der Elemente unterhalb der Hauptdiagonale ändern.

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich bestimmen wir die komplette LU-Zerlegung.

$$A = LU$$

Das machen wir so:

$$M_2 M_1 A = U \Rightarrow M_1 A = M_2^{-1} U \Rightarrow A = M_1^{-1} M_2^{-1} U \Rightarrow A = LU$$

Das heißt:

$$L = M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Unsere Lösung ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Man überprüfe:

$$M_1^{-1} = I + v_1 e_1^T$$

$$M_1^{-1} M_2^{-1} = I + v_1 e_1^T + v_2 e_2^T$$

Unser v_1 ist nichts anderes als die erste Spalte der Matrix M_1, wobei die 1 aus der Hauptdiagonale zu 0 wird und die restlichen Einträge das Vorzeichen ändern. Es gilt also:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$M_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= I + v_1 e_k^T$$

Die zweite Gleichung kann man ähnlich zeigen.

18

Gegeben sei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Man bestimme die LU-Zerlegung.

Unser erste Elementramatrix hat diese Form:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$
$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 1 \end{pmatrix}$$
$$U = M_2 M_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$
$$L = (M_2 M_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{10}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

b) Verwende die LU-Zerlegung zur Berechnung der Determinante von A.

$det(A) = det(LU) = det(L) * det(U) = 1 * 1 * 1 * 1 * (-3) * (-6) = 18$

c) Löse das lineare Gleichungssystem:

$$Ax = b \text{ mit } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit $M_2 M_1$, erhält man:

$M_2 M_1 A x = M_2 M_1 b \Rightarrow Ux = M_2 M_1 b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

Löst man das vereinfachte Gleichungssystem, erhält man:

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{11}{9} \\ \frac{14}{9} \\ -\frac{11}{18} \end{pmatrix}$$

21

"Durch" folgende Punkte soll eine Gerade gelegt werden:

$(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 3)$

a) Man stelle das (überbestimmte) dazugehörige Gleichungssystem fürdas Linear Least Squares Problem auf.

Für dieses Beispiel benötigen wir eine Vandermonde Matrix. Diese soll drei Zeilen haben, da wir drei Stützpunkte gegeben haben. Außerdem muss sie zwei Spalten haben, weil der Grad der gesuchten Polynomfunktion 1 ist und dieser um 1 niedriger sein muss als die Anzahl der Spalten. Unsere Matrix hat in der linken Spalte nur Einser und in der Rechten Spalte die x-Werte der gegebenen Stützspunkte.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Das Least Linear Square Problem schaut im Allgemeinen so aus:

$Ax \approx b$

Jetzt muss b nur noch die y-Werte der Stützpunkte annehmen und wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Man bestimme die dazugehörigen Normalgleichungen.

Man muss auf beiden Seiten nur mit A^T von links multiplizieren. Dann erhält man die Gleichung:

$A^T Ax = A^T b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

c) Man bestimme die Lösung des Linear Least Squares Problems mithilfe der Cholesky Faktorisierung.

In diesem Beispiel zerlegen wir die linke Matrix in zwei Dreiecksmatrizen, wobei man auf die andere kommt, wenn man die eine transponiert. Wir berechnen die Koeffizienten der einen Dreiecksmatirx, wobei ich B als $A^T A$ definiere:

$l_{11} = \sqrt{b_{11}} = \sqrt{3}$, $l_{21} = \frac{b_{21}}{l_{11}} = \sqrt{\frac{16}{3}}$, $l_{22} = \sqrt{b_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{\frac{14}{3}}$

Wir erhalten also:

$$B = LL^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{\frac{16}{3}} & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{\frac{16}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{pmatrix}$$

Somit können wir das Gleichungssystem lösen, wobei $c = A^T b$:

$$Bx = c \Rightarrow LL^T x = c \Rightarrow x = (L^T)^{-1} L^{-1} c$$

Führt man diese einfache aber mühsame Rechnung durch, erhält man:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{16}{14} \\ \frac{9}{14} \end{pmatrix}$$

22

Man bestimme die Householder Transformation, die im Vektor $(1, 1, 1, 1)^T$ alle Einträge bis auf den ersten annihiliert. Also wenn:

$$(I - 2\frac{vv^T}{v^T v}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Was ist dann der Wert von α und was ist der Vektor v?

Für α kann man sich das Vorzeichen aussuchen. Ich wähle das $+$, also berechnet man α so:

$$\alpha = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

Den Vektor v berechnet man so:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

23

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

a) Wieviele Housholder Transformationen benötigt man für eine QR-Faktorisierung?

Am Ende sollte eine obere Dreiecksmatrix herauskommen, das heißt, sie wird diese Form haben:

$$\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit jeder Housholdertransformation erhält man eine Spalte mit den passenden Nullen. Da wir drei Spalten haben benötigen wir (höchstens) drei Housholdertransformationen.

b) Wie sieht die erste Spalte nach der ersten Householder Transformation aus?

Da eine Housholdertransformation die Norm einer Spalte nicht ändert und die drei unteren Einträge 0 sein müssen, gibt es nur diese beiden Möglichkeiten:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

24

Gegeben sei die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

a) Wie viele Givens Rotationen benötigt man für die QR Faktorisierung von A?

Auch hier wollen wir eine obere Dreiecksmatrix erreichen. Jede Givens Rotation erzeugt einen Nuller. Da wir 6 Nuller haben wollen, benötigen wir (höchstens) 6 Givens Rotationen.

b) Wie sieht die erste Spalte nach der ersten Givens Rotation aus, wenn man an der Stelle 21 (2.Zeile, 1. Spalte) eine Null erreichen will?

Wir schnappen uns die erste Spalte und nennen sie a:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der zweite Eintrag soll 0 sein. Dazu wähle ich noch einen anderen Eintrag (z.B. a_1). Anschließend berechne ich folgende Werte:

$\alpha = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{2}$, $c = \frac{a_1}{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $s = \frac{a_2}{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Unsere Givensrotationsmatrix schaut so aus:

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wendet man diese auf den Vektor a an, erhält man:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Wie sieht die erste Spalte aus, wenn man mit Givens Rotationen unterhalb des ersten Eintrages lauter Nullwerte erzeugt?

Auch hier ändert sich die Norm der Spalte nicht und das Vorzeichen des obersten Eintrags bleibt gleich. Unser ergebnis schaut so aus:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

25

Gegeben sei der Vektor:

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man bestimme:

a) Eine Elementarmatrix, die im Vektor a die dritte Stelle zu Null transformiert.

Eine Elementarmatrix ist eine Matrix, die nur Einser auf der Hauptdiagonale hat und die Einträge in einer Spalte unterhalb der Hauptdiagonale beliebig sind. Die restlichen Einträge sind 0. Eine mögliche Lösung schaut so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Eine Householder Transformation, die im Vektor a die dritte Stelle zu Null transformiert.

$\alpha = -||a|| = -\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = -\sqrt{29}$, $v = a - \alpha e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{29} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{29} \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$v^T v = ||v||^2 = \sqrt{(2 + \sqrt{29})^2 + 3^2 + 4^2}$

$$H = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2(2+\sqrt{29})^2}{||v||^2} & -\frac{12+6\sqrt{29}}{||v||^2} & -\frac{16+8\sqrt{29}}{||v||^2} \\ -\frac{12+6\sqrt{29}}{||v||^2} & 1 - \frac{18}{||v||^2} & -\frac{24}{||v||^2} \\ -\frac{16+8\sqrt{29}}{||v||^2} & -\frac{24}{||v||^2} & 1 - \frac{32}{||v||^2} \end{pmatrix}$$

c) Eine Givensrotation, die im Vektor a die dritte Stelle zu Null transformiert.

Wir wählen als Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}, c = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+a_3^2}} = \frac{3}{5}, s = \frac{a_3}{\sqrt{a_2^2+a_3^2}} = \frac{4}{5}$$

26

a) Man bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix der Householder Transformation.

$H = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$, $v \neq 0$

Zuerst wenden wir die Matrix H auf den Vektor v an. Verwendet man die Assoziativität der Matrixmultiplikation und die Tatsache, dass $v^Tv = ||v||^2$ gilt, erhält man:

$$Hv = (I - 2\frac{vv^T}{v^Tv})v = v - 2\frac{vv^Tv}{v^Tv} = v - 2\frac{v||v||^2}{||v||^2} = v - 2v = -v$$

Wenn man also H auf den Vektor v anwendet, wird er mit dem Faktor -1 skaliert, also ist v ein Eigenvektor mit dem Eigenwert -1. Wählt man einen beliebigen Vektor $u \neq 0$, der zu v orthogonal ist (d.h. $v^Tu = 0$), erhält man:

$$Hu = (I - 2\frac{vv^T}{v^Tv})u = u - 2\frac{vv^Tu}{v^Tv} = u$$

Das heißt, u ist ein Eigenvektor mit dem Eigenwert 1. Weitere linear unabhängige Vektoren gibt es nicht.

b) Man bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix der Givens Rotation

$$G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}, c^2 + s^2 = 1$$

$$det(G - \lambda I) = det \begin{pmatrix} c - \lambda & s \\ -s & c - \lambda \end{pmatrix} = (c - \lambda)^2 + s^2 = \lambda^2 - 2c\lambda + c^2 + s^2 = \lambda^2 - 2c\lambda + 1$$

Wenn man diese Gleichung löst, erhält man:

$$\lambda_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 - 1} = c \pm \sqrt{-s^2} = c \pm si$$

Die entsprechenden Eigenvektoren sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

27

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Die SVD (Singulärwertzerlegung) is gegeben durch:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{195}} & -\frac{3}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{7}{\sqrt{195}} & 2\sqrt{\frac{2}{13}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\sqrt{\frac{5}{39}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} \\ -\frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

a) Was sind die Singulärwerte von A?

Diese lassen sie auf der Hauptdiagonale von Σ ablesen. Sie sind $\sqrt{30}$ und 2.

b) Man bestimme die Pseudoinverse von A.

Zuerste bestimmen wir die Matrix Σ^+, indem wir Σ transponieren und von den Diagonalelementen den Kehrwert bilden.

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt berechnen wir die (extrem hässliche) Pseudoinverse:

$$A^+ = V\Sigma^+U^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{195}} & \frac{7}{\sqrt{195}} & -\sqrt{\frac{5}{39}} \\ -\frac{3}{\sqrt{26}} & 2\sqrt{\frac{2}{13}} & -\frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \sqrt{\frac{2}{15}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{5}{\sqrt{26}} \\ \frac{5}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{5850}} & \frac{7}{\sqrt{5850}} & -\sqrt{\frac{5}{1170}} \\ -\frac{3}{\sqrt{104}} & \sqrt{\frac{2}{13}} & -\frac{1}{\sqrt{104}} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} \frac{11}{\sqrt{5850}} + \frac{15}{\sqrt{104}} & \frac{7}{\sqrt{5850}} - \sqrt{\frac{50}{13}} & -\sqrt{\frac{5}{1170}} + \frac{5}{\sqrt{104}} \\ \frac{55}{\sqrt{5850}} - \frac{3}{\sqrt{104}} & \frac{35}{\sqrt{5850}} + \sqrt{\frac{2}{13}} & -\sqrt{\frac{125}{1170}} - \frac{1}{\sqrt{104}} \end{pmatrix}$$

c) Bestimme die Lösung x von $Ax \approx b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ durch Anwendung der Pseudoinversen A^+.

Die Lösung erhält man, indem man A^+b berechnet.

28

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 & -0.5 \\ 0.2 & 3 & 0.5 \\ -0.4 & 0.1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Man bestimme die Gershgorin-Kreise für A.

Die Mittelpunkte der Gershgorin-Kreise sind die Elemente der Hauptdiagonale. Die Radien sind die Summe der Beträge der anderen Elemente der entsprechenden Zeile. Wir erhalten also:

$S_1 = (a_{11}, |a_{12}| + |a_{13}|) = (2, |0.1| + |-0.5|) = (2, 0.6)$
$S_2 = (a_{22}, |a_{21}| + |a_{23}|) = (3, 0.7)$
$S_3 = (5, 0.5)$

b) Man fertige eine Zeichnung oder einen Plot mit den Kreisen und den Eigenwerten an.

Hier muss man die komplexe Zahlenebene betrachten. Der erste Kreis hat den Mittelpunkt $(2, 0)$, weil der Realteil 2 und der Imaginärteil 0 ist. Der Radius ist, wie bereits berechnet, gleich 0.6. Das gleiche macht man mit den anderen Kreisen. Die Eigenwerte der Matrix sind ungefähr 5.0844, 1.9068, 3.0088. Diese müssen in den Gershgorinkreisen liegen.

31

Gegeben sei die Funktion:

$f(x) = x + e^x - 2$

Man bestimme die Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ durch die Fixpunktiteration mit Startpunkt $x_0 = 0$.

Zuerst wandle ich das Nullstellenproblem in ein Fixpunktproblem um. Dazu muss ich ein x auf eine Seite bringen. Ich wähle diese Umformungen:

$0 = x + e^x - 2 \Rightarrow -2x = -x + e^x - 2 \Rightarrow x = \frac{x - e^x + 2}{2}$

Jetzt definieren wir die Funktion g im Intervall $[0, 1]$ so:

$g(x) = \frac{x - e^x + 2}{2}$

Der kursive Abschnitt dient zur mathematischen Vervollständigung und ist nicht im Rahmen der Lehrveranstaltung notwendig.

Jetzt müssen wir überprüfen, ob die Fixpunktiteration tatsächlich funktioniert. Wenn g folgende Eigenschaften erfüllt, dann funktioniert die Fixpunktiteration auf jeden Fall.

1) g ist eine Funktion von I nach I, wobei I ein abgeschlossenes Intervall ist.
2) g ist differenzierbar.
3) Es gibt ein $\theta \in (0, 1)$, sodass $|g'(x)| \leq \theta$ für alle $x \in I$.

Überprüfen wir, ob g die passenden Eigenschaften hat. Trivialerweise ist g differenzierbar. Schauen wir uns die Ableitung an:

$|g'(x)| = |\frac{1 - e^x}{2}| = \frac{e^x - 1}{2} \leq \frac{e^1 - 1}{2} =: \theta < 1$

Somit haben wir die zweite Eigenschaft auch nachgewiesen. Es fehlt noch die erste Eigenschaft. Die Definitionsmenge ist ein abgeschlossenes Intervall, was gut ist. Wir müssen nur noch zeigen, dass $g(x) \in [0, 1]$ für alle $x \in [0, 1]$. Da die Ableitung von g negativ ist, ist g monoton fallend. Das heißt wir müssen nur noch überprüfen, ob $g(0)$ und $g(1)$ im Intervall sind. Alle anderen Funktionswerte sind dazwischen.

$g(0) = \frac{0-e^0+2}{2} = \frac{1}{2}$, $g(1) = \frac{1-e^1+2}{2} = \frac{3-e}{2}$

Beide Funktionswerte sind in $[0, 1]$*, also wissen wir, dass die Fixpunktiteration funktioniert.*

Schauen wir, was für eine Folge herauskommt, wenn man 0 in g einsetzt und das Ergebnis wieder in g einsetzt und so weiter:

0, 0.5, 0.42564, 0.44754, 0.44154, 0.44322, 0.44275, 0.44288, 0.44285...

32

Gegeben sei:

$f(x) = x + e^x - 2$

Gesucht ist die Nullstelle mithilfe des Newton-Verfahrens (Intervall $[0, 1]$, Startpunkt $x_0 = 0$).

Zuerst bestimmen wir die Ableitung von f.

$f'(x) = 1 + e^x$

Danach berechnen wir unsere Folge auf folgende Art:

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5$, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.44385$

Auch diese Folge konvergiert ungefähr gegen 0.44285. Sie schaut in etwa so aus:

0, 0.5, 0.4438516719953636, 0.4428547038297467, 0.4428544010024164, 0.4428544010023886, ...

33

Gegeben sei:

$f(x) = x + e^x - 2$

Gesucht ist die Nullstelle mithilfe des Bisektionsverfahrens.

Dieses Verfahren ist sehr einfach, um Nullstellen zu finden. Wir fangen wieder mit dem Intervall $[0, 1]$ an und setzen die Grenzen ein:

$f(0) = 0 + e^0 - 2 = -1 < 0$, $f(1) = 1 + e^1 - 2 > 0$

Als nächstes setzen wir den Mittelwert der beiden Zahlen ein:

$f(0.5) = 0.5 + e^{0.5} - 2 > 0$

Da $f(0)$ und $f(0.5)$ verschiedene Vorzeichen haben und f stetig ist, muss die Nullstelle im Intervall $[0, 0.5]$ liegen. Auf diese Weise kann man das Intervall beliebig oft halbieren und kommt auf die gesuchte Nullstelle, die die gleiche wie die Vorigen ist. Die Folge der Mittelwerte der Intervalle schaut in etwa so aus:

0.5, 0.25, 0.375, 0.4375, 0.46875, 0.45312, 0.44531, 0.44140, 0.44335, 0.44238, 0.44287, 0.44262, 0.44274, 0.44281, 0.44284, 0.44285, ...

Im Gegensatz zu den anderen beiden Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle ist das Bisektionsverfahren eher langsam, da die Prezision für jede dritte Iteration um zirka eine Nachkommastelle steigt. Beim Newtonverfahren scheinen die richtigen Nachkommastellen sich zu verdoppeln, dadurch ist es also deutlich schneller. Die Fixpunktiteration war zwar in diesem Fall schneller, aber wenn ich eine andere passende Fixpunktfunktion gewählt hätte, dann wäre wahrscheinlich etwas Schnelleres oder Langsameres herausgekommen.

34

Wir wollen eine Iterative Methode für die Wurzel aus y bestimmen. Sei also:

$f(x) = x^2 - y = 0$

Die Funktionen g_1 und g_2 stellen ein Fixpunktproblem dar. Falls $y = 3$, welche Fixpunktiteration konvergiert lokal?

a) $g_1(x) = y + x - x^2$

Setzt man $y = 3$ und bildet die Ableitung, erhält man:

$g_1'(x) = 1 - 2x$

Egal ob man $x = \sqrt{3}$ oder $x = -\sqrt{3}$ setzt. Der Betrag ist größer als 1, also spricht man von einer Divergenz.

b) $g_2(x) = -1 + x + \frac{x^2}{y}$

$g_2'(x) = 1 + \frac{2x}{3}$

Setzt man $x = -\sqrt{3}$, dann ist der Betrag der Ableitung kleiner als 1, also konvergiert g_2 lokal. Bei $x = \sqrt{3}$ ist das nicht der Fall.

c) Welche Funktion g würde die Newton-Methode für die Fixpunkt-Iteration hier angeben?

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2-y}{2x} = \frac{2x^2-x^2+y}{2x} = \frac{x^2+y}{2x}$

35

Gegeben sei:

$f(x) = x^2 - 2 = 0$

a) Bestimme mit dem Newtonverfahren zur Nullstellensuche ausgehend vom Startpunkt $x_0 = 1$ den Wert des nächstfolgenden Punktes x_1.

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2-2}{2x_0} = 1 - \frac{1-2}{2} = \frac{3}{2}$

b) Seien $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$. Gesucht ist der Punkt x_2 mithilfe der Sekantenmethode.

$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 2 - 2 * \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

36

Gegeben sei $f(x) = x^4 - \frac{7}{3}x^2$ mit den Nullstellen $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ und $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$. Zu zeigen ist, dass das Newtonverfahren nicht konvergiert, wenn man bei $x_0 = 1$ startet. Eine Skizze wird verlangt.

$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1-\frac{7}{3}}{4-\frac{14}{3}} = 1 - \frac{3-7}{12-14} = 1 - \frac{-4}{-2} = -1$

$x_2 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 + \frac{f(1)}{f'(1)} = 1$

Man sieht, dass das Verfahren zwischen den Punkten 1 und -1 wechselt, also findet keine Konvergenz statt.

37

a) Man führe für folgendes System die Newton-Iteration:

$y^2 + z^2 = 1$
$y^2 - z^2 = 0$

Zuerst bringen wir die 1 bei der ersten Gleichung auf die linke Seite.

$y^2 + z^2 - 1 = 0$

Unsere Funktion hat also diese Form:

$f(x) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 - 1 \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix}$

Jetzt konstruieren wir die Jacobi-Matrix. Dazu leiten wir beide Einträge nach y ab und schreiben sie in die linke Spalte. Danach leiten wir nach z ab und schreiben die Ergebnisse in die rechte Spalte.

$J(x) = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & -2z \end{pmatrix}$, $J^{-1}(x) = \frac{1}{-8yz}\begin{pmatrix} -2z & -2z \\ -2y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4y} & \frac{1}{4y} \\ \frac{1}{4z} & -\frac{1}{4z} \end{pmatrix}$

Die Newton-Iteration hat für $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ und $x_k = \begin{pmatrix} y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ diese Form:

$x_{k+1} = x_k - J^{-1}(x_k)f(x_k) = \begin{pmatrix} y_k \\ z_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4y_k} & \frac{1}{4y_k} \\ \frac{1}{4z_k} & -\frac{1}{4z_k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_k^2 + z_k^2 - 1 \\ y_k^2 - z_k^2 \end{pmatrix}$

b) Führe die Newton-Iteration durch mit Startpunkten (1,0), (1,1), (0.5,0.5), (-0.5,0.5)

Der Erste Startpunkt funktioniert nicht, da man nicht durch 0 dividieren kann.

Für $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Laut Octave konvergiert das Verfahren mit diesem Startpunkt nicht.

Für $x_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gilt:

$x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Laut Octave gehen beide Komponenten gegen unendlich.

Für $x_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gilt:

$x_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Laut Octave geht die erste Komponente gegen minus unendlich, während die Zweite gegen plus unendlich geht.

38

Man führe folgende Minimierungsaufgaben auf Fixpunktaufgaben zurück:

a) $\frac{x^3-x}{x^2+1}$ =min

Leitet man die linke Seite ab und setzt sie 0, dann kommt man auf:

$\frac{(3x^2-1)(x^2+1)-(x^3-x)2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 3x^4 + 2x^2 - 1 - 2x^4 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^4 + 4x^2 + x - 1 = x$

Wir erhalten also ein Fixpunktproblem mit der Funktion $f(x) = x^4 + 4x^2 + x - 1$.

b) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \min$

Multipliziert man die Matrizen miteinander, erhält man:

$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2$ =min

Nach dem Ableiten nach beiden Variablen und dem Nullsetzen der Ableitungen erhalten wir folgende Fixpunktprobleme:

$4x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow 5x_1 + 2x_2 = x_1$

$4x_2 + 2x_1 - 1 = 0 \Rightarrow 5x_2 + 2x_1 - 1 = x_2$

Das heißt, unser Fixpunktproblem schaut so aus:

$f(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 + 2x_2 \\ 5x_2 + 2x_1 - 1 \end{pmatrix}$

41

Gegeben sind folgende Stützstellen:

$t_0 = 2$, $y_0 = 3$
$t_1 = 7$, $y_1 = 2$

$t_2 = 10$, $y_2 = 4$

a) Man bestimme das Interpolationspolynom M in der monomialen Basis.

Da wir drei Stützstellen gegeben haben, benötigen wir eine 3x3-Vandermonde-Matrix, also:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{pmatrix}$$

Anschließend bilden wir folgendes Gleichungssystem:

$$Ax = y, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 10 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Löst man das Gleichungssystem, erhält man:

$$x = \begin{pmatrix} 4.92 \\ -1.18 \\ 0.11 \end{pmatrix}$$

Unser Interpolationspolynom hat die Form:

$M(t) = 4.92 - 1.18t + 0.11t^2$

b) Man bestimme die Lagrange-Polynome l_j und das Lagrange-Interpolationspolynom P.

Für das erste Lagrange-Polynom rechnet man:

$l_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} = \frac{(t-7)(t-10)}{(2-7)(2-10)} = \frac{(t-7)(t-10)}{40}$

Die anderen beiden gehen analog:

$l_1(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} = \frac{(t-2)(t-10)}{(7-2)(7-10)} = -\frac{(t-2)(t-10)}{15}$

$l_2(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)} = \frac{(t-2)(t-7)}{(10-2)(10-7)} = \frac{(t-2)(t-7)}{24}$

Unser Interpolationspolynom hat also diese Form:

$P(t) = y_0 l_0(t) + y_1 l_1(t) + y_2 l_2(t) = 3l_0(t) + 2l_1(t) + 4l_2(t)$

c) Man erstelle eine Grafik für M und für P mit den entsprechenden Stützstellen.

d) Man bestimme die Werte an den Stellen $x = 3$, 5 und 8 für M und für P.

Solange man keine Rundungsfehler einbaut, sind M und P gleich.

$M(3) = 2.37$, $M(5) = 1.75$, $M(8) = 2.45$

42

Gegeben sind folgende Stützstellen:

$t_0 = -1,\ y_0 = 0$
$t_1 = 1,\ y_1 = 2$
$t_2 = 2,\ y_2 = 4$

a) Man bestimme das Newton-Interpolationspolynom

Für das Newton-Polynom benötigt man folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & t_1 - t_0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_0 & (t_2 - t_0)(t_2 - t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Löst man $Ax = y$, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man kann die Koeffizienten vom Vektor x einfach ablesen. Unser Newton-Interpolationspolynom schaut also so aus:

$p_2(t) = x_0 + x_1(t - t_0) + x_2(t - t_0)(t - t_1) = (t + 1) + \frac{1}{3}(t + 1)(t - 1)$

b) Man erstelle dazu eine Grafik

c) Man berechne den Wert des Newton-Interpolationspolynoms an der Stelle $t = 0$.

$p_2(0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

43

Gegeben sind folgende Stützstellen:

$t_0 = -1,\ y_0 = 0$
$t_1 = 1,\ y_1 = 2$
$t_2 = 2,\ y_2 = 4$

a) Man bestimme mit dem Schema der dividierten Differenzen die Koeffizienten für das Newton-Interpolationspolynom.

Zuerst werden die dividierten Differenzen bestimmt:

$f[t_0] = f[-1] = y_0 = 0$
$f[t_1] = f[1] = 2,\ f[t_0, t_1] = \frac{f[t_1] - f[t_0]}{t_1 - t_0} = \frac{2-0}{1+1} = 1$
$f[t_2] = 4,\ f[t_1, t_2] = \frac{f[t_2] - f[t_1]}{t_2 - t_1} = 2,\ f[t_0, t_1, t_2] = \frac{f[t_1, t_2] - f[t_1, t_0]}{t_2 - t_0} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$

Somit können wir unser Polynom einfach bestimmen:

$p_2(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0) + f[t_0, t_1, t_2](t - t_0)(t - t_1) = 1(t + 1) + 1/3 * (t + 1)(t - 1) = (t + 1) + \frac{1}{3}(t + 1)(t - 1)$

b) Füge folgende weitere Stützstelle hinzu und bestimme das neue Polynom:

$t_3 = 3,\ y_3 = 2$

$f[t_3] = 2,\ f[t_2, t_3] = -2,\ f[t_1, t_2, t_3] = -2,\ f[t_0, t_1, t_2, t_3] = -\frac{7}{12}$

$p_3(t) = p_2(t) - \frac{7}{12}(t+1)(t-1)(t-2) = (t+1) + \frac{1}{3}(t+1)(t-1) - \frac{7}{12}(t+1)(t-1)(t-2)$

c) Man berechne die Werte an der Stelle $x = 0$ jeweils für die Newton-Interpolationspolynome aus Beispiel a) und b).

$p_2(0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},\ p_3(0) = p_2(0) - \frac{7}{6} = -\frac{1}{2}$

44

Gegeben ist die Funktion:

$f(t) = ln(t) - \frac{t-1}{t}$

Für die folgenden Mengen von Stützstellen, bestimme man durch Interpolation den Funktionswert an der Stelle 5.25 und vergleiche jeweils dieses Ergebnis mit dem exakten Wert. Erstellen Sie dazu auch eine graphische Darstellung.

$f(5.25) = ln(5.25) - \frac{4.25}{5.25} = 0.8487$

a)
$t_0 = 4,\ y_0 = f(t_0)$
$t_1 = 8,\ y_1 = f(t_1)$

$y_0 = f(t_0) = ln(4) - \frac{3}{4} = 0.636,\ y_1 = 1.204$

Wir verwenden das System mit den dividierten Differenzen:

$f[t_0] = 0.636$
$f[t_1] = 1.204,\ f[t_0, t_1] = \frac{0.568}{4} = 0.142$

$p_1(t) = 0.636 + 0.142(t-4)$

$p_1(5.25) = 0.636 + 0.142 * 1.25 = 0.8135$

b)
$t_0 = 4,\ y_0 = f(t_0)$
$t_1 = 8,\ y_1 = f(t_1)$
$t_2 = 10,\ y_2 = f(t_2)$

Da wir einfach nur eine Stützstelle mehr haben, können wir unseren Fortschritt von a) nutzen.

$y_2 = 1.403$

$f[t_2] = 1.403,\ f[t_1, t_2] = \frac{0.199}{2} = 0.1,\ f[t_0, t_1, t_2] = \frac{-0.042}{6} = -0.007$

$p_2(t) = 0.636 + 0.142(t-4) - 0.007(t-4)(t-8)$

$p_2(5.25) = p_1(5.25) - 0.007 * 1.25 * (-2.75) = 0.8376$ c)
$t_0 = 4$, $y_0 = f(t_0)$
$t_1 = 8$, $y_1 = f(t_1)$
$t_2 = 2$, $y_2 = f(t_2)$

Wir vergessen den Fortschritt von b) und nutzen wieder den Fortschritt von a).

$f(2) = 0.193$

$f[t_2] = 0.193$, $f[t_1, t_2] = \frac{-1.011}{-6} = 0.169$, $f[t_0, t_1, t_2] = \frac{0.027}{-2} = -0.014$

$p_2(t) = 0.636 + 0.142(t-4) - 0.014(t-4)(t-8)$

$p_2(5.25) = p_1(5.25) - 0.014 * 1.25 * (-2.75) = 0.8616$

45

Wieviele Multiplikationen werden benötigt, um den Wert des Polynoms $p(t)$ vom Grad $n-1$ an einer gegebenen Stelle t zu bestimmen, wenn das Polynom dargestellt wird in

a) Monomialer Basis

Die Darstellung eines Polynoms in der monomialen Basis schaut in etwa so aus:

$p(t) = a + bt + ct^2$

Im schlimmsten Fall sind alle koeffizienten weder 0 noch 1. Für das Berechnen des Ausdrucks at^k benötigt man k Multiplikationen. Das heißt, bei einem Polynom vom Grad $n-1$ benötigt man höchstens $1 + 2 + ... + (n-1)$ Muliplikationen, was $\frac{(n-1)n}{2}$ ergibt.

Verwendet man jedoch das Hornerschema, so kann man den multiplikativen Aufwand reduzieren:

$p(t) = (ct + b)t + a$

Hier sieht man, dass man nur zwei Multiplikationen braucht. Man kann auch leicht erkennen, dass die Anzahl der Multiplikationen gleich $n-1$ im Allgemeinen Fall ist.

b) Lagrange Basis

Ein Polynom zweiten Grades in Form der Lagrange Basis hat zum Beispiel diese Form:

$P(t) = y_0 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)} + y_1 \frac{(t-t_0)(t-t_2)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)} + y_2 \frac{(t-t_0)(t-t_1)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)}$

Allgemein hat jeder Bruch sowohl im Zähler als auch im Nenner $n-1$ Faktoren, was $2(n-1)$ Multiplikationen pro Bruch entspricht. Mit dem Koeffizenten muss man auch multiplizieren, also hat man $2n-1$. Da wir n Summanden haben, müssen wir noch mit n multiplizieren und kommen auf $2n^2 - n$ multiplikationen und n divisionen.

c) Newton Basis

Diese hat bei Grad 2 diese Form:

$p_2(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0) + f[t_0, t_1, t_2](t - t_0)(t - t_1)$

Auch hier kann man wieder erkennen, dass man $1 + 2 + ... + (n - 1)$ mal multiplizieren muss. Also erhält man als Ergebnis $\frac{(n-1)n}{2}$.

Auch hier kann man die Anzahl der Multiplikationen reduzieren, indem man so etwas Ähnliches wie das Hornerschema verwendet:

$p_2(t) = (f[t_0, t_1, t_2](t - t_1) + f[t_0, t_1])(t - t_0) + f[t_0]$

Wir kommen also wieder auf einen Wert von $n - 1$.

46

Man bestimme die Werte von a, b, c, d, e derart, dass die folgende Funktion ein kubischer Spline ist:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3 & x \in (-\infty, 1] \\ c(x-2)^2 & x \in [1, 3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3 & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Zusätzlich soll gelten:

$f(1) = 1,\ f'''(0) = 6,\ f'''(4) = 6$

Man zeichne die erhaltene Funktion.

Zuerst nutzen wir $f(1) = 1$, indem wir das in f einsetzen:

$f(1) = a(-1)^2 = a = c(-1)^2 = c = 1$

Daraus folgt, dass a und c gleich 1 sein müssen. Leiten wir den ersten Abschnitt des kubischen Splines dreimal ab und setzen 0 ein, erhalten wir:

$f'''(0) = 6b = 6$

Dadurch muss b ebenfalls 1 sein. Leiten wir den letzten Abschnitt dreimal ab und setzen 4 ein, erhalten wir:

$f'''(4) = 6e = 6$

Somit sehen wir, dass e ebenfalls 1 sein muss. Jetzt muss man d nur noch so bestimmen, dass f an der Stelle 3 wohldefiniert ist:

$f(3) = c1^2 = c = d1^3 = d$

Das heißt, alle fünf Variablen nehmen den Wert 1 an und unser f schaut so aus:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 + (x-1)^3 & x \in (-\infty, 1] \\ (x-2)^2 & x \in [1, 3] \\ (x-2)^2 + (x-3)^3 & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Jetzt überprüfen wir noch, ob f wirklich ein kubischer Spline ist, dazu schauen wir, ob f, f' und f'' an den Stellen 1 und 3 wohldefiniert sind (d.h. ob sie in beiden Intervallen an der entsprechenden Stelle den gleichen Wert annehmen):

$f(1) = (-1)^2 + 0 = (-1)^2$, $f(3) = 1^2 = 1^2 + 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-2) + 3(x-1)^2 & x \in (-\infty, 1] \\ 2(x-2) & x \in [1,3] \\ 2(x-2) + 3(x-3)^2 & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

$f'(1) = 2(-1) + 0 = 2(-1)$, $f'(3) = 2 = 2 + 0$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 + 6(x-1) & x \in (-\infty, 1] \\ 2 & x \in [1,3] \\ 2 + 6(x-3) & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

$f''(1) = 2 + 0 = 2$, $f''(3) = 2 = 2 + 0$

Also ist f ein kubischer Spline.

47

Welche Eigenschaften eines natürlichen kubischen Splines besitzt die folgende Funktion und welche nicht?

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) + (x+1)^3 & x \in (-1, 0] \\ 4 + (x-1) + (x-1)^3 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Das erste, was auffallen kann, ist, dass f in den beiden Teilintervallen kubisch ist.

Als nächstes kann man die Stetigkeit überprüfen. Nähert man sich von beiden Seiten der Stelle 0, erhält man folgende Ergebnisse:

$(0+1) + (0+1)^3 = 2$, $4 + (0-1) + (0-1)^3 = 2$

Da die Grenzwerte gleich sind, ist f stetig. Dasselbe machen wir mit den ersten beiden Ableitungen (falls sie existieren):

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 3(x+1)^2 & x \in (-1, 0] \\ 1 + 3(x-1)^2 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$1 + 3(0+1)^2 = 4$, $1 + 3(0-1)^2 = 4$

Auch in diesem Fall sind die Grenzwerte gleich, das heißt f ist stetig differenzierbar. Kommen wir zur zweiten Ableitung:

$$f''(x) = \begin{cases} 6(x+1) & x \in (-1, 0] \\ 6(x-1) & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$6(0+1) = 6$, $6(0-1) = -6$

In diesem Fall sind die beiden Grenzwerte nicht gleich, was bei Ableitungen unmöglich ist. Daher ist f nicht zweimal differenzierbar (zumindest nicht an der Stelle 0). Jetzt schauen wir uns noch die zweite Ableitung rechten Rand an und hoffen, dass diese 0 ist.

$f''(1) = 0$

Obwohl der linke Rand -1 nicht im Definitionsbereich ist, schauen wir uns die zweite Ableitung dort an, wenn man f an der Stelle -1 stetig fortsetzt:

$6(-1+1) = 0$

Zusammenfassend fehlen folgende Eigenschaften für einen natürlichen kubischen Spline: Die Existenz und stetigkeit der zweiten Ableitung und je nach Definition der linke Rand im Definitionsbereich.

51

Berechne eine Approximation des Integrals

$$\int_0^1 x^3 dx$$

nach der Mittelpunktsregel, nach der Trapezregel und nach der Simpsonregel. Vergleiche die Genauigkeit der Approximationen.

Das exakte Ergebnis des Integrals lautet:

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Für die Mittelpunktsregel nehmen wir den Funktionswert in der Mitte (an der Stelle 1/2) und multiplizieren ihn mit der Länge des Intervalls:

$M(f) = (1-0)f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

Bei der Trapezregel berechnen wir den Durchschnitt der Funktionswerte am Rand und multiplizieren ihn mit der Intervalllänge:

$T(f) = (1-0)\frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

Für die Simpsonregel muss man eine nicht ganz so einfache Formel verwenden:

$S(f) = (1-0)\frac{f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)}{6} = \frac{4(\frac{1}{2})^3+1}{6} = \frac{\frac{3}{2}}{6} = \frac{1}{4}$

Die Simpsonregel kommt in diesem Fall auf das exakte Ergebnis, während die anderen beiden eher weit davon entfernt sind.

52

Es gilt:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \pi$$

Man kann daher durch numerische Integration eine Approximation für den Wert von π berechnen. Berechne nach der Mittelpunktsregel, nach der Trapezregel und nach der Simpsonregel den Wert von π und vergleiche die Approximationen mit dem "exakten“ Wert.

Mittelpunktsregel:

$M(f) = (1-0)f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{1+\frac{1}{4}} = \frac{16}{4+1} = \frac{16}{5} = 3.2$

Trapezregel:

$T(f) = (1-0)\frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$

Simpsonregel:

$S(f) = (1-0)\frac{f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)}{6} = \frac{4+4\frac{16}{5}+2}{6} = \frac{20+64+10}{30} = \frac{94}{30} = \frac{47}{15} = 3.1333333333...$

Auch hier sieht man, dass die Simpsonregel am genausten ist.

53

Man verwende numerische Integration, um die folgende Behauptung zu überprüfen:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+10x^2}dx \approx 0.4$$

Da die Simpsonregel anscheinend am zuverlässigsten ist, verwenden wir sie für die Aufgabe.

$S(f) = (1-0)\frac{f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)}{6} = \frac{1+4\frac{2}{7}+\frac{1}{11}}{6} = \frac{77+88+7}{6*7*11} = \frac{172}{462} = 0.372294...$

54

Man berechne eine Approximation an das Integral

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2/2}dx$$

unter Verwendung der Trapezregel und unter Verwendung der Gauss Quadratur.

Trapezregel:

$T(f) = (1+1)\frac{e^{-1/2}+e^{-1/2}}{2} = 2e^{-1/2} = 1.21306...$

Für die Gauss Quadratur versuchen wir, zwei Stützstellen zu finden. Wir erhalten ein Gleichungssystem mit vier Unbekannten, wobei w_1 und w_2 die Gewichte sind und x_1 und x_2 die gesuchten Stützstellen sind. Wir erhalten also folgendes Gleichungssystem:

1: $w_1 + w_2 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$
2: $w_1x_1 + w_2x_2 = \int_{-1}^{1} xdx = 0$
3: $w_1x_1^2 + w_2x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$
4: $w_1x_1^3 + w_2x_2^3 = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0$

Da das Gleichungssystem in der Vorlesung bereits gelöst wurde, ist es nicht notwendig, dieses "erneut" zu lösen. Ich löse es aber trotzdem.

Nehmen wir einfach mal an, dass keine dieser Unbekannten gleich 0 ist. Aus der zweiten Gleichung folgt:

5: $w_2x_2 = -w_1x_1$

Setzt man das in die vierte Gleichung ein, kommt man auf:

6: $w_1x_1^3 - w_1x_1x_2^2 = 0 \Rightarrow$
7: $x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow$
8: $x_1^2 = x_2^2$

Praktischerweise müssen die Stützstellen verschieden sein. Das heißt, wir erhalten:

9: $x_2 = -x_1$

Setzt man das in die zweite Gleichung ein und dividiert durch x_1, kommt man auf:

10: $w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow$
11: $w_1 = w_2$

Durch einsetzen in die erste Gleichung kommt man auf die Ergebnisse $w_1 = 1$ und $w_2 = 1$. Diese Informationen verwenden wir für die dritte Gleichung:

12: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3}$

Mittels Verwendung von 8:

13: $2x_1^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow$
14: $x_1^2 = \frac{1}{3}$

Wir nehmen als Vorzeichen das Minus (es ist egal), dann erhalten wir $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und wegen Gleichung 9 $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Unsere Gauss Quadratur schaut so aus:

$G_2(f) = w_1f(x_1) + w_2f(x_2) = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2e^{-1/6} = 1.69296...$

55

Man verwende die Gauss-Quadratur zur Berechnung einer Approximation für das Integral

$$\int_0^1 cos(x)dx$$

durch Transformation auf das Intervall $[-1, 1]$.

Wir wollen ein t bestimmen, das von -1 bis 1 wandert, während x von 0 bis 1 wandert. Das kann man ganz einfach erreichen, indem man $t = 2x - 1$ (bzw. $x = (t+1)/2$) setzt, denn wenn $x = 0$, dann ist $t = -1$ und wenn $x = 1$, dann ist $t = 1$. Wir erhalten $\frac{dt}{dx} = t' = 2$ (bzw. $dx = \frac{dt}{2}$). Setzen wir die Sachen in das Integral ein, so erhalten wir:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} cos\left(\frac{t+1}{2}\right) dt$$

Wir verwenden $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $w_1 = 1$, $w_2 = 1$ wie im vorigen Beispiel. Als nächstes Verwenden wir einfach die Gauss Quadratur:

$G_2(f) = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) = \frac{1}{2} cos\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right) + \frac{1}{2} cos\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{2}\right) = 0.841298...$

56

Man approximiere die folgenden Integrale durch Anwendung der zusammengesetzten Trapezregel und der zusammengesetzten Simpsonregel. Vergleiche die Ergebnisse mit dem Exakten wert:

a) $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$

Berechnen wir erst einmal den exakten Wert mithilfe von Substitution. Dazu setzen wir $t = x + 1$ ($x = t - 1$) und $\frac{dt}{dx} = t' = 1$ ($dx = dt$). Während x von 0 bis 1 wandert, geht t von 1 bis 2.

$\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \int_1^2 \sqrt{t}dt = \int_1^2 t^{1/2}dt = [\frac{2}{3}t^{3/2}]_1^2 = 1.21895...$

Zusammengesetzte Trapezregel:

Wir halbieren das Intervall, wenden auf beide Teilintervalle die Trapezregel an und addieren die beiden Ergebnisse. Im Endeffekt kommt man auf diese Formel:

$Q_T(f) = \frac{(1-0)}{2}(\frac{f(0)}{2} + f(\frac{1}{2}) + \frac{f(1)}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1.2159...$

Bei der zusammengesetzten Simpsonregel halbieren wir ebenfalls das Intervall und wenden sie auf die Teilintervalle an:

$Q_S(f) = \frac{1-0}{2*6}(f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)) = 1.2189...$

In diesem Beispiel sind beide Approximationen recht genau und die zusammengesetzte Simpsonregel ist sogar noch genauer.

b) $\int_0^1 e^x dx$

Wir machen ungefähr dasselbe wie vorher.

$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1 = 1.7182818...$

$Q_T(f) = 1.75393...$

$Q_S(f) = 1.7183188...$

Gleiche Interpretation wie vorher.

57

Das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

ist ein uneigentliches Integral. Man transformiere das Integral durch $t = \sqrt{x}$ auf ein eigentliches Integral und berechne eine Approximation.

Wir verwenden die Tatsache, dass $x = t^2$ und dass $\frac{dt}{dx} = t' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (bzw. $dx = 2\sqrt{x}dt$) gilt.

$\int_0^{\pi/2} \frac{cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2cos(t^2)dt$

Ich verwende einfach sie Simpsonregel:

$S(f) \approx \frac{\sqrt{\pi/2}}{6}(2 + 7.391036 + 0) = 1.961653...$

58

Man überprüfe mittels numerischer Integration die folgende Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Grafisch gesehen sollte das Intervall $[-3, 3]$ ausreichen. Da die Funktion symmetrisch ist, bertrachte ich nur das Intervall von 0 bis 3 und verdopple das Ergebnis anschließend. Das verkleinerte Intervall teile ich in drei Intervalle auf, nämlich $[0, 1]$, $[1, 2]$ und $[2, 3]$. Anschließend kann man die zusammengesetzte Simpsonregel anwenden:

$Q_S(f) = \frac{3-0}{3*6}(f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + 2f(2) + 4f(2.5) + f(3)) = 0.166667(1 + 4 * 0.7788 + 2 * 0.367879 + 4 * 0.105399 + 2 * 0.018315 + 4 * 0.00193 + 0.000123) = 0.886171$

Verdoppelt man das Ergebnis, erhält man 1.772342..., was dem richtigen Ergebnis 1.772453... sehr nah kommt.