UE1 - Blatt 1

Wednesday, October 5, 2022 10:10 AM

1. Gegeben sind folgende Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man berechne, falls sie existieren, folgende Matrizen

(a) $A \cdot B$

(b) $B \cdot A$

(c) $A \cdot C$

(d) $A^T \cdot (C + D)$

(e) $(C + D) \cdot A$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-2)+0 & 4 \\ -2+2 & -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1-3 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$ existiert nicht

d) $A^T \cdot (C+D) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

e) $((C+D) \cdot A)^T = A^T \cdot (C+D)^T = A^T \cdot (C+D)$

$\Downarrow$ $C+D = (C+D)^T$

$\Downarrow$ aus d) $= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (C+D) \cdot A = (A^T \cdot (C+D))^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

UE1 - Blatt 2

Wednesday, October 5, 2022 12:50 PM

2. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Man berechne, falls sie existieren, folgende Ausdrücke

(a) $\vec{y}A\vec{x}$
(b) $\vec{y}^T A\vec{x}$
(c) $\vec{x}^T A\vec{y}$
(d) $\vec{x}^T(\vec{y}^T A)^T$

2)a)

$\vec{y} \cdot A \cdot \vec{x} =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+2 \\ -1+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

existiert nicht

b) $\vec{y}^T \cdot A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$

c) $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$ existiert nicht

d) $\vec{x}^T \cdot (\vec{y}^T \cdot A)^T$: $y^T \cdot A \cdot x = 4 \quad /^T$

$(y^T \cdot A \cdot x)^T = 4$

$((y^T \cdot A) \cdot x)^T = 4$

$x^T \cdot (y^T \cdot A)^T = 4$

UE1 - Blatt 3

Wednesday, October 5, 2022 3:33 PM

3. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Man überprüfe, dass $A = B \cdot C$ und bestimme die Determinanten von

(a) A, B und C
(b) A^2
(c) A^{-1}
(d) ABC
(e) $C^T C$

$B \cdot C =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix} = A$$

a) det(A):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I}\cdot 2 \\ +\mathrm{I}\cdot 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{II}\cdot 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} 4 \cdot 1 \cdot 5 = 20$$

$\det(B): \; 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\det(C): \; 4 \cdot 1 \cdot 5 = 20$

b) $\det(A) = 20 \quad \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = 20 \cdot 20 = 20^2 = 400$

c) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$

d) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(C) = 20 \cdot 20 \cdot 1 = 400$

e) $\det(C^T \cdot C) = \det(C^T) \cdot \det(C) = \det(C)^2 = 400$

$\det(C^T) = \det(C)$

UE1 - Blatt 4

Wednesday, October 5, 2022 3:57 PM

4. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Man bestimme

(a) A^{-1}

(b) B^{-1}

(c) C^{-1}

(d) $C^{-1}B^{-1}$

a) $A \mid I$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -16 & 7 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I}\cdot 2 \\ +\mathrm{II}\cdot 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II}\cdot 5 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mathrm{III}\cdot 3 \\ :5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{II}, :4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/4 & -4/20 & 3/20 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3/5 & 1/5 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{4}{20} & \frac{3}{20} \\ 4 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 2 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ 4 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 2 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

b) $B \mid I$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I}\cdot 2 \\ +\mathrm{I}\cdot 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II}\cdot 5 \end{array} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 10 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $C \mid I$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mathrm{III}\cdot 3 \\ :5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{II}, :4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{20} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

d) $C^{-1} \cdot B^{-1}$:

$A = B \cdot C \quad / \cdot C^{-1} \qquad A \cdot C^{-1} = B \cdot I \quad / \cdot B^{-1}$

$A \cdot C^{-1} \cdot B^{-1} = I \quad / \cdot A^{-1} \qquad C^{-1} \cdot B^{-1} = A^{-1}$

$$= A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ 4 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 2 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

UE1 - Blatt 5

Wednesday, October 5, 2022 4:52 PM

5. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \\ -16 & 7 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Man bestimme

(a) $B^{-1}C^{-1}$

(b) $(A^T)^{-1}$

(c) $(A^{-1})^T$

$\frac{5}{2} - \frac{6}{2}$

a) $B^{-1} \cdot C^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 10 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{20} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{6}{20} + \frac{3}{5} \\ \frac{10}{4} & \frac{10}{4} - 3 & \frac{30}{20} - \frac{9}{5} + \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$-\frac{3}{10} + \frac{6}{10}$

$\frac{30}{20} - \frac{36}{20} + \frac{4}{20}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

c) b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{20} \\ 4 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 2 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 4 & 2 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

UE1 - Blatt 6

Thursday, October 6, 2022 11:17 AM

6. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(a) Welche der Matrizen A, B, C sind orthogonal?

(b) Welche der Matrizen A, B, C sind symmetrisch?

(c) Man finde Parameter a und b so, dass die Matrix $a \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & b \end{pmatrix}$ orthogonal wird.

a) • $A \cdot A^T \overset{?}{=} E$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq E$

A ist nicht orthogonal

• $B \cdot B^T \overset{?}{=} E$ $\quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq E$

B ist nicht orthogonal

• $C \cdot C^T \overset{?}{=} E$ $\quad C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}$

C ist nicht orthogonal

b) B ist symmetrisch

c)

$a \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & b \end{pmatrix}$: $\quad \begin{pmatrix} 3a & 4a \\ 4a & ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3a & 4a \\ 4a & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 25a^2 & 12a^2 + 4ab \\ 12a^2 + 4a^2b & 16a^2 + a^2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $\quad 25a^2 = 1 \quad a = \sqrt{\frac{1}{25}} = \pm\frac{1}{5}$

2) $12a^2 + 4a^2b = 0 \quad \frac{12}{25} + \frac{4 \cdot b}{25} = 0 \quad \frac{12}{25} = -\frac{4b}{25} \Rightarrow b = -3$

3) $12a^2 + 4a^2b = 0 \quad \frac{12}{25} + \frac{-12}{25} = 0$

4 $16a^2 + a^2b^2 = 1 \quad \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$

$\underline{\underline{b = -3}} \quad \underline{\underline{a = \pm\frac{1}{5}}}$

UE1 - Blatt 7

Thursday, October 6, 2022 1:20 PM

7. Welche der folgenden Matrizen ist positiv oder negativ definit?

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) symmetrisch

$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

$\det(-4) = -4$

$\det\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 4$

$\det(A) = -4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -20$

negativ definit $- + -$

b) $\det(0) = 0 \quad \det\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -2$

$\det(B) = -\sqrt{2} \cdot \det\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \cdot 0 = 0$

$0, -, 0$

müsste + sein für pos./neg. definit $\rightarrow$ nicht definit

c) $\det(2) = 2$, $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$, $\det(C) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 1 = \underline{7}$

$+ \; + \; + \Rightarrow$ positiv definit

d) $\det(4) = 4$, $\det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8$, $\det(D) = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 = 14$

$+ \; + \; + \rightarrow$ positiv definit

UE1 - Blatt 8

Thursday, October 6, 2022 3:42 PM

8. Sei A eine reelle symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \alpha \\ -2 & 6 & -1 \\ \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Für welche Werte von α ist die Matrix positiv definit?

(b) Für $\alpha = 0$ bestimme man Eigenwerte und Eigenvektoren

(c) Man bestimme die Determinante von A

a) $\det(2) = 2$, $\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 12 - 4 = 8$, $\det(A) = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 2 \cdot 11 + 2 \cdot (-4 + \alpha) + \alpha \cdot (2 - 6\alpha)$

$\det(A) = 22 - 8 + 2\alpha + 2\alpha - 6\alpha^2$

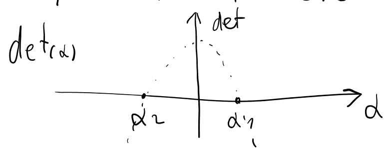
$\det(A) = -6\alpha^2 + 4\alpha + 14 > 0$

$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-6) \cdot 14}}{-12}$

$\alpha_1 = \frac{-4 - \sqrt{352}}{-12} = +1,8968$

$\alpha_2 = \frac{-4 + \sqrt{352}}{-12} = -1,2301$

Kurvendiskussion:



$\det(\alpha) = -6\alpha^2 + 4 \cdot \alpha + 14$

$\det(0) = -6 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 14 = 14$

$14 > 0$ ✓ → Für $\alpha = 0$ ist $\alpha > 0$

A ist pos. definit, wenn folgendes gilt: $\frac{-4 + \sqrt{352}}{-12} < \alpha < \frac{-4 - \sqrt{352}}{-12}$

b) $(A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$, $x \neq 0$ $\quad (A \cdot x = \lambda \cdot x)$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 \cdot (6-\lambda) - (2-\lambda) \cdot 5 = (2-\lambda) \cdot \overbrace{((2-\lambda) \cdot (6-\lambda) - 5)}^{=0}$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 7$

$(A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$

λ_1:

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -II \cdot 2 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_2 = 0$, $x_3 = -2x_1$, $x_1 = -\frac{x_3}{2}$

$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{x_3}{2} \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad x_3 \neq 0$

UE1 - Blatt 9

Friday, October 7, 2022 12:51 PM

$$\lambda_2 = 1: \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + I \cdot 2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_2 = x_3 \\ x_1 = 2x_2 = 2x_3 \end{array}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_3 \neq 0$$

$$\lambda_3 = 7: \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & -4 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -I \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -II \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -10 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x_2 = -5x_3 \\ x_1 = \frac{-4}{10} x_2 = -\frac{2}{5} x_2 \end{array}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -5x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{5} x_2 = -\frac{2}{\cancel{5}} \cdot (-\cancel{5}) \cdot x_3 \\ x_1 = 2x_3 \end{array}$$

c) siehe a) $\quad x_3 \neq 0$