

UE Einführung in Numerical Computing

Übungsblatt 2

13. Oktober 2022

Rechenbeispiele

11. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

- (a) Man bestimme das charakteristische Polynom
- (b) Man bestimme die Eigenwerte
- (c) Man bestimme algebraische und geometrische Vielfachheiten der Eigenwerte
- (d) Man bestimme Eigenvektoren für alle Eigenwerte

12. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- (a) Man bestimme das charakteristische Polynom
- (b) Man bestimme die Eigenwerte von A und die Matrix D mit den Eigenwerten in der Hauptdiagonale.

(c) Man überprüfe dass $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Eigenvektoren von A sind (zu welchen Eigenwerten?)

13. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- (a) Wie transformiert man die Matrix A mit Hilfe der Eigenvektoren in die dazu ähnliche Diagonalmatrix D.

(b) Man bestimme die Determinante von A

14. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man bestimme folgende Ausdrücke

- (a) $\|A\|_1, \|A\|_\infty$
- (b) $\|A^{-1}\|_1, \|A^{-1}\|_\infty$
- (c) $\|A\|_1\|A^{-1}\|_1, \|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$
- (d) $\|\vec{x}\|_1, \|\vec{x}\|_\infty$
- (e) $\|A\vec{x}\|_1, \|A\vec{x}\|_\infty$
- (f) $\|A\|_1\|\vec{x}\|_1, \|A\|_\infty\|\vec{x}\|_\infty$

15. Seien a, b, c in Gleitkommadarstellung mit 8 Stellen gegeben:

$$\begin{aligned} a &= 0,23371258 \cdot 10^{-4} \\ b &= 0,33678429 \cdot 10^2 \\ c &= -0,33677811 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

- (a) Man zeige, dass $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$ nicht gleich sind.
- (b) Welches der beiden Ergebnisse ist genauer?

Achtung: im Lauf der Rechnungen kann es dazu kommen, dass Sie keine reguläre Maschinenzahl erhalten, dem muss durch Rundung Rechnung getragen werden. Die Operation + muss also eigentlich durch eine geeignete Gleitpunktoperation ersetzt werden (Pseudoarithmetik)

16. Seien a, b, c gegeben:

$$\begin{aligned} a &= 0,0345 \\ b &= 29 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

- (a) Man bringe a, b, c in Gleitkommadarstellung mit Mantissenlänge 4
- (b) Zeige dass $(a \cdot b) \cdot c$ nicht gleich $a \cdot (b \cdot c)$ ist.
- (c) Welches der beiden Ergebnisse ist genauer?

Achtung: im Lauf der Rechnungen kann es dazu kommen, dass Sie keine reguläre Maschinenzahl erhalten, dem muss durch Rundung Rechnung getragen werden. Die Operation · muss also eigentlich durch eine geeignete Gleitpunktoperation ersetzt werden (Pseudoarithmetik)

17. Gegeben sei folgende Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

- (a) Man bestimme für die Matrix A die bei der Gauß-Elimination auftretenden Elementarmatrizen M_1 und M_2
- (b) Man bestimme damit dann die entsprechende LU-Zerlegung
- (c) Man überprüfe für $k = 1$ und $j = 2$ folgende Eigenschaften

$$M_k^{-1} = I + v_k e_k^T$$

$$M_k^{-1} M_j^{-1} = I + v_k e_k^T + v_j e_j^T$$

(M_k, v_k wie in der Vorlesung definiert)

18. Gegeben sei folgende Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- (a) Man bestimme die LU-Zerlegung (untere und obere Dreiecksmatrix)
- (b) Verwende die LU-Faktorisierung zur Berechnung der Determinante von A
- (c) Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (1, 0, 5)^T$

Programmierbeispiele

19. Mittelwert \bar{x} und Varianz s^2 eines Datensatzes x_1, \dots, x_n eines Datensatzes sind durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1)$$

definiert. Eine alternative Formel zur Berechnung der Varianz ist

$$s^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \bar{x}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad (2)$$

sie hat den Vorteil, dass man nur einmal über die x_i zu iterieren braucht - wenn zum Beispiel nicht der ganze Datensatz in den Speicher passt, ist das eine gute Eigenschaft.

- (a) Welche der beiden Berechnungsarten ist genauer? Vergleichen sie die beiden Formeln empirisch, indem sie mit Octave Datensätze verschiedener Größen n mit bekannter Varianz und bekanntem Mittelwert generieren¹, und die Varianz dann nach (1) und (2) berechnen.

¹Nützlich ist hier zB. die Funktion *normrnd*, die Octave zur Verfügung stellt.

- (b) Plotten sie die Abweichungen der berechneten Varianzwerte von den bekannten (richtigen) Werten und vergleichen Sie.
 - (c) Finden sie eine Erklärung für das Phänomen?
20. Schreiben sie eine Funktion, die eine obere Dreiecksmatrix U und einen Vektor b als Argumente erhält, und das Gleichungssystem $Ux = b$ mittels Rückwartssubstitution löst. Überprüfen sie ihre Ergebnisse mit Octave. Sie dürfen von korrekt dimensionierten Eingabedaten ausgehen, sollten aber signalisieren, falls sich das Gleichungssystem als unlösbar erweist.