Estatística Computacional

Plancha; 105289; CDB2
Versão 0.1

Teoria de Probabilidades

Esperiência aleatória		Processo de observação de fenómenos aleatórios
Fenómenos aleatórios		Acontecimentos não determináveis *a priori*
Espaço de resultados	Ω	Conjunto de todos os resultados possíveis
Acontecimentos	A, B, C	Conjunto de possíveis resultados de uma experiência
Resultado da experiência aleatória	ω	A realizou-se se $\omega \in A$

Álgebra dos acontecimentos

União

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$$

Intersecção

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$

Diferença

$$A - B = A \setminus B = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$$

$$\Omega - B = \overline{B} = \{\omega : \omega \in \Omega \wedge \omega \notin B\}$$

Propriedades

Comutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotência	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Lei do Complemento	$A \cup \overline{A} = \Omega$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Probabilidades (Cont)

Elemento Neutro	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap \Omega = A$
Elemento Absorvente	$A \cup A = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Leis de Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidades

a priori:

$$P[A] = \frac{n_A}{N}$$

a posteriori:

$$f_A = \frac{N_A}{N}$$

$$P[A] = \lim_{N \to \infty} f_A$$

Definições

$\overline{A}$	$\Omega - A$
$P[A]$	Probabilidade de A
n_A	Número de resultados favoráveis a A
N	Número de resultados possíveis
f_A	Frequência relativa de A
N_A	Número de vezes que A se verificou
$P[A \mid B]$	Probabilidade de A dado que B se verificou

Axiomas

$$\forall A \subseteq \Omega : 0 \leq P[A] \leq 1$$

$$P[\Omega] = 1$$

Independência/Acontecimentos mutualmente exclusivos:

$$\forall A, B \subseteq \Omega \ni A \cap B = \emptyset : P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

Teoremas

$$P[\overline{A}] = 1 - P[A]$$
$$P[\emptyset] = 0$$
$$P[B - A] = P[B] - P[A \cap B]$$
$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$
$$P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$$
$$P[A \cup B] \leq P[A] + P[B]$$
$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \quad \text{se } P[B] > 0$$
$$P[A \mid B] = 0 \quad \text{se } P[B] = 0$$

Para acontecimentos independentes:

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$
$$P[A \mid B] = P[A]$$

n partições:

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$P[A_i] > 0$$

Teorema da Probabilidade total:

$$\forall B \subseteq \Omega : P[B] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i \cap B]$$

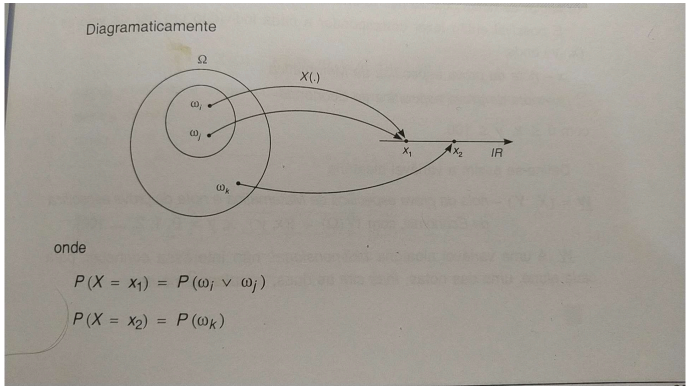
$$\forall B \subseteq \Omega : P[B] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i \mid B] \cdot P[B]$$

Fórmula de Bayes:

$$P[A_j \mid B] = \frac{P[A_j] \cdot P[B \mid A_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[A_i] \cdot P[B \mid A_i]}$$

Variáveis aleatórias

$$P[X = x] = P[A] = P[\omega \in \Omega : X(\omega) = x]$$



Variável aleatória	$X(\omega)$ ou X	Função que cada acontecimento ω associa um valor real $x = X(\omega)$
CD de uma Variável aleatória	$X(\Omega)$	

Função (massa) de probabilidade
X é discreto

$$f(x) = P[X = x]$$
$$0 \leq f(x) \leq 1$$
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1 \qquad \text{caso } n \text{ finito}$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1 \qquad \text{caso } n \text{ infinito}$$

Função densidade de probabilidade
X é contínuo, e é comum a função ser parametrizada (p.e. $f(x; \mu, \sigma^2)$), dependendo da distribuição de X

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$
$$0 \leq f(x) \leq 1$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)/; dx = 1$$
$$P[X = x] = 0 \; f(x) \neq 0$$

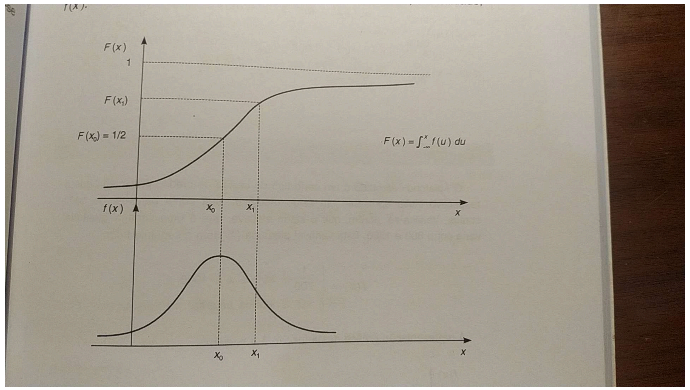
Função de distribuição (acomuldada) (f.d.p.)

A função é apenas crescente

$$F(x) = P[X \leq x]$$
$$0 \leq F(x) \leq 1$$
$$\forall x_2 > x_1 :$$
$$F(x_2) \geq F(x_1)$$
$$\wedge\, F(x_2) - F(x_1) = P[x_1 < X \leq x_2]$$
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$
$$P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1)$$

Se X for contínua:

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$
$$P[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f(u)du$$



Função de probabilidade conjunta
Se discretas

$$f(x, y) = P[X = x, Y = y] = P[X = x \cap Y = y]$$
$$0 \leq f(x, y) \leq 1$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) = 1$$
$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$
$$\lim_{x \to -\infty \wedge y \to -\infty} F(x, y) = 0$$
$$\lim_{x \to \infty \wedge y \to \infty} F(x, y) = 1$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} :$$
$$\lim_{x \to -\infty} F(x, \lambda) = \lim_{y \to -\infty} F(\lambda, y) = 0$$
$$\forall x_2 > x_1, y_2 > y_1 : F(x_2, y_2) \geq F(x_1, y_1)$$

Se contínuas

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$
$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) dv du$$

Parâmetros de v.a.s
Valor esperado
O valor esperado de X é igual à média de X.

$$E[X] = \mu_X = \mu$$

Se X for discreta:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot f(x_i)$$

Se X for contínua:

$$E[X] = \int x \cdot f(x) dx$$

Propriedades

$$E[\lambda] = \lambda$$
$$E[\lambda X] = \lambda E[X]$$
$$E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$$
$$E[XY] = E[X]E[Y] \iff \text{se } X \text{ e } Y \text{ forem independentes}$$
$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot f(x_i) \iff \text{se } X \text{ for discreta}$$
$$E[g(X)] = \int g(x) \cdot f(x)dx \iff \text{se } X \text{ for contínua}$$
$$E[X^2] = \sum_i x_i^2 \cdot f(x_i) \iff \text{se } X \text{ for discreta}$$

Variância

$$\sigma_X^2 = \sigma_X^2 = \sigma^2$$
$$\sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2]$$
$$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2$$
$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu^2$$
$$\sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) \iff \text{se } X \text{ for discreta}$$
$$\sigma_X^2 = \int (x - E[X])^2 \cdot f(x)dx \iff \text{se } X \text{ for contínua}$$
$$\mathrm{Var}(\lambda) = 0$$
$$\mathrm{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \sigma_X^2$$
$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2cov(X, Y)$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$
$$Cov(X, Y) = E[X \cdot Y] - \mu_x \cdot \mu_y$$
$$Cov(X, Y) = 0 \iff X \text{ e } Y \text{ são independentes}$$

Sendo:

$$W = \frac{X - \mu_X}{\sigma}$$

, $E(W) = 0$ e $\sigma_W^2 = 1$.

Distribuições teóricas discretas

Uniforme

$$f(x; N) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{se } x \in \{1, 2, \ldots, N\} \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

$$F(x; N) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{x}{N} & \text{se } 1 \leq x \leq N \\ 1 & \text{se } x > N \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{N + 1}{2}$$
$$\sigma_X^2 = \frac{N^2 - 1}{12}$$

Distribuição de Bernoulli

A distribuição de Bernoulli é uma distribuição binomial

$$f(x; p) = \begin{cases} 1 - p & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$f(x; p) = p^x (1 - p)^{1-x}$$

$$F(x; p) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - p & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$E[X] = p$$
$$\sigma_X^2 = p(1 - p)$$

Distribuição binomial

$$X \cap (n; p)$$

$$f(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} & \text{se } x \in \{0, 1, \ldots, N\} \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

$$F(x; n, p) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} & \text{se } 0 \leq x < n \\ 1 & \text{se } x \geq n \end{cases}$$

$$E[X] = np$$
$$\sigma_X^2 = np(1 - p)$$
$$\sum_{i=1}^{k} X_i \cap b\left(\sum_{i=1}^{k} n_i; p\right) \iff X_i \cap (n_i; p) \text{ são independentes}$$

Processo de Poisson

$$X \cap \mathrm{p}(\lambda; t)$$

$$f(x; \lambda, t) = \begin{cases} e^{-t\lambda} \frac{(t\lambda)^x}{x!} & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

$$F(x; \lambda, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ e^{-t\lambda} \sum_{i=0}^{x} \frac{(t\lambda)^i}{i!} & \text{se } 0 \leq x < \infty \\ 1 & \text{se } x \geq \infty \end{cases}$$

$$E[X] = t\lambda$$
$$\sigma_X^2 = t\lambda$$
$$\sum_{i=1}^{k} X_i \cap p\left(\sum_{i=1}^{k} t_i \lambda_i\right) \iff X_i \cap \mathrm{p}(\lambda_i, t_i) \text{ são independentes}$$

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é um processo de Poisson onde t = 1

$$X \cap \mathrm{p}(\lambda)$$

A distribuição binomial converge para a distribuição de Poisson quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, sendo $\lambda = np$ constante.

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{b}(n; p) = \mathrm{p}(\lambda = np)$$

Distribuições teóricas contínuas

Uniforme

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

$$F(x; a, b) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } x > b \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{a + b}{2}$$
$$\sigma_X^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$$

Normal

$X \cap \mathrm{n}(\mu, \sigma)$

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)^2\right)$$
$$E[X] = \mu$$
$$\sigma_X^2 = \sigma^2$$

A normal normalmente transforma-se na normal padrão, com $\mu_Z = 0$ e $\sigma_Z = 1$, onde $Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$. $F(x) -> \phi(z)$, $f(x) -> \varphi(z)$ e $F^{-1}(x) -> \phi^{-1}(z)$ (função quartil)

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$
$$P[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] = P[-1 < Z < 1] \approx 0.68$$
$$P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] = P[-2 < Z < 2] \approx 0.95$$
$$P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] = P[-3 < Z < 3] \approx 0.99$$
$$\phi^{-1}(0.95) = 1.645$$
$$\phi^{-1}(0.99) = 2.326$$

Aditividade:

$$T = \sum_{i=1}^{k} X_i \cap \mathrm{n}\left(k\mu; \sigma\sqrt{k}\right)$$
$$\iff X_i \cap \mathrm{n}(\mu, \sigma) \text{ são independentes}$$
$$T = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i \cap \mathrm{n}\left(\sum a_i \mu_i; \sqrt{\sum a_i^2 \sigma_i^2}\right)$$
$$(X_1 \pm X_2) \cap \mathrm{n}\left(\mu_1 \pm \mu_2; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$
$$X \overset{\circ}{\cap} \mathrm{n}(np; \sqrt{np(1-p)}) \iff$$
$$\iff X \cap \mathrm{b}(n, p), n \to \infty, 0.1 < p < 0.9$$
$$X \overset{\circ}{\cap} \mathrm{n}(\lambda; \sqrt{\lambda}) \iff$$
$$\iff X \cap \mathrm{p}(\lambda), \lambda \to \infty$$

Em termos práticos, $k \to \infty$ significa $k > 30$

Amostras

Amostras aleatórias

A variável aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é uma amostra aleatória de uma população se:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod (f(x_i))$$

, onde X_1 é o primeiro elemento da amostra, X_2 o segundo e X_n o n-ésimo.
Cada estatística (amostral) é uma variável aleatória

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{Média amostral}$$
$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \quad \text{Variância amostral}$$
$$S'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \quad \text{Variância amostral corrigida}$$

Teorema do limite central

$$\frac{\sum (X_i) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \overset{\circ}{\cap} \mathrm{n}(0, 1)$$
$$\sum X_i \overset{\circ}{\cap} \mathrm{n}\left(n\mu, \sigma\sqrt{n}\right)$$

Como $\frac{\sum X_i}{n} = \overline{X}$:

$$\overline{X} \overset{\circ}{\cap} \mathrm{n}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Se e apenas se:

$E[X_1] = E[X_2] = \ldots = E[X_n] = \mu$,
$\mathrm{Var}[X_1] = \mathrm{Var}[X_2] = \ldots = \mathrm{Var}[X_n] = \sigma^2$,
$n \to \infty$.

Distribuições de amostras de populações

Populações Bernoulli

$$\overline{X} \overset{\circ}{\cap} \mathrm{n}\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$
$$\left(\overline{X_1} - \overline{X_2}\right) \overset{\circ}{\cap} \mathrm{n}\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}\right)$$

Populações normais

quando σ^2 é conhecida:

$$\overline{X} \overset{\circ}{\cap} \mathrm{n}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

quando σ^2 é desconhecida:

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S'}{\sqrt{n}}} \overset{\circ}{\cap} \mathrm{t}_{n-1}$$
$$\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \overset{\circ}{\cap} \chi^2_{n-1}$$
$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \overset{\circ}{\cap} \chi^2_{n-1}$$
$$\overline{X_1} - \overline{X_2} \cap \mathrm{n}\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$
$$\overline{X_1} - \overline{X_2} \overset{\circ}{\cap} \mathrm{n}\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{S_1'^2}{n_1} + \frac{S_2'^2}{n_2}}\right)$$

temp

Heading on level 1 (section)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Heading on level 2 (subsection)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Heading on level 3 (subsubsection)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Heading on level 4 (paragraph) Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lists

Example for list (itemize)

- First itemtext
- Second itemtext
- Last itemtext
- First itemtext
- Second itemtext

Example for list (4*itemize)

- First itemtext
  - First itemtext
    - First itemtext
      - First itemtext
      - Second itemtext
    - Last itemtext
  - First itemtext
- Second itemtext

Example for list (enumerate)

1. First itemtext
2. Second itemtext
3. Last itemtext
4. First itemtext
5. Second itemtext

Example for list (4*enumerate)

1. First itemtext
   (a) First itemtext
      i. First itemtext
         A. First itemtext
         B. Second itemtext
      ii. Last itemtext
   (b) First itemtext
2. Second itemtext

Example for list (description)

First itemtext

Second itemtext

Last itemtext

First itemtext

Second itemtext

Example for list (4*description)

First itemtext

  First itemtext

    First itemtext

      First itemtext

      Second itemtext

    Last itemtext

  First itemtext

Second itemtext