> Suponha a experiência aleatória que consiste em fazer scroll, sem qualquer regra, num banco de fotos genéricas e contar quantas fotos de gatinhos vê em 5 minutos. Ou seja, considere a seguinte variável aleatória X – número de fotos de gatinhos visionadas em 5 minutos. Assuma que está em condições de considerar X como tendo distribuição de Poisson de parâmetro λ.

A função de probabilidade de X é dada por:

$$f_X(k;\lambda) = P[X=k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{1}$$

, sendo λ o número de fotos de gatinhos por $5\ \mathrm{min}$.

a)

> Construa a função de probabilidade conjunta de $(X_1, X_2, \ldots, X_{10})$.

Segundo a *regra da cadeia de probabilidade*, função de distribuição de probabilidade conjunta de 2 variáveis aleatórias X_1, X_2 é dada por:

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x,y) &= \mathrm{P}[X=x, Y=y] && (2)\\ &= \mathrm{P}[Y=y \mid X=x] \cdot \mathrm{P}[X=x] = \mathrm{P}[X=x \mid Y=y] \cdot \mathrm{P}[Y=y] && (3) \end{aligned}$$

. Esta regra é válida para qualquer número de variáveis aleatórias; ou seja:

$$p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \mathrm{P}[X_1=x_1, X_2=x_2, \ldots, X_n=x_n] \tag{4}$$

Como a amostra é composta por variáveis aleatórias independentes e $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2 \colon X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow P[X \mid Y] = P[X]$, a função de distribuição de probabilidade conjunta é dada por:

$$\begin{aligned} p_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \mathrm{P}[X_1=x_1] \times \mathrm{P}[X_2=x_2] \times \cdots \times \mathrm{P}[X_n=x_n] && (5)\\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}[X_i=x_i] && (6) \end{aligned}$$

. Logo, a função de probabilidade conjunta de $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_{10})$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \lambda) &= \prod_{i=1}^{10} \mathrm{P}[X_i = x_i] && (7)\\
&= \prod_{i=1}^{10} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} && (8)\\
&= e^{-10\lambda} \prod_{i=1}^{10} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} && (9)
\end{aligned}
$$

b)

> Se $\lambda = 3.9$, qual a probabilidade de observar a amostra (3,0,4,5,1,2,4,7,6,1)?

A probabilidade de observar a amostra $\boldsymbol{a} = (3, 0, 4, 5, 1, 2, 4, 7, 6, 1)$, sendo $\lambda = 3.9$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{a}; \lambda = 3.9) &= e^{-10 \cdot 3.9} \prod_{i=1}^{10} \frac{3.9^{a_i}}{a_i!} && (10)\\
&= e^{-39} \prod_{i=1}^{10} \frac{3.9^{a_i}}{a_i!} && (11)
\end{aligned}
$$

```r
currLambda <- 3.9
a <- c(3,0,4,5,1,2,4,7,6,1)
f <- function(x, lambda) {
  exp(-10 * lambda) * prod(lambda^x / factorial(x))
}
print(f(a, currLambda))
```

```
## [1] 1.22772e-10
```

```r
print(prod(dpois(a, lambda = currLambda)))
```

```
## [1] 1.22772e-10
```

> E se $\lambda = 4.1$?

A probabilidade de observar a amostra $\boldsymbol{a} = (3, 0, 4, 5, 1, 2, 4, 7, 6, 1)$, sendo $\lambda = 4.1$ é dada por:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{a}; \lambda = 4.1) = e^{-10 \cdot 4.1} \prod_{i=1}^{10} \frac{4.1^{a_i}}{a_i!} \tag{12}$$

$$= e^{-41} \prod_{i=1}^{10} \frac{4.1^{a_i}}{a_i!} \tag{13}$$

```r
currLambda <- 4.1
print(f(a, currLambda))
```

```
## [1] 8.65457e-11
```

```r
print(prod(dpois(a, lambda = currLambda)))
```

```
## [1] 8.65457e-11
```

c)

> Como pode interpretar (no contexto apresentado) a estatística $T_1 = \sum_{i=1}^{10} X_i$?

A estatística $T_1 = \sum_{i=1}^{10} X_i$ é a soma das 10 variáveis aleatórias X_i. Ou seja, equivale ao número total de fotos de gatinhos tiradas em 5 minutos diferentes, ou seja, em 50 minutos.

> Qual a sua distribuição?

Como a adição de variáveis aleatórias com distribuições de Poisson tem uma distribuição de Poisson também, e $X_i \cap p(\lambda)$, a distribuição de T_1 é dada por:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{10} X_i \cap p(\lambda = \sum_{i=1}^{10} \lambda) \tag{14}$$

$$\cap\, p(\lambda = 10\lambda) \tag{15}$$

d)

> Como pode interpretar (no contexto apresentado) a estatística $T_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$?

A estatística $T_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$ é a média amostral das 10 variáveis aleatórias X_i. Ou seja, equivale ao número médio de fotos de gatinhos tiradas em 5 minutos diferentes, ou seja, em 50 minutos. Com uma amostra suficiente grande, a média amostral aproxima-se da média. Logo, o valor esperado da média amostral é igual à média da distribuição.

> Qual o seu valor esperado?

Como $T_1 \cap p(10\lambda)$, e $E(X) = \lambda$,

$$E(T_2) = E(T_1) = 10\lambda \tag{16}$$