Variáveis aleatórias discretas

1. Exemplo 1 dos slides

Considere a experiência que consiste no lançamento de uma moeda equilibrada, três vezes, e registo do número de faces nos três lançamentos. Use para cada lançamento a codificação: 1 se "face", 0 se "coroa".

1. Defina teoricamente a variável aleatória de interesse.
2. A partir do espaço de resultados do lançamento da moeda três vezes, construa um dataframe que contenha uma coluna com os possíveis valores da variável e outra com as respetivas probabilidades de ocorrência.
3. Represente graficamente a função de probabilidade de X, $f(x)$.
4. Defina e represente graficamente a função de distribuição de X, $F(x)$.
5. Calcule a probabilidade de observar no máximo duas faces nos três lançamentos, recorrendo: i) apenas a $f(x)$; ii) apenas a $F(x)$
6. Calcule a probabilidade de observar entre 1 e 2 faces nos três lançamentos, recorrendo: i) apenas a $f(x)$; ii) apenas a $F(x)$
7. Calcule o valor esperado, a variância e o desvio-padrão de X.

2 Exemplo 2 dos slides

1. Definir teoricamente a variável aleatória associada à experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado de 6 faces equilibrado e registo da face saída.

2. Definir um *dataframe* com duas colunas: “X2”, que contém os valores da variável aleatória e “prob” que contém a probabilidade de ocorrência de cada um dos respetivos “x”.

3. Representar graficamente a função de probabilidade.

4. Calcule a probabilidade de obter mais de 2 pontos no lançamento de um dado, recorrendo à função de probabilidade.

5. Defina a função de Distribuição e obtenha uma representação gráfica adequada.

6. Usando a função de distribuição, calcule a probabilidade de obter mais de 2 pontos, mas não mais do que 4 em um lançamento de um dado.

7. Usando a função de distribuição, calcule a probabilidade de obter 2 ou mais pontos, mas não mais do que 4 em um lançamento de um dado.

8. Usando a fórmula de E() e Var() gerais, calcular o valor esperado e a variância.

3.

A procura diária de uma determinada peça X é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{6} \times \frac{2^x}{x!}, x = 1, 2, 3, 4$$

1. Represente graficamente a função de probabilidade de X
2. Defina a função de distribuição de X e represente-a graficamente
3. Calcule a procura diária esperada
4. Suponha que cada peça é vendida por 5 u.m. O fabricante produz diariamente 3 peças. Qualquer peça que não tenha sido vendida ao fim do dia, deve ser inutilizada provocando um prejuízo de 3 u.m. Quanto espera o fabricante ganhar em cada dia?

4.

1. Identificar o modelo teórico referente ao exercício 2 (Exemplo 2 dos slides)

2. Confirmar que os valores obtidos em 2.4 são iguais aos que se obtêm pela aplicação das fórmulas gerais de E() e Var() para o modelo em causa.

5.

1. Identifique a distribuição da variável aleatória definida em 1, X - número de faces em três lançamentos de uma moeda equilibrada.

2. Usar a função d<xxxx> conveniente para obter a função de probabilidade de X, de acordo com o modelo especificado. Verificar que coincide com o resultado anteriormente obtido.

3. Usar a função p<xxxx> conveniente para obter: i) a probabilidade de registar no máximo 2 faces nos três lançamentos; ii) a probabilidade de registar pelo menos 1 face nos três lançamentos.

6

Num teste de resposta múltipla com 4 alternativas, sobre 20 questões, qual a probabilidade de um estudante obter nota superior ou igual a 7, se responder ao acaso e as perguntas forem todas pontuadas com 1 valor?

7

Numa certa comunidade, sabe-se que a probabilidade de um indivíduo ao acaso conseguir poupar mais de 100€ por mês é de 0.15. Sabe-se ainda que os indivíduos se comportam de forma independente uns dos outros.

a. Qual a probabilidade de, em certo mês, entre 10 indivíduos escolhidos ao acaso nessa comunidade, pelo menos 5 conseguirem poupar mais de 100€?

b. E qual a probabilidade de no máximo 2 conseguirem poupar mais de 100€?

1. Defina a variável aleatória de interesse

2. Estabeleça o modelo probabilístico conveniente para este caso

3. Represente graficamente a função de probabilidade, $f(x)$

4. Escreva formalmente as probabilidades que se pretendem

5. Recorrendo à função apropriada, calcule as probabilidades pretendidas

8

Numa via de acesso a Lisboa, se a probabilidade de um painel publicitário ser visto por um automobilista for de 0.6, quantos painéis, no mínimo, deverão ser colocados nessa via para ser superior a 0.9 a probabilidade de certo automobilista ver pelo menos um desses painéis?

Pista: Estabeleça o modelo teórico genérico para este problema e obtenha a resposta por sucessivas tentativas de parametrização do modelo.

Modelo Poisson

9

O número diário de doentes com complicações cardiovasculares que chegam a certa UCI segue uma lei de Poisson de média 6 ($\lambda = 6$).

A UCI pode receber até 8 pacientes por dia. Os excedentes são encaminhados para outras unidades de saúde.

1. Qual a probabilidade de em certo dia não ser necessário encaminhar doentes para outras unidades?

2. Qual deveria ser a capacidade mínima da UCI para essa probabilidade ser pelo menos 0.9?

3. Represente graficamente a função de probabilidade e a função de distribuição em causa.

4. Qual o número mais provável de doentes a chegarem por dia aquela UCI?

6. Qual a probabilidade de, em 7 dias, existirem 2 onde o número de doentes chegados à unidade seja no máximo 3?

10

Para a decoração de uma festa, dois amigos resolveram comprar vários metros de fitas decorativas. Encontraram um fornecedor com um preço muito atraente que, no entanto, os informou que eram produtos de qualidade ligeiramente inferior, já que poderiam existir alguns defeitos nas fitas. O fornecedor disse-lhes que, em média, deveriam encontrar um defeito por cada 10 metros.

1. Que condições deverão ser verificadas para que a variável aleatória X – número de defeitos por metro de fita decorativa possa ser modelizada através de uma distribuição de Poisson e com que parâmetros

2. Admitindo que tais condições se verificam, e se eles comprarem 100 metros de fita, qual a probabilidade de registarem no máximo 5 defeitos em todo o comprimento?