> Sabe-se que nos municípios de uma certa região turística, 40% [destes municípios] mais que duplicam a população nos meses de verão.
>
> Suponha que *o consumo de água por cada turista alojado, por dia*, pode ser descrito através de uma variável aleatória $[X]$ com distribuição Normal, de média 0,50 m3 e desvio padrão 0,05 m3.

A função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com distribuição Normal é dada por:

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1}$$

Logo, a função de distribuição [comulativa] de probabilidade de $X \sim N(0.5, 0.05)$ é dada por:

$$\begin{aligned} F(x) = P\{X \leq x\} &= \int_{-\infty}^{x} f(t|\mu = 0.5, \sigma^2 = 0.05)\, dt \qquad (2) \\ &= \frac{1}{0.05\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-0.5)^2}{2(0.05)^2}\right)\, dt \qquad (3) \\ &= 20(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-0.5)^2}{0.005}\right)\, dt \qquad (4) \end{aligned}$$

, sendo x o consumo de água por turista alojado, por dia.

a)

> Qual a probabilidade do consumo, por turista e por dia, ser inferior a 0,437 m3?

Como a função é contínua,

$$P\{X < x\} = P\{X \leq x\} = F(x). \tag{5}$$

Conforme a equação (4):

$$P\{X < 0.437\} = 20(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{0.437} \exp\left(-\frac{(t-0.5)^2}{0.005}\right)\, dt \tag{6}$$

```
intF <- function(x) {
    exp(-((x - 0.5)^2) / 0.005)
}
print(20* (2 * pi)^(-1/2) * integrate(intF, lower = -Inf, upper = 0.437)$
   value)
```

```
## [1] 0.1038347
```

```
print(pnorm(0.437, mean = 0.5, sd = 0.05, lower.tail = TRUE))
```

```
## [1] 0.1038347
```

b)

> Calcule o maior consumo dos 25% menores.

Conforme a Eq. 6,

$$P\{X \leq x\} = 0.25 \tag{7}$$

$$20(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-0.5)^2}{0.005}\right) dt = 0.25 \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-0.5)^2}{0.005}\right) dt = 0.0125(2\pi)^{1/2} \tag{9}$$

```
rightVal <- 0.0125 * (2 * pi)^(1/2)
print(pracma::bisect(function(x) integrate(intF, lower = -Inf, upper = x)$
   value - rightVal, 0, 1)$root)
```

```
## [1] 0.4662755
```

```
print(qnorm(0.25, mean = 0.5, sd = 0.05, lower.tail = TRUE))
```

```
## [1] 0.4662755
```

c)

> Numa certa unidade de turismo rural casa, a capacidade é de 20 hóspedes. Considerando um momento em que a unidade está totalmente cheia, qual a probabilidade do consumo de água diário aumentar em pelo menos 10,75 m3 (quando comparado com a situação em que não existem hóspedes)?

Sendo $Y = 20X$ e G a função de distribuição de probabilidade de Y, temos que:

$$\begin{aligned} G(x) &= P\{Y \leq x\} && (10) \\ &= P\{20X \leq x\} && (11) \\ &= P\{X \leq \frac{x}{20}\} && (12) \\ &= F\left(\frac{x}{20}\right) && (13) \end{aligned}$$

Conforme a Eq. 6,

$$\begin{aligned} P\{X > \frac{10.75}{20}\} &= 1 - P\{X \leq 0.5375\} && (14) \\ &= 1 - \left(20(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{0.5375} \exp\left(-\frac{(t-0.5)^2}{0.005}\right) dt\right) && (15) \end{aligned}$$

```
print(1 - 20 * (2 * pi)^(-1/2) * integrate(intF, lower = -Inf, upper =
    10.75/20)$value)
```

```
## [1] 0.2266274
```

```
print(1 - pnorm(10.75/20, mean = 0.5, sd = 0.05, lower.tail = TRUE))
```

```
## [1] 0.2266274
```