Variáveis aleatórias bi e multidimensionais

- Uma variável aleatória diz-se bidimensional se o seu suporte for $\mathbb{R}^2$

- Por exemplo

  - (X_1, X_2), onde X_1é o curso de um aluno e X_2 o ano curricular em que está formalmente inscrito
    - Neste exemplo, observar características diferentes num mesmo objeto

  - (X_1, X_2), onde X_1 e X_2 são as notas a uma certa UC de dois alunos escolhidos ao acaso
    - Neste exemplo, observar uma mesma característica em dois objetos

- Genericamente, uma variável aleatória diz-se multidimensional se o seu suporte for $\mathbb{R}^n$

  - Ou seja, em vez de registarmos apenas dois valores, como acima, registamos vários

Variáveis aleatórias bidimensionais

Discretas

Função de probabilidade conjunta, f(x,y) = P[X=x , Y=y]

Propriedades:

$$0 \leq f\left(x_i , y_j\right) \leq 1$$

$$\sum_{x_i}\sum_{y_j} f\left(x_i , y_j\right) = 1$$

Contínuas

Função densidade de probabilidade conjunta, $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$

Propriedades:

$$f(x,y) \geq 0$$

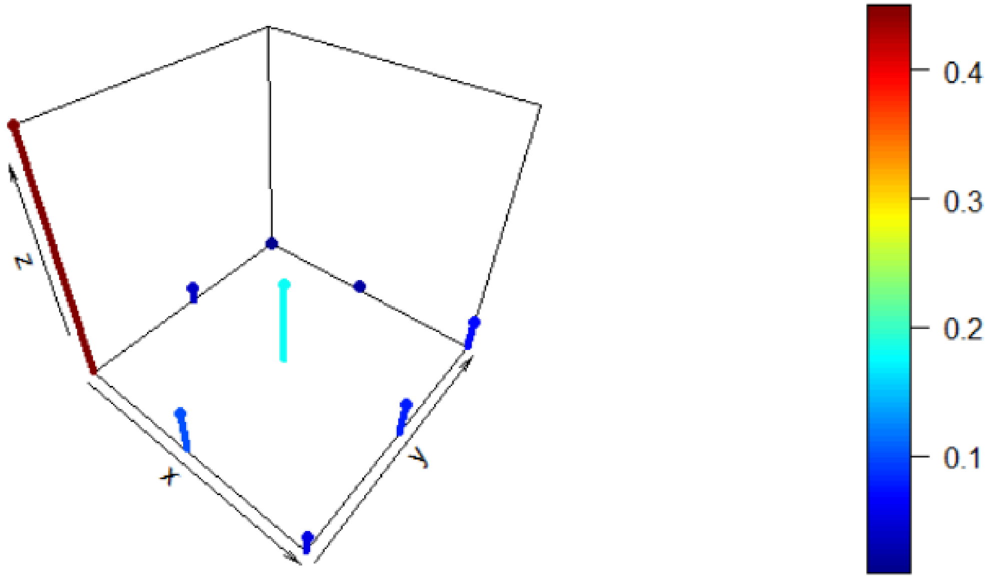
$$\int_{Dx}\int_{Dy} f(x,y)\, dy\, dx = 1$$

Função de distribuição, $F(x,y) = P\left[X \leq x ; Y \leq y\right]$

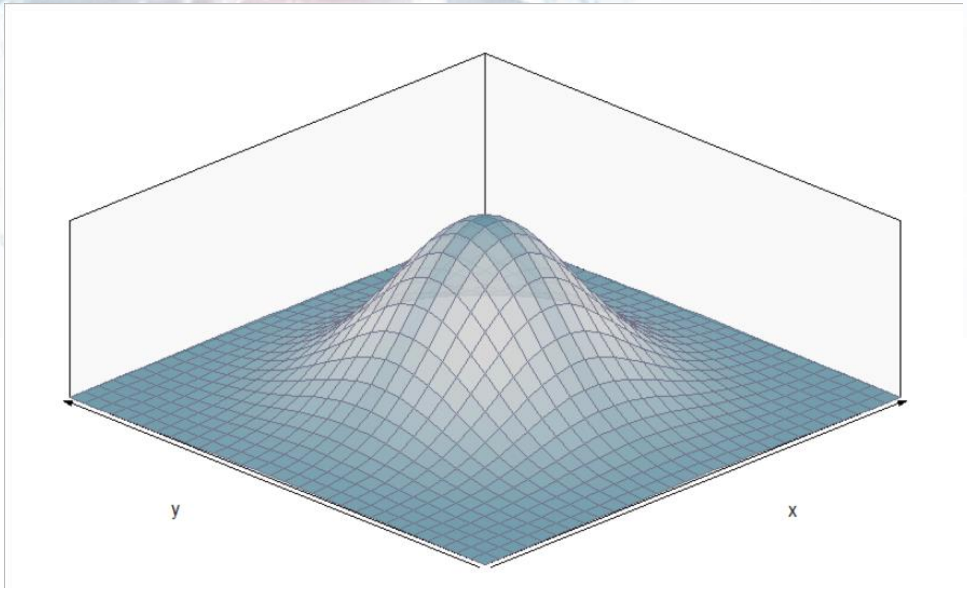
Exemplos

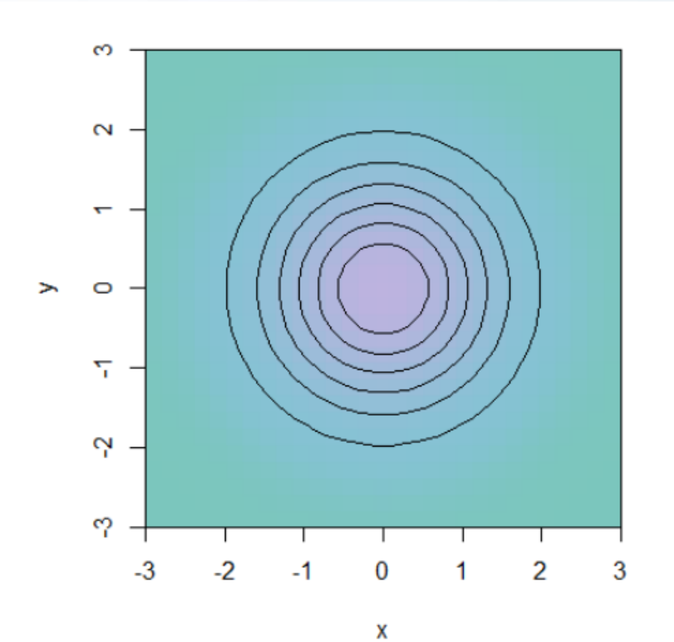
Variável discreta bivariada: função de probabilidade **conjunta**

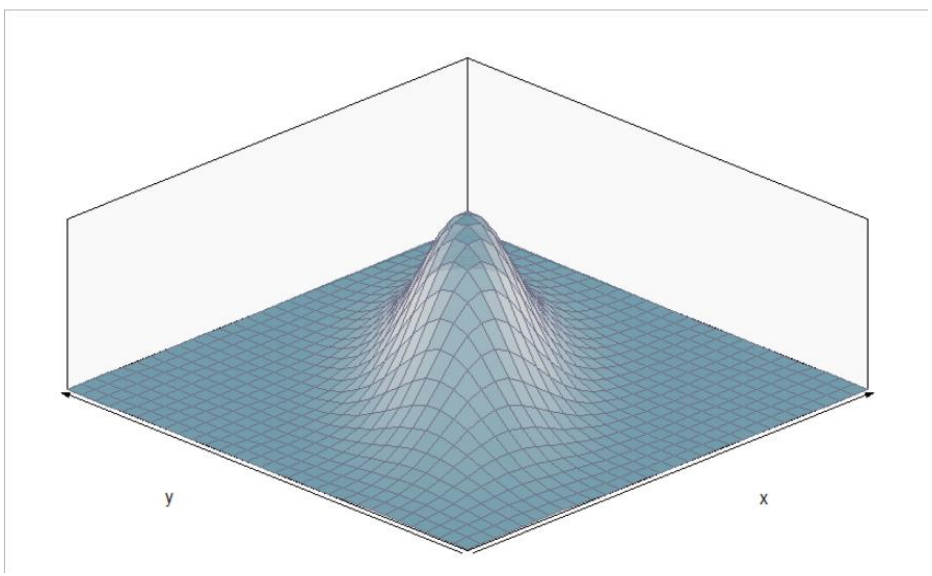
A \ B	0	1	2	
0	0,45	0,04	0,01	
1	0,10	0,18	0,02	
2	0,05	0,08	0,07	
				1,00

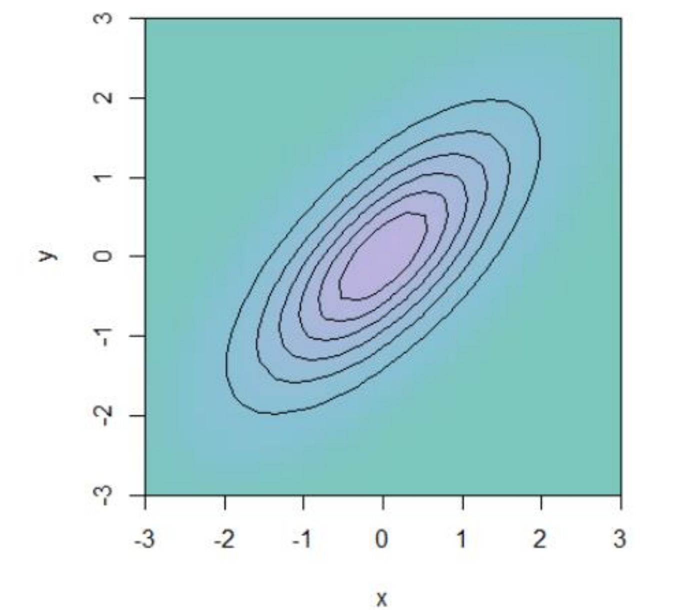


Exemplos de f.d.p de Normal bivariada









Propriedades da função distribuição

$$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0, \forall y \text{ fixo}$$

$$\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0\,, \forall x \text{ fixo}$$

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$$

$$0 \leq F(x, y) \leq 1$$

$$\forall x_2 > x_1, \forall y_2 > y_1, F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$$

Funções marginais

Discretas

Função de probabilidade marginal,

Em ordem a X: $f_X(x) = \sum_y f(x,y)$

Em ordem a Y: $f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$

Contínuas

Função densidade de probabilidade marginal,

Em ordem a X: $f_X(x) = \int_{Dy} f(x,y)dy$

Em ordem a Y: $f_Y(y) = \int_{Dx} f(x,y)dx$

Exemplos

Variável discreta bivariada: funções de probabilidade marginais

X \ Y	0	1	2	$f_X(x)$
0	0,45	0,04	0,01	
1	0,10	0,18	0,02	
2	0,05	0,08	0,07	
$f_Y(y)$				1,00

$E[X]$

$E[Y]$

$E[XY]$

Funções condicionadas

Discretas

Função de probabilidade de X, condicionada a Y=y

$$f_{X|Y=y}(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f(x,y)}{\sum_x f(x,y)}$$

Contínuas

Função densidade de probabilidade de X, condicionada a Y=y

$$f_{X|Y=y}(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f(x,y)}{\int_{Dx} f(x,y)\,dx}$$

Independência de v.a.'s

- Duas variáveis aleatórias, X e Y, serão **independentes** se se verificar

$$f(x,y) = f_X(x)\ f_Y(y)$$

Ou seja, se a função (densidade) de probabilidade conjunta for igual ao produto das funções (densidade) de probabilidade marginais, para todos os pares (x,y).

Note-se que: se as variáveis forem discretas, f() representa a função de probabilidade; se forem contínuas, f() representa a função densidade de probabilidade

Propriedades do valor esperado

- Sendo X e Y duas v.a's e k, a e b constantes reais,
  - E[k] = k
  - E[k X] = k E[X]
  - E[X + Y] = E[X] + E[Y]
  - Destas propriedades resulta que
    E[aX + bY] = a E[X] + b E[Y]

    ou seja, E[.] é um operador linear
  - Se X e Y forem independentes, E[XY] = E[X] E[Y]
    com

$$E[XY] = \begin{cases} \sum_{x} \sum_{y} x\, y\, f(x,y) & \text{se v.a's discretas} \\ \int_{Dx} \int_{Dy} x\, y\, f(x,y)\, dy\, dx & \text{se v.a's contínuas} \end{cases}$$

Covariância

⇨É uma medida da distribuição conjunta de X e Y, em termos dos desvios face às respetivas médias

$$\boxed{\begin{array}{c} Cov(X,Y) = E[\ (X-E[X])\ (Y-E[Y])\ ] \\ \Leftrightarrow \\ Cov(X,Y) = E[\ XY\ ] - E[X]\ E[Y] \end{array}}$$

⇨ Descreve a relação linear ou ligação entre duas variáveis

⇨ Para tornar esta medida independente das unidades de medida em que as variáveis estão expressas, calcula-se o coeficiente de correlação linear

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Correlação

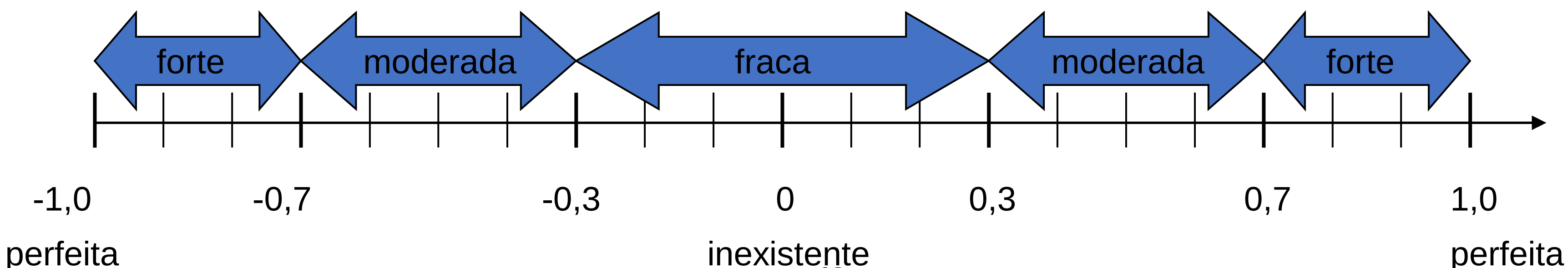
$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

⇨ ρ varia entre –1 e 1

⇨ Valores próximos de 0 revelam a não existência de relacionamento linear entre as variáveis

⇨ Valores próximos de 1 indicam um relacionamento linear forte no sentido direto (quando X aumenta, Y aumenta)

⇨ Valores próximos de -1 indicam um relacionamento linear forte no sentido inverso (quando X aumenta, Y diminui)



NOTA: valores indicativos; por exemplo, há quem assuma 0,6 em vez de 0,7 para limiar de forte

Propriedades da variância e da covariância

- $Var(k) = 0$
- $Var(kX) = k^2 \, var(X)$
- $Var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2 \, cov(X,Y)$
- $Var(X-Y) = var(X) + var(Y) - 2 \, cov(X,Y)$
- $Cov(aX, bY) = a \, b \, Cov(X,Y)$
- Se X e Y forem independentes, então $Cov(X,Y) = 0$
  (a recíproca não é verdadeira)
- Se X é uma v.a. de média μ e variância σ^2
  então a v.a. $W = (X - \mu)/\sigma$ tem parâmetros $E[W] = 0$ e $Var(W)=1$