a)

TODO enunciado

a função massa de probabilidade de uma distribuição de Bernoulli é dada por:

$$f(x;p) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1 \\ 1-p & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Como a variável aleatória $X \sim \mathrm{B}(1,p)$, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathrm{B}(n,p) \tag{2}$$

, sendo que $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis independentes e identicamente distribuídas num *processo de Bernoulli*.

Logo a minha função de probabilidade conjunta de $(X_1, \ldots, X_n)$ é dada por:

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = f(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{3}$$

, sendo

- p a probabilidade de sucesso (neste caso a probabilidade de uma foto ter gatinhos),
- $q = 1 - p$,
- $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \{0,1\}$,
- $k = \sum x_n$.

Logo, se $n = 10$, a nossa função de probabilidade conjunta $\mathbf{g} : \{0,1\}^{10} \longrightarrow [0,1]$ é dada por:

$$g\left(\boldsymbol{x};p\right) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k} \mid k = \sum_{i=1}^{10} x_i, \tag{4}$$

b)

TODO enunciado

Conforme a Eq. 4, a probabilidade de observar a amostra $(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0)$, se $p=0.1$, é dada por:

$$g\left(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0;p=0.1\right)=\binom{10}{2}0.1^2(1-0.1)^{10-2}=0.194 \tag{5}$$

. Da mesma forma, a probabilidade de observar a amostra $(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0)$, se $p=0.2$, é dada por:

$$g\left(1,0,1,0,0,0,0,0,0,0;p=0.2\right)=\binom{10}{2}0.2^2(1-0.2)^{10-2}=0.302 \tag{6}$$

c)

TODO enunciado

$T_1=\sum_{i=1}^{10}X_i$ representa o número de gatinhos numa amostra de 10 fotos $X_1,\ldots,X_{10}$, sendo que $X_i\sim\mathrm{B}(1,p)$. Logo, T_1 é uma variável aleatória com distribuição binomial, com $n=10$ e parâmetro de probabilidade de sucesso p.

O valor esperado em uma tentativa de Bernoulli é dado por:

$$E[X]=p \tag{7}$$

, sendo p a probabilidade de sucesso. Logo, o valor esperado de T_1 é dado por:

$$E[T_1]=E\left[\sum_{i=1}^{10}X_i\right]=10p \tag{8}$$

. Isto é de esperar porque o processo de Bernoulli é uma distribuição binomial, logo $T_1\sim\mathrm{B}(10,p)$.

d)

TODO enunciado

$T_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$ representa a proporção de gatinhos numa amostra de 10 fotos $X_1, \ldots, X_{10}$, sendo que $X_i \sim \mathrm{B}(1, p)$. Ou seja, T_2 indica a probabilidade de, ao escolher uma foto ao acaso de tal amostra, essa foto ter um gatinho ira ter probabilidade T_2. Com uma amostra suficientemente grande, esta probabilidade aproxima-se da probabilidade de sucesso p.

O valor esperado de T_2 é dado por:

$$E[T_2] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}\right] = \frac{10p}{10} = p \tag{9}$$