

Suponha a experiência aleatória que consiste em fazer scroll, sem qualquer regra, num banco de fotos genéricas e contar quantas fotos de gatinhos vê em 5 minutos. Ou seja, considere a seguinte variável aleatória  $X$  – número de fotos de gatinhos visionadas em 5 minutos. Assuma que está em condições de considerar  $X$  como tendo distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ .

A função de probabilidade de  $X$  é dada por:

$$f_X(k; \lambda) = P[X = k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (1)$$

, sendo  $\lambda$  o número de fotos de gatinhos por 5 min.

**a)**

Construa a função de probabilidade conjunta de  $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$ .

Segundo a *regra da cadeia de probabilidade*, função de distribuição de probabilidade conjunta de 2 variáveis aleatórias  $X_1, X_2$  é dada por:

$$p_{X,Y}(x, y) = P[X = x, Y = y] \quad (2)$$

$$= P[Y = y | X = x] \cdot P[X = x] = P[X = x | Y = y] \cdot P[Y = y] \quad (3)$$

. Esta regra é válida para qualquer número de variáveis aleatórias; ou seja:

$$p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] \quad (4)$$

Como a amostra é composta por variáveis aleatórias independentes e  $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2: X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow P[X | Y] = P[X]$ , a função de distribuição de probabilidade conjunta é dada por:

$$p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P[X_1 = x_1] \times P[X_2 = x_2] \times \dots \times P[X_n = x_n] \quad (5)$$

$$= \prod_{i=1}^n P[X_i = x_i] \quad (6)$$

. Logo, a função de probabilidade conjunta de  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{10})$  é dada por:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \lambda) = \prod_{i=1}^{10} P[X_i = x_i] \quad (7)$$

$$= \prod_{i=1}^{10} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \quad (8)$$

$$= e^{-10\lambda} \prod_{i=1}^{10} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \quad (9)$$

**b)**

Se  $\lambda = 3.9$ , qual a probabilidade de observar a amostra (3,0,4,5,1,2,4,7,6,1)?

A probabilidade de observar a amostra  $\mathbf{a} = (3, 0, 4, 5, 1, 2, 4, 7, 6, 1)$ , sendo  $\lambda = 3.9$  é dada por:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}; \lambda = 3.9) = e^{-10 \cdot 3.9} \prod_{i=1}^{10} \frac{3.9^{a_i}}{a_i!} \quad (10)$$

$$= e^{-39} \prod_{i=1}^{10} \frac{3.9^{a_i}}{a_i!} \quad (11)$$

```
currLambda <- 3.9
a <- c(3,0,4,5,1,2,4,7,6,1)
f <- function(x, lambda) {
  exp(-10 * lambda) * prod(lambda^x / factorial(x))
}
print(f(a, currLambda))
```

```
## [1] 1.22772e-10
```

```
print(prod(dpois(a, lambda = currLambda)))
```

```
## [1] 1.22772e-10
```

E se  $\lambda = 4.1$ ?

A probabilidade de observar a amostra  $\mathbf{a} = (3, 0, 4, 5, 1, 2, 4, 7, 6, 1)$ , sendo  $\lambda = 4.1$  é dada por:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{a}; \lambda = 4.1) = e^{-10 \cdot 4.1} \prod_{i=1}^{10} \frac{4.1^{a_i}}{a_i!} \quad (12)$$

$$= e^{-41} \prod_{i=1}^{10} \frac{4.1^{a_i}}{a_i!} \quad (13)$$

```
currLambda <- 4.1
print(f(a, currLambda))
```

```
## [1] 8.65457e-11
```

```
print(prod(dpois(a, lambda = currLambda)))
```

```
## [1] 8.65457e-11
```

**c)**

Como pode interpretar (no contexto apresentado) a estatística  $T_1 = \sum_{i=1}^{10} X_i$ ?

A estatística  $T_1 = \sum_{i=1}^{10} X_i$  é a soma das 10 variáveis aleatórias  $X_i$ . Ou seja, equivale ao número total de fotos de gatinhos tiradas em 5 minutos diferentes, ou seja, em 50 minutos.

Qual a sua distribuição?

Como as distribuições de Poisson são aditivas, e  $X_i \cap p(\lambda)$ , a distribuição de  $T_1$  é dada por:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{10} X_i \cap p(\lambda = \sum_{i=1}^{10} \lambda) \quad (14)$$

$$\cap p(\lambda = 10\lambda) \quad (15)$$

**d)**

Como pode interpretar (no contexto apresentado) a estatística  $T_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$ ?

A estatística  $T_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$  é a média amostral das 10 variáveis aleatórias  $X_i$ . Ou seja, equivale ao número médio de fotos de gatinhos tiradas em 5 minutos diferentes, ou seja, em 50 minutos. Com uma amostra suficiente grande, a média amostral aproxima-se da média. Logo, o valor esperado da média amostral é igual à média da distribuição.

Qual o seu valor esperado?

Como  $T_1 \sim p(10\lambda)$ , e  $E(X) = \lambda$ ,

$$E(T_2) = E(T_1) = 10\lambda \quad (16)$$