

Probabilistic Numerics

Federico Zertuche, UTA

17 de septiembre de 2017

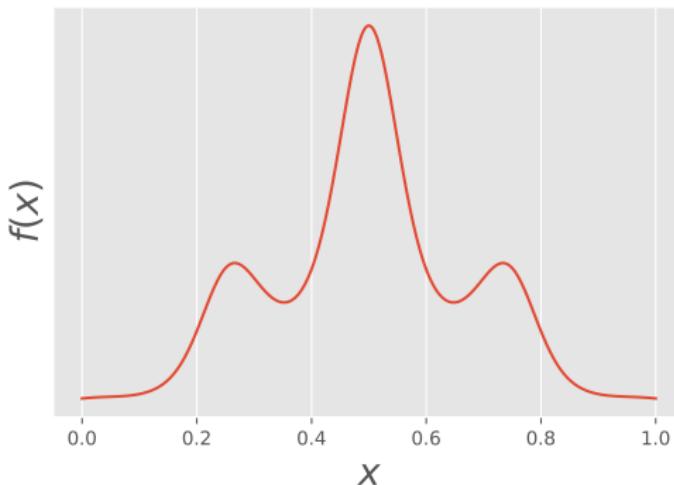
Un problema - de [Henning, Girolami, RSPA 2015]

$$f(x) = e^{\sin^2(3x) - x^2}$$

Problema:

Calcular

$$F = \int_0^1 e^{\sin^2(3x) - x^2} dx$$



Un problema - de estimación

- ▶ No tengo una fórmula para F .
- ▶ Puedo evaluar $f(x)$.

Estimar:

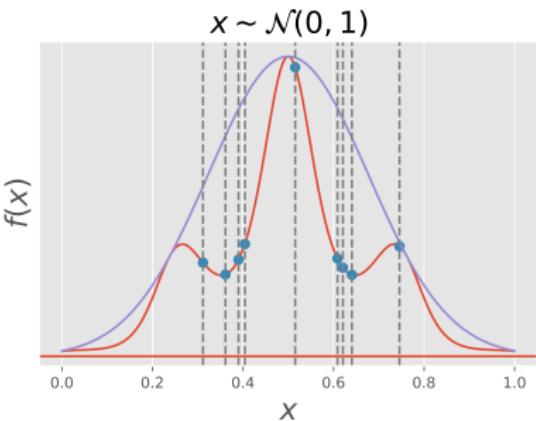
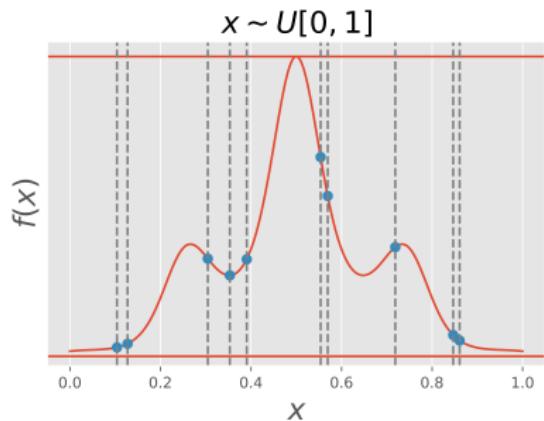
$$F = \int_0^1 e^{\sin^2(3x) - x^2} dx$$

Usando:

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$$

Un problema - de muestras aleatorias?

$$\tilde{F} \propto \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x) \text{ (casi)}$$



Un problema - de estructura

En realidad:

1. Puedo evaluar $f(x)$.
2. Se que f es continua.

Voy a asumir:

$$f \sim \mathcal{GP}(m(x), k(x, x')) .$$

Como \int es lineal:

$$F = \int f \sim \mathcal{N}\left(m_f, k_{ff}\right)$$

donde

$$\begin{aligned} m_f(x) &= \int m dx \\ k_{ff} &= \int \int k dx dx' . \end{aligned}$$

Un problema - de estructura

Tengo una descripción formal de como es - mas o menos - F . La incertidumbre que tengo sobre f se propaga a su integral:

Sería cool tener la distribución de $F|f(x)$.

$$F | f(x) \sim \mathcal{N} \left(m_{F|f(x)}(x, f(x)), k_{F|f(x)}(x) \right)$$

donde

$$m_{F|f(x)}(x, f(x)) := k_f(x)k(x, x)^{-1}f(x)$$

$$k_{F|f(x)}(x) := k_f(x) - k_f(x)k(x, x)^{-1}k_f(x)$$

Un problema - de uso

Cuál es mi estimación de F ?

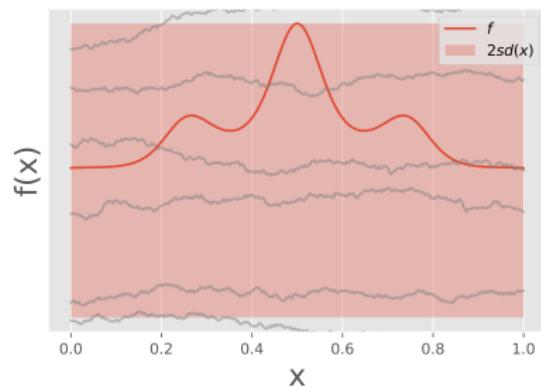
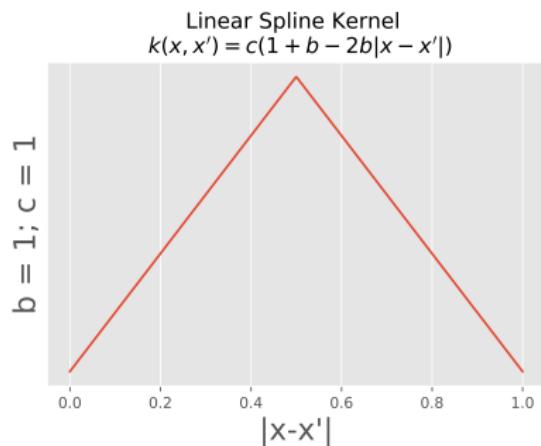
Qué tal $m_{F|f(x)}(x, f(x))$?

Dónde les gustaría evaluar f ?

Qué tal en el lugar donde $k_{F|f(x)}(x)$ es grande?

Un problema - de uso

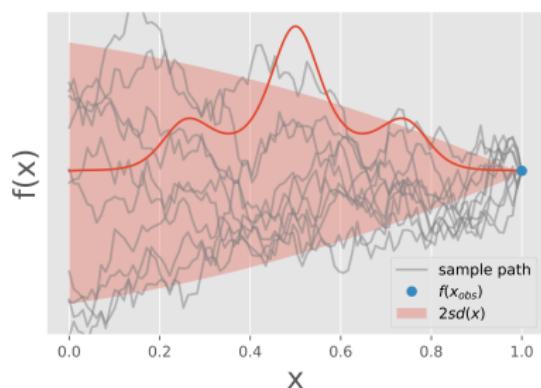
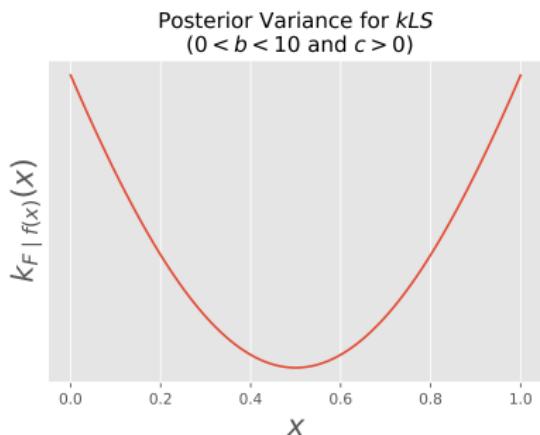
Un modelo para f :



Un problema - de uso

Una evaluación de f :

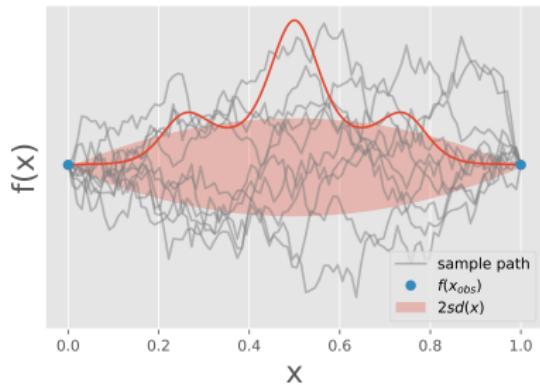
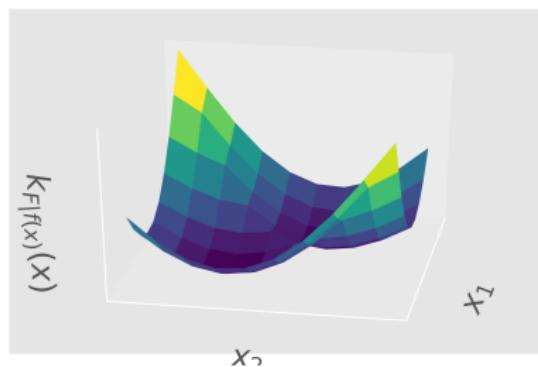
$$\underset{x}{\text{maximize}} \quad k_{F|f(x)}(x)$$



Un problema - de uso

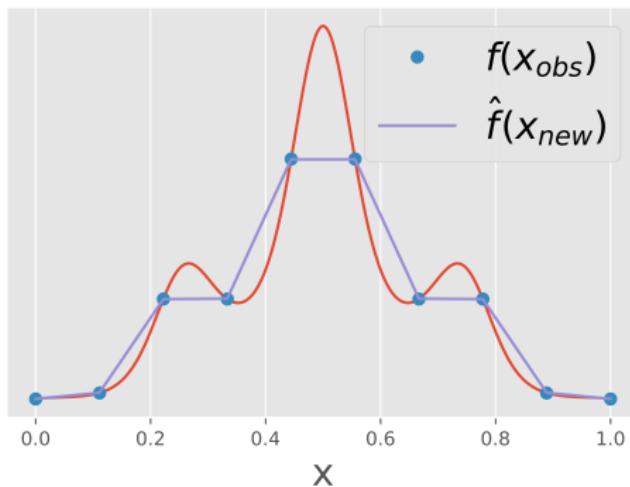
Dos evaluaciones de f :

$$\underset{x}{\text{maximize}} \quad k_{F|f(x_1), f(x_2)}(x_1, x_2)$$



Un problema - de trapazoides

Qué tengo al final? El método del trapezoide!



Proba Numerics

Modela incertidumbre numérica que se propaga.

1. Produce medidas de proba sobre todas las incógnitas.
2. La estructura en los errores puede ser propagada a otras operaciones posteriores.
3. Usar stats para determinar puntos importantes (alocación de recursos).
4. Nueva perspectiva para diseñar algoritmos.

Proba Numerics - Fluidos

Simular un fluido:

1. Escoger una equation.
2. Escoger el valor de algunos parámetros.
3. Decidir cuál método numérico usar.
4. Calcular la sol numérica

Qué tan seguros de la solución estamos? (No mucho)

Proba Numerics - Fluidos[Chkrebtii, Bayesian Analysis 2016]

1258

Bayesian Solution Uncertainty Quantification

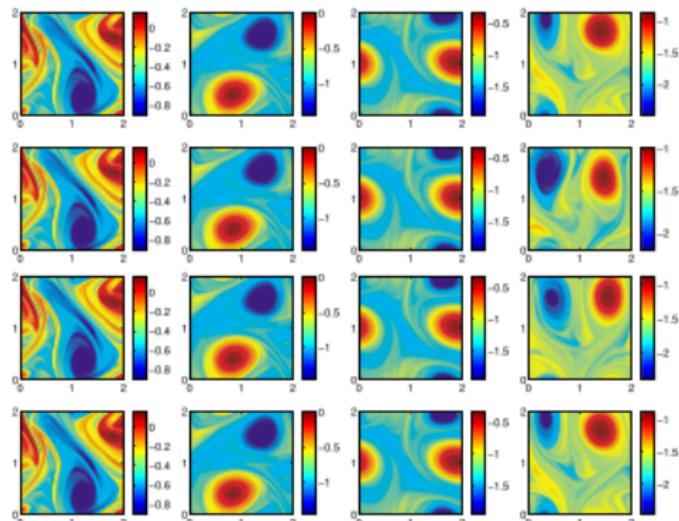


Figure 7: Time evolution of four forward simulated realizations (along rows) of fluid vorticity, governed by the forced Navier–Stokes model (18), over two spatial dimensions: the angle of the inner ring (horizontal axis) and outer ring (vertical axis) of a two dimensional torus. Angles are expressed in radians. Vorticities are evaluated at times $t = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ units (along columns).

Probabilidades

Marco cuantitativo para la inferencia científica.

Describe incertidumbre en experimentos

PERO TAMBIEN

sirve para cuantificar incertidumbre *epistémica*.

Gracias!

