SCNUSoS

《概率论与数理统计》讲义

Evan Gao

大二上

🚒🔥

Made with XƎLATEX

(And Love)

evan@notch1p.xyz

Contents

Chapter 1

随机事件及其概率

1.1 随机事件

Definition 1.1.1: Sample Space

考虑样本空间集合 S, 我们有 $S := \{\text{所有样本点}\}$.

由定义, 我们可以得到几种特殊的样本空间：

Example 1.1.1 (特殊的样本空间)

- $\varnothing$ 事件：不可能发生的事件.
- $S - \varnothing$ 发生的事件.
- 基本事件 ω : $|\omega| = 1$ i.e. 基本事件只含有一个样本点.

Note

由于 $\varnothing$ 事件和 $S - \varnothing$ 事件是互为对偶的, 我们可以得到**对偶律 (De Morgan)**：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Definition 1.1.2: 和、积事件

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ happen} \iff \exists i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ happen} \iff \forall i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

1.2 频率

Definition 1.2.1: 频率

考虑事件 A, 其发生的**频率**是

$$f_n(A) := \frac{r_n(A)}{n} \in [0,1]$$

其中频数 $\frac{r_n(A)}{n} \in [0,n]$. 显然有 $f_n(S)=1$.

Corollary 1.2.1 有限可加性

若 $A_i \cap A_j = \varnothing$ 且 $i \neq j,\ i,j \in [1,k]$ i.e. 互斥事件

则有

$$f_n(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

1.3 概率

Definition 1.3.1: 概率

（Kolmogorov 公理化定义）设有随机试验 E 且与之对应的样本空间 S, 考虑事件 A

$$\text{for } \forall A \in E, \text{if}$$

① $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

② $P(S) = 1$

③ $\Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A_i\}$ i.e. **可列可加性**

则称 P 为 S 上的概率.

1.3.1 概率的性质

由上面的定义我们能够得到概率的性质：

1. $\Pr\{\varnothing\} = 0$
2. $\Pr\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{A_i\}$
   $\iff \forall i,j(i \neq j \to A_iA_j = \varnothing)$
3. $\Pr\{\overline{A}\} + \Pr\{A\} = 1$
4. $\Pr\{A-B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}$
   $\Rightarrow (A-B) \cap B = \varnothing$
5. （单调性）$B \subseteq A \Rightarrow \Pr\{B\} \leqslant \Pr\{A\}$
6. 若满足 5, 由 4 可得 $\Pr\{A-B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{B\}$
7. （容斥原理） $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$

1.4 条件概率

Definition 1.4.1: 条件概率

设 A B 是两个事件, 且 $P(A) \neq 0$, 则称

$$\Pr\{A \mid B\} = \frac{\Pr\{AB\}}{\Pr\{B\}} \tag{1.1}$$

为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 的**条件概率**.

Corollary 1.4.1 条件概率之性质

概率满足的性质条件概率都满足.

Theorem 1.4.1

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个互斥事件, 则有

$$\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid A\right\} = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{A_i \mid A\} \tag{1.2}$$

Question 1: 证明

$$\Pr\left\{\overline{B} \mid A\right\} = 1 - \Pr\{B \mid A\} \tag{1.3}$$

Proof:

$$\begin{aligned}
\Pr\left\{\overline{B} \mid A\right\} &= \frac{\Pr\left\{\overline{B}A\right\}}{\Pr\{A\}} \\
&= \frac{\Pr\{A\} - \Pr\{BA\}}{\Pr\{A\}} \\
&= 1 - \frac{\Pr\{BA\}}{\Pr\{A\}} \\
&= 1 - \Pr\{B \mid A\}
\end{aligned}$$

😃

1.4.1 乘法公式

由条件概率的定义, 我们可以得到乘法公式：

Theorem 1.4.2 乘法公式

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1 A_2 \cdots A_n\} &= \Pr\{A_1\} \Pr\{A_2 \mid A_1\} \Pr\{A_3 \mid A_1 A_2\} \cdots \Pr\{A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}\} &(1.4) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Pr\left\{A_i \mid \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right\} &(1.5)
\end{aligned}$$

Example 1.4.1 (「买彩票」)

第一次买中的概率为 $\frac{1}{2}$, 第二次买中而第一次未中的概率是 $\frac{7}{10}$, 第三次买中而前两次未中的概率是 $\frac{9}{10}$, 求三次都未中的概率.

Solution: 以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件「第 i 次买中」, 以 B 表示事件「三次都未中」, 那么

$$\begin{aligned} \because B &= \overline{A_1A_2A_3} \\ \therefore \Pr\left\{B\right\} &= \Pr\left\{\overline{A_1A_2A_3}\right\} \\ &= \Pr\left\{\overline{A_1}\right\}\Pr\left\{\overline{A_2}|\overline{A_1}\right\}\Pr\left\{\overline{A_3}|\overline{A_1A_2}\right\} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{9}{10}\right) \\ &= \frac{3}{200} \end{aligned}$$

Question 2: P28-19

袋中装有 a 个红球,b 个白球, 每次自袋中有放回地任取一球, 并同时再放入 m 个与之相同的求, 连续如此进行 $2n$ 次, 求前 n 次为红球, 后 $n-1$ 次为白球, 第 $2n$ 次为红球的概率.

Solution: 设事件 A_i 表示第 i 次取出的球为红球,B_i 表示白球, 那么可知所求概率为

$$\Pr\left\{A_1A_2A_3\cdots A_nB_{n+1}B_{n+2}\cdots B_{2n-1}A_{2n}\right\}$$

利用乘法公式展开上式, 我们立即有

$$\begin{aligned} \Pr\left\{A_1\right\}\Pr\left\{A_2|A_1\right\}\cdots\Pr\left\{A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}\right\}\times\Pr\left\{B_{n+1}|A_1A_2\cdots A_n\right\}\Pr\left\{B_{n+2}|\cdots B_{n+1}\right\} \\ \cdots\Pr\left\{A_{2n}|A_1\cdots A_nB_{n+1}B_{n+2}\cdots B_{2n-1}\right\} \end{aligned}$$

此式太长, 不妨将其分成三部分:

1. $\Pr\left\{A_1\right\}\Pr\left\{A_2|A_1\right\}\cdots\Pr\left\{A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}\right\}$ (前 n 个红球)
2. $\Pr\left\{B_{n+1}|A_1A_2\cdots A_n\right\}\Pr\left\{B_{n+2}|\cdots B_{n+1}\right\}\cdots\Pr\left\{B_{2n-1}|\cdots B_{2n-2}\right\}$ (后 n-1 个白球)
3. $\Pr\left\{A_{2n}|A_1\cdots A_nB_{n+1}B_{n+2}\cdots B_{2n-1}\right\}$ (最后的红球)

三式相乘, 有

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{a+(i-1)ma}{a+b+(i-1)m}\prod_{i=n+1}^{2n-1}\frac{b+(i-n-1)mb}{a+b+(i-1)m}\times\frac{a+(n-1)ma}{a+b+(2n-1)m}$$

即为所求.

1.4.2 全概率公式

Lemma 1.4.1 完备事件组
设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限或可数个事件, 若其满足

1. 两两互斥
2. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组.

Theorem 1.4.3 全概公式
设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组, 且 $\Pr\{A_i\} > 0$ for i in 1...n, 则对任一事件 B, 有

$$\Pr\{B\} = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{A_i\} \Pr\{B \mid A_i\} \tag{1.6}$$

Question 3: P14-10

从 1 到 9 的整数中有放回地依次随机抽取 3 次, 求取出的 3 个数之积能被 10 整除的概率.

显然这三个数中必有两数为 5 和 $\{2, 4, 6, 8\}$, 因此

法一: 分情况讨论

1. A = {三个数里有两个 5 和一个偶数}
2. B = {三个数里有一个 5 和两个偶数}
3. C = {三个数里有一个 5 一个偶数和一个其他的奇数}

那么有 $\Pr\{A\} = \frac{\binom{4}{1}\cdot 3}{9^3}$ $\Pr\{B\} = \frac{\binom{4}{1}\cdot 3+\binom{4}{2}A_3^3}{9^3}$ $\Pr\{C\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}A_3^3}{9^3}$ 相加得 $\frac{156}{729}$. ☺

法二: 对立事件
不妨设三个数中出现 5 的事件为 A, 出现偶数的事件为 B, 那么

$$\begin{aligned}
\Pr\{AB\} &= 1 - \Pr\left\{\overline{AB}\right\} \\
&= 1 - \left(\Pr\left\{\overline{A}\right\} + \Pr\left\{\overline{B}\right\} - \Pr\left\{\overline{A}\,\overline{B}\right\}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{8^3}{9^3} + \frac{5^3}{9^3} - \frac{4^3}{9^3}\right) \\
&= \frac{156}{729}
\end{aligned}$$

☺

法三: 另一种分情况讨论（笔者的分法）

1. A = {三个数中有两个相同的}
2. B = {三个数全不同}

此项须要分成下述两项, 否则会重

   2.1. B_1 = {三个数全不同且有两个偶数}
   2.2. B_2 = {三个数全不同且有两个奇数}

那么有 $\Pr\{A\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{9^3}$ $\Pr\{B_1\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{9^3}$ $\Pr\{B_2\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}A_3^3}{9^3}$ 相加得 $\frac{156}{729}$. ☺

1.4.3 Beyes 公式

全概公式是通过计算某一事件会发生的**所有原因和情况的可能性大小**来计算该事件发生的概率, 而 Beyes 公式则与之相反, 考察一件已经发生的事情的**各种原因或或情况的可能性大小**.

$\Pr\{A_i\}$,$\Pr\{A_i|B\}$ 分别称为原因的先验概率和后验概率

Theorem 1.4.4 Beyes 公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组, 且 $\Pr\{A_i\} > 0$ for i in 1...n, 则对任一可能发生的事件 B, 有

$$\Pr\{A_i|B\} = \frac{\Pr\{A_i\}\Pr\{B|A_i\}}{\sum_{j=1}^{n}\Pr\left\{A_j\right\}\Pr\left\{B|A_j\right\}}$$

1.5 事件的独立性

独立与互斥是两种不同的概念

Definition 1.5.1: 两事件独立性

设 A, B 是两个事件, 若

$$\Pr\{AB\} = \Pr\{A\}\Pr\{B\}$$

则称 A, B **相互独立**.

Theorem 1.5.1

设 A,B 两事件相互独立且 $\Pr\{B\} > 0$, 则有

$$\Pr\{A|B\} = \Pr\{A\}$$

Theorem 1.5.2

若 A,B 两事件相互独立, 则它们对立事件和其本身 (不同事件间) 的组合也相互独立.

根据三个事件 (略) 独立性的定义, 可以类推到 n 个事件的独立性: 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件, 若对于其中任意 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$, 有

$$\Pr\left\{A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right\} = \Pr\left\{A_{i_1}\right\}\Pr\left\{A_{i_2}\right\}\cdots\Pr\left\{A_{i_k}\right\}$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **相互独立**.

Definition 1.5.2

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n > 2)$ 是 n 个事件, 若其中任意两个事件相互独立, 则称这 n 个事件两两独立.

由此可以得到多个独立事件所具备的性质

Corollary 1.5.1

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n > 2)$ 相互独立, 则其中任意 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 个 (它们的对立) 事件也相互独立.

1.6 Bernoulli 试验

即两点分布.

这相当于在实验结果序列中任取 k 次发生 A 事件

Theorem 1.6.1 Bernoulli 定理

一次试验中, 事件 A 发生的概率为 p, 进行这样的试验 n 次, 事件 A 发生 k 次的概率为

$$b(k; n; p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Note

n 次 Bernoulli 试验的概率分布就是二项分布. 其概率密度函数为

$$f(k,n,p) = \Pr\big(k; n, p\big) = \Pr\big(X = k\big) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Glossary: 两点分布 =Bernoulli 试验; 二项分布 = 多次 Bernoulli 试验 =Bernoulli 概型.