

SCNUSoS  
《概率论与数理统计》讲义



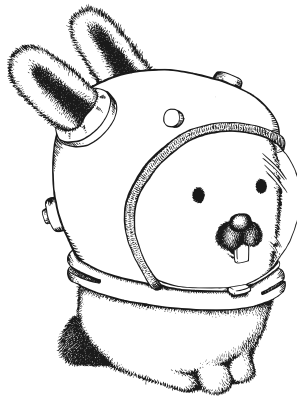
EVAN GAO

大二上



Made with X<sub>3</sub>L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  
(And Love)

evan@notch1p.xyz



# CONTENTS

## CHAPTER 1 随机事件及其概率 PAGE 3

1.1	随机事件	3
1.2	频率	4
1.3	概率	4
	概率的性质 — 4	
1.4	条件概率	5
	乘法公式 — 5 • 全概率公式 — 7 • Bayes 公式 — 8	
1.5	事件的独立性	8
1.6	Bernoulli 试验	9

## CHAPTER 2 随机变量及其分布 PAGE 10

2.1	随机变量	10
2.2	离散型随机变量及其分布	10
	常用离散分布 — 10	
2.3	累积分布函数	11
	随机变量的分布函数 — 11 • 离散型随机变量的分布函数 — 12	

# Chapter 1

## 随机事件及其概率

### 1.1 随机事件

事件是样本空间的子集

#### Definition 1.1.1: 样本空间

考虑样本空间集合  $S$ , 我们有  $S := \{\text{所有样本点}\}$ .

由定义, 我们可以得到几种特殊的样本空间 :

#### Example 1.1.1 (特殊的样本空间)

- $\emptyset$  事件 : 不可能发生的事件.
- $S - \emptyset$  发生的事件.
- 基本事件  $\omega : |\omega| = 1$  i.e. 基本事件只含有一个样本点.

#### Note

由于  $\emptyset$  事件和  $S - \emptyset$  事件是互为对偶的, 我们可以得到**对偶律 (De Morgan)** :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

#### Definition 1.1.2: 和、积事件

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \text{ happen} \iff \exists i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \text{ happen} \iff \forall i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

## 1.2 频率

### Definition 1.2.1: 频率

考虑事件  $A$ , 其发生的频率是

$$f_n(A) := \frac{r_n(A)}{n} \in [0, 1]$$

其中频数  $\frac{r_n(A)}{n} \in [0, n]$ . 显然有  $f_n(S) = 1$ .

### Corollary 1.2.1 有限可加性

若  $A_i \cap A_j = \emptyset$  且  $i \neq j$ ,  $i, j \in [1, k]$  i.e. 互斥事件  
则有

$$f_n\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$$

## 1.3 概率

### Definition 1.3.1: 概率

(Kolmogorov 公理化定义) 设有随机试验  $E$  且与之对应的样本空间  $S$ , 考虑事件  $A$

for  $\forall A \in E$ , if

- ①  $0 \leq P(A) \leq 1$
- ②  $P(S) = 1$
- ③  $\Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A_i\}$  i.e. 可列可加性

则称  $P$  为  $S$  上的概率.

### 1.3.1 概率的性质

由上面的定义我们能够得到概率的性质 :

1.  $\Pr\{\emptyset\} = 0$
2.  $\Pr\{\bigcup_{i=1}^n A_i\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\}$   
 $\iff \forall i, j (i \neq j \rightarrow A_i A_j = \emptyset)$
3.  $\Pr\{\bar{A}\} + \Pr\{A\} = 1$
4.  $\Pr\{A - B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}$   
 $\Rightarrow (A - B) \cap B = \emptyset$
5. (单调性)  $B \subseteq A \Rightarrow \Pr\{B\} \leq \Pr\{A\}$
6. 若满足 5, 由 4 可得  $\Pr\{A - B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{B\}$
7. (容斥原理)  $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$

## 1.4 条件概率

### Definition 1.4.1: 条件概率

设  $A, B$  是两个事件, 且  $P(A) \neq 0$ , 则称

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{AB\}}{\Pr\{B\}} \quad (1.1)$$

为在事件  $A$  发生的条件下, 事件  $B$  的**条件概率**.

### Corollary 1.4.1 条件概率之性质

概率满足的性质条件概率都满足.

### Theorem 1.4.1

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个互斥事件, 则有

$$\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i | A\right\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i | A\} \quad (1.2)$$

### Question 1: 证明

$$\Pr\{\bar{B}|A\} = 1 - \Pr\{B|A\} \quad (1.3)$$

**Proof:**

$$\begin{aligned} \Pr\{\bar{B}|A\} &= \frac{\Pr\{\bar{B}A\}}{\Pr\{A\}} \\ &= \frac{\Pr\{A\} - \Pr\{BA\}}{\Pr\{A\}} \\ &= 1 - \frac{\Pr\{BA\}}{\Pr\{A\}} \\ &= 1 - \Pr\{B|A\} \end{aligned}$$



### 1.4.1 乘法公式

由条件概率的定义, 我们可以得到**乘法公式**:

### Theorem 1.4.2 乘法公式

$$\Pr\{A_1 A_2 \cdots A_n\} = \Pr\{A_1\} \Pr\{A_2 | A_1\} \Pr\{A_3 | A_1 A_2\} \cdots \Pr\{A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}\} \quad (1.4)$$

$$= \prod_{i=1}^n \Pr\left\{A_i | \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right\} \quad (1.5)$$

**Example 1.4.1 (「买彩票」)**

第一次买中的概率为  $\frac{1}{2}$ , 第二次买中而第一次未中的概率是  $\frac{7}{10}$ , 第三次买中而前两次未中的概率是  $\frac{9}{10}$ , 求三次都未中的概率.

**Solution:** 以  $A_i (i = 1, 2, 3)$  表示事件「第  $i$  次买中」, 以  $B$  表示事件「三次都未中」, 那么

$$\begin{aligned} \because B &= \overline{A_1 A_2 A_3} \\ \therefore \Pr\{B\} &= \Pr\{\overline{A_1 A_2 A_3}\} \\ &= \Pr\{\overline{A_1}\} \Pr\{\overline{A_2} | \overline{A_1}\} \Pr\{\overline{A_3} | \overline{A_1 A_2}\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{7}{10}\right) \left(1 - \frac{9}{10}\right) \\ &= \frac{3}{200} \end{aligned}$$

**Question 2: P28-19**

袋中装有  $a$  个红球,  $b$  个白球, 每次自袋中有放回地任取一球, 并同时再放入  $m$  个与之相同的球, 连续如此进行  $2n$  次, 求前  $n$  次为红球, 后  $n-1$  次为白球, 第  $2n$  次为红球的概率.

**Solution:** 设事件  $A_i$  表示第  $i$  次取出的球为红球,  $B_i$  表示白球, 那么可知所求概率为

$$\Pr\{A_1 A_2 A_3 \cdots A_n B_{n+1} B_{n+2} \cdots B_{2n-1} A_{2n}\}$$

利用乘法公式展开上式, 我们立即有

$$\Pr\{A_1\} \Pr\{A_2 | A_1\} \cdots \Pr\{A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}\} \times \Pr\{B_{n+1} | A_1 A_2 \cdots A_n\} \Pr\{B_{n+2} | \cdots B_{n+1}\} \cdots \Pr\{A_{2n} | A_1 \cdots A_n B_{n+1} B_{n+2} \cdots B_{2n-1}\}$$

此式太长, 不妨将其分成三部分:

1.  $\Pr\{A_1\} \Pr\{A_2 | A_1\} \cdots \Pr\{A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}\}$  (前  $n$  个红球)
2.  $\Pr\{B_{n+1} | A_1 A_2 \cdots A_n\} \Pr\{B_{n+2} | \cdots B_{n+1}\} \cdots \Pr\{B_{2n-1} | \cdots B_{2n-2}\}$  (后  $n-1$  个白球)
3.  $\Pr\{A_{2n} | A_1 \cdots A_n B_{n+1} B_{n+2} \cdots B_{2n-1}\}$  (最后的红球)

三式相乘, 有

$$\prod_{i=1}^n \frac{a + (i-1)m}{a + b + (i-1)m} \prod_{i=n+1}^{2n-1} \frac{b + (i-n-1)m}{a + b + (i-1)m} \times \frac{a + (n-1)m}{a + b + (2n-1)m}$$

即为所求.

## 1.4.2 全概率公式

### Lemma 1.4.1 完备事件组

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是有限或可数个事件, 若其满足

1. 两两互斥
2.  $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$

则称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是一个**完备事件组**.

### Theorem 1.4.3 全概公式

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是一个完备事件组, 且  $\Pr\{A_i\} > 0$  for  $i$  in  $1 \dots n$ , 则对任一事件  $B$ , 有

$$\Pr\{B\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\} \Pr\{B|A_i\} \quad (1.6)$$

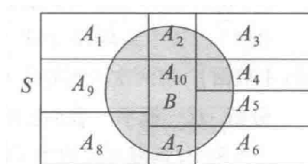


图 1-4-2

Figure 1.1: 全概公式示意图

### Question 3: P14-10

从 1 到 9 的整数中有放回地依次随机抽取 3 次, 求取出的 3 个数之积能被 10 整除的概率.

显然这三个数中必有两数为 5 和  $\{2, 4, 6, 8\}$ , 因此

法一: 分情况讨论

1.  $A = \{\text{三个数里有两个 5 和一个偶数}\}$
2.  $B = \{\text{三个数里有一个 5 和两个偶数}\}$
3.  $C = \{\text{三个数里有一个 5 一个偶数和一个其他的奇数}\}$

那么有  $\Pr\{A\} = \frac{\binom{4}{1} \cdot 3}{9^3}$   $\Pr\{B\} = \frac{\binom{4}{1} \cdot 3 + \binom{4}{2} A_3^3}{9^3}$   $\Pr\{C\} = \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1} A_3^3}{9^3}$  相加得  $\frac{156}{729}$ .

法二: 对立事件

不妨设三个数中出现 5 的事件为  $A$ , 出现偶数的事件为  $B$ , 那么

$$\begin{aligned} \Pr\{AB\} &= 1 - \Pr\{\overline{AB}\} \\ &= 1 - \left( \Pr\{\overline{A}\} + \Pr\{\overline{B}\} - \Pr\{\overline{A}\overline{B}\} \right) \\ &= 1 - \left( \frac{8^3}{9^3} + \frac{5^3}{9^3} - \frac{4^3}{9^3} \right) \\ &= \frac{156}{729} \end{aligned}$$



法三：另一种分情况讨论（笔者的分法）

1.  $A = \{\text{三个数中有两个相同的}\}$
2.  $B = \{\text{三个数全不同}\}$ 
  - 2.1.  $B_1 = \{\text{三个数全不同且有两个偶数}\}$
  - 2.2.  $B_2 = \{\text{三个数全不同且有两个奇数}\}$

此项须要分成下述  
两项, 否则会重

那么有  $\Pr\{A\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{4}{1}\binom{3}{1}}{9^3}$   $\Pr\{B_1\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{9^3}$   $\Pr\{B_2\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}A_3^3}{9^3}$  相加得  $\frac{156}{729}$ .



#### Note

讨论各种情况的概率进而求得所求事件的概率的方法实际上是**全概率公式**的一种体现.

### 1.4.3 Bayes 公式

**全概公式**是通过计算某一事件会发生的所有原因和情况的可能性大小来计算该事件发生的概率, 而**Bayes**公式则与之相反, 考察一件已经发生的事情的**各种原因或或情况的可能性大小**.

#### Theorem 1.4.4 Bayes 公式

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是一个完备事件组, 且  $\Pr\{A_i\} > 0$  for  $i$  in  $1..n$ , 则对任一可能发生的事件  $B$ , 有

$$\Pr\{A_i | B\} = \frac{\Pr\{A_i\} \Pr\{B | A_i\}}{\sum_{j=1}^n \Pr\{A_j\} \Pr\{B | A_j\}}$$

$\Pr\{A_i\}, \Pr\{A_i | B\}$   
分别称为原因的先  
验概率和后验概率

## 1.5 事件的独立性

#### Definition 1.5.1: 两事件独立性

设  $A, B$  是两个事件, 若

$$\Pr\{AB\} = \Pr\{A\} \Pr\{B\}$$

则称  $A, B$  **相互独立**.

独立与互斥是两种  
不同的概念

#### Theorem 1.5.1

设  $A, B$  两事件相互独立且  $\Pr\{B\} > 0$ , 则有

$$\Pr\{A | B\} = \Pr\{A\}$$

#### Theorem 1.5.2

若  $A, B$  两事件相互独立, 则它们对立事件和其本身 (不同事件间) 的组合也相互独立.

根据三个事件 (略) 独立性的定义, 可以类推到  $n$  个事件的独立性: 设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个事件, 若对于其中任意  $k (2 \leq k \leq n)$  个事件  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ , 有

$$\Pr\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\} = \Pr\{A_{i_1}\} \Pr\{A_{i_2}\} \dots \Pr\{A_{i_k}\}$$

则称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  **相互独立**.

#### Definition 1.5.2

设  $A_1, A_2, \dots, A_n (n > 2)$  是  $n$  个事件, 若其中任意两个事件相互独立, 则称这  $n$  个事件**两两独立**.

由此可以得到多个独立事件所具备的性质

### Corollary 1.5.1

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n > 2$ ) 相互独立, 则其中任意  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ) 个 (它们的对立) 事件也相互独立.

## 1.6 Bernoulli 试验

即两点分布.

### Theorem 1.6.1 Bernoulli 定理

一次试验中, 事件  $A$  发生的概率为  $p$ , 进行这样的试验  $n$  次, 事件  $A$  发生  $k$  次的概率为

$$b(k; n; p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

这相当于在实验结果序列中任取  $k$  次发生  $A$  事件

### Note

$n$  次 Bernoulli 试验的概率分布就是二项分布. 其概率密度函数为

$$f(k, n, p) = \Pr(k; n, p) = \Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

**Glossary:** 两点分布 = Bernoulli 试验; 二项分布 = 多次 Bernoulli 试验 = Bernoulli 概型.

**辨析:**  $\Pr\{A\}$  和  $\Pr(X)$  使用的括号不同. 大括号代表是事件, 即一系列样本点集合 (故用大括号), 小括号代表是随机变量 (因为此时是概率密度函数). ☺

## Chapter 2

# 随机变量及其分布

## 2.1 随机变量

### Definition 2.1.1: 随机变量

设随机试验的样本空间为  $S$ , 称定义在  $S$  上的实值单值函数  $X = X(\omega)$  为**随机变量**. 亦即

$$X : \omega \mapsto x_i \in \mathbb{R} \text{ i.e. } S \rightarrow \mathbb{R}$$

实际上,  $\Pr(X = a)$  是  $A = \{\omega | X(\omega) = a\}$  的简记.

## 2.2 离散型随机变量及其分布

设  $X$  是一个随机变量, 如果  $X$  的所有可能取值为有限个或可列无限多个, 则称  $X$  为**离散型随机变量**.

### Definition 2.2.1: 离散型随机变量分布律

设  $X$  是一个离散型随机变量, 如果

$$\Pr(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots$$

则称  $p_k$  为  $X$  的**分布律**或**概率分布**, 亦称**概率质量函数(PMF)**. 记为  $f_X(x)$ .

就是高中所学之分布列.

### 2.2.1 常用离散分布

#### 两点分布

### Definition 2.2.2: 两点分布

设  $X$  的分布律为

$$\Pr(X = k) = \begin{cases} p, & k = x_1 \\ 1 - p, & k = x_2 \end{cases}$$

其中  $0 < p < 1$ , 则称  $X$  服从以  $p$  为参数的**两点分布**.

若  $X$  服从  $x_1 = 1, x_2 = 0$  处参数为  $p$  的两点分布, 则称其服从参数为  $p$  的**0-1 分布**.

## 二项分布

### Definition 2.2.3: 二项分布

设  $X$  的分布律为

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

其中  $n$  为正整数,  $0 < p < 1$ , 则称  $X$  服从参数为  $n, p$  的**二项分布**, 记为  $X \sim B(n, p)$ .

当  $n = 1$  时, 二项分布退化为 0-1 分布.

$\sim$  记号就是**服从**的意思

二项概率总存在一个最大值  $M$  s.t.  $(n+1)p - 1 \leq M < (n+1)p$ .

## Poisson 分布

### Definition 2.2.4: Poisson 分布

设  $X$  的分布律为

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

其中  $\lambda > 0$ , 则称  $X$  服从参数为  $\lambda$  的**Poisson 分布**, 记为  $X \sim P(\lambda)$ .

因为  $e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , 将  $x$  换为  $\lambda$  可得泊松分布的概率和为 1.

## 2.3 累积分布函数

### 2.3.1 随机变量的分布函数

#### Definition 2.3.1: 随机变量 CDF

设  $X$  是一个随机变量, 对任意实数  $x$ , 定义

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \in [0, 1]$$

称  $F(x)$  为  $X$  的**累积分布函数**(CDF). 有时记作  $F_X(x)$  或  $X \sim F(x)$ .

分布函数  $F(x)$  的值就表示  $X$  落在区间  $(-\infty, x]$  的概率.

#### 性质

1. 单调非减性:  $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
2.  $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .
3. 右连续性:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$

具有上述性质的函数一定是某个随机变量的 CDF.

### 2.3.2 离散型随机变量的分布函数

在上述基础上, 对于离散型随机变量  $X$  有 CDF:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \Pr(X = x_i)$$

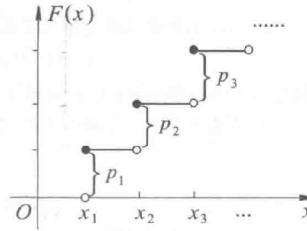


图 2-3-1

Figure 2.1: 阶梯型 CDF

$F(x)$  是一个**阶梯型函数**, 在点  $x_i$  处的跃度为  $\Pr(X = x_i)$ . 可以看出阶梯型函数符合 CDF 之性质: 总是右连续的; 而作为一个分段函数来说, 其各段区间总是左闭右开的.

**Note**

考题中由 CDF 反推分布列可以根据每一个左侧端点得到对应的随机变量  $x_i$ .

随机变量  $X$  的 CDF 为阶梯型函数  $\Leftrightarrow X$  是离散型随机变量.