SCNUSoS

《概率论与数理统计》讲义

Evan Gao

大二上

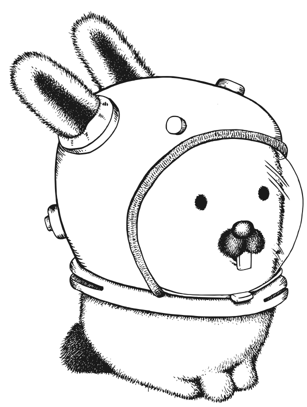
🚒🔥

Version D:20231009

Made with XeLaTeX

(And Love)

evan@notch1p.xyz



Contents

Chapter 1

随机事件及其概率

1.1 随机事件

事件是样本空间的子集

Definition 1.1.1: 样本空间

考虑样本空间集合 S, 我们有 $S := \{所有样本点\}$.

由定义, 我们可以得到几种特殊的样本空间：

Example 1.1.1 (特殊的样本空间)

- $\varnothing$ 事件：不可能发生的事件.
- $S - \varnothing$ 发生的事件.
- 基本事件 ω：$|\omega| = 1$ i.e. 基本事件只含有一个样本点.

Note

由于 $\varnothing$ 事件和 $S - \varnothing$ 事件是互为对偶的, 我们可以得到**对偶律 (De Morgan)**：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Definition 1.1.2: 和、积事件

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ happen} \iff \exists i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ happen} \iff \forall i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

1.2 频率

Definition 1.2.1: 频率

考虑事件 A, 其发生的**频率**是

$$f_n(A) := \frac{r_n(A)}{n} \in [0,1]$$

其中频数 $\frac{r_n(A)}{n} \in [0,n]$. 显然有 $f_n(S)=1$.

Corollary 1.2.1 有限可加性

若 $A_i \cap A_j = \varnothing$ 且 $i \neq j,\ i,j \in [1,k]$ i.e. 互斥事件

则有

$$f_n(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

1.3 概率

Definition 1.3.1: 概率

（Kolmogorov 公理化定义）设有随机试验 E 且与之对应的样本空间 S, 考虑事件 A

$$\text{for } \forall A \in E, \text{if}$$

① $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

② $P(S) = 1$

③ $\Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A_i\}$ i.e. **可列可加性**

则称 P 为 S 上的概率.

1.3.1 概率的性质

由上面的定义我们能够得到概率的性质：

1. $\Pr\{\varnothing\} = 0$
2. $\Pr\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{A_i\}$
   $\iff \forall i,j(i \neq j \to A_iA_j = \varnothing)$
3. $\Pr\{\overline{A}\} + \Pr\{A\} = 1$
4. $\Pr\{A-B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}$
   $\Rightarrow (A-B) \cap B = \varnothing$
5. （单调性） $B \subseteq A \Rightarrow \Pr\{B\} \leqslant \Pr\{A\}$
6. 若满足 5, 由 4 可得 $\Pr\{A-B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{B\}$
7. （容斥原理） $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$

1.4 条件概率

Definition 1.4.1: 条件概率

设 A B 是两个事件, 且 $P(A) \neq 0$, 则称

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{AB\}}{\Pr\{B\}} \tag{1.1}$$

为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 的**条件概率**.

Corollary 1.4.1 条件概率之性质

概率满足的性质条件概率都满足.

Theorem 1.4.1

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个互斥事件, 则有

$$\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i | A\right\} = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{A_i | A\} \tag{1.2}$$

Question 1: 证明

$$\Pr\left\{\overline{B}|A\right\} = 1 - \Pr\{B|A\} \tag{1.3}$$

Proof:

$$\begin{aligned}
\Pr\left\{\overline{B}|A\right\} &= \frac{\Pr\left\{\overline{B}A\right\}}{\Pr\{A\}} \\
&= \frac{\Pr\{A\} - \Pr\{BA\}}{\Pr\{A\}} \\
&= 1 - \frac{\Pr\{BA\}}{\Pr\{A\}} \\
&= 1 - \Pr\{B|A\}
\end{aligned}$$

☺

1.4.1 乘法公式

由条件概率的定义, 我们可以得到**乘法公式**：

Theorem 1.4.2 乘法公式

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1A_2\cdots A_n\} &= \Pr\{A_1\}\Pr\{A_2|A_1\}\Pr\{A_3|A_1A_2\}\cdots\Pr\{A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}\} && (1.4) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Pr\left\{A_i | \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right\} && (1.5)
\end{aligned}$$

Example 1.4.1 (「买彩票」)
第一次买中的概率为 $\frac{1}{2}$, 第二次买中而第一次未中的概率是 $\frac{7}{10}$, 第三次买中而前两次未中的概率是 $\frac{9}{10}$, 求三次都未中的概率.

Solution: 以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件「第 i 次买中」, 以 B 表示事件「三次都未中」, 那么

$$\begin{aligned}
\because B &= \overline{A_1A_2A_3} \\
\therefore \Pr\left\{B\right\} &= \Pr\left\{\overline{A_1A_2A_3}\right\} \\
&= \Pr\left\{\overline{A_1}\right\}\Pr\left\{\overline{A_2}|\overline{A_1}\right\}\Pr\left\{\overline{A_3}|\overline{A_1A_2}\right\} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{7}{10}\right)\left(1-\frac{9}{10}\right) \\
&= \frac{3}{200}
\end{aligned}$$

Question 2: P28-19

袋中装有 a 个红球,b 个白球, 每次自袋中有放回地任取一球, 并同时再放入 m 个与之相同的求, 连续如此进行 $2n$ 次, 求前 n 次为红球, 后 $n-1$ 次为白球, 第 $2n$ 次为红球的概率.

Solution: 设事件 A_i 表示第 i 次取出的球为红球,B_i 表示白球, 那么可知所求概率为

$$\Pr\left\{A_1A_2A_3\cdots A_nB_{n+1}B_{n+2}\cdots B_{2n-1}A_{2n}\right\}$$

利用乘法公式展开上式, 我们立即有

$$\Pr\left\{A_1\right\}\Pr\left\{A_2|A_1\right\}\cdots\Pr\left\{A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}\right\}\times\Pr\left\{B_{n+1}|A_1A_2\cdots A_n\right\}\Pr\left\{B_{n+2}|\cdots B_{n+1}\right\}$$
$$\cdots\Pr\left\{A_{2n}|A_1\cdots A_nB_{n+1}B_{n+2}\cdots B_{2n-1}\right\}$$

此式太长, 不妨将其分成三部分:

1. $\Pr\left\{A_1\right\}\Pr\left\{A_2|A_1\right\}\cdots\Pr\left\{A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}\right\}$ (前 n 个红球)
2. $\Pr\left\{B_{n+1}|A_1A_2\cdots A_n\right\}\Pr\left\{B_{n+2}|\cdots B_{n+1}\right\}\cdots\Pr\left\{B_{2n-1}|\cdots B_{2n-2}\right\}$ (后 n-1 个白球)
3. $\Pr\left\{A_{2n}|A_1\cdots A_nB_{n+1}B_{n+2}\cdots B_{2n-1}\right\}$ (最后的红球)

三式相乘, 有

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{a+(i-1)m}{a+b+(i-1)m}\prod_{i=n+1}^{2n-1}\frac{b+(i-n-1)m}{a+b+(i-1)m}\times\frac{a+(n-1)m}{a+b+(2n-1)m}$$

即为所求.

1.4.2 全概率公式

Lemma 1.4.1 完备事件组
设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限或可数个事件, 若其满足

1. 两两互斥
2. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个**完备事件组**.

Theorem 1.4.3 全概公式
设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组, 且 $\Pr\{A_i\} > 0$ for i in 1...n, 则对任一事件 B, 有

$$\Pr\{B\} = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{A_i\} \Pr\{B|A_i\} \tag{1.6}$$

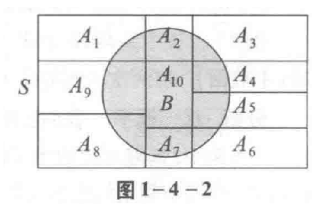


Figure 1.1: 全概公式示意图

Question 3: P14-10

从 1 到 9 的整数中有放回地依次随机抽取 3 次, 求取出的 3 个数之积能被 10 整除的概率.

显然这三个数中必有两数为 5 和 {2, 4, 6, 8}, 因此

法一: 分情况讨论

1. A = {三个数里有两个 5 和一个偶数}
2. B = {三个数里有一个 5 和两个偶数}
3. C = {三个数里有一个 5 一个偶数和一个其他的奇数}

那么有 $\Pr\{A\} = \frac{\binom{4}{1}\cdot 3}{9^3}$ $\Pr\{B\} = \frac{\binom{4}{1}\cdot 3+\binom{4}{2}A_3^3}{9^3}$ $\Pr\{C\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}A_3^3}{9^3}$ 相加得 $\frac{156}{729}$. ☺

法二: 对立事件
不妨设三个数中出现 5 的事件为 A, 出现偶数的事件为 B, 那么

$$\begin{aligned}
\Pr\{AB\} &= 1 - \Pr\left\{\overline{AB}\right\} \\
&= 1 - \left(\Pr\left\{\overline{A}\right\} + \Pr\left\{\overline{B}\right\} - \Pr\left\{\overline{A}\,\overline{B}\right\}\right) \\
&= 1 - \left(\frac{8^3}{9^3} + \frac{5^3}{9^3} - \frac{4^3}{9^3}\right) \\
&= \frac{156}{729}
\end{aligned}$$

☺

法三：另一种分情况讨论（笔者的分法）

1. A = {三个数中有两个相同的}

此项须要分成下述两项，否则会重

2. B = {三个数全不同}

   2.1. B_1 = {三个数全不同且有两个偶数}

   2.2. B_2 = {三个数全不同且有两个奇数}

那么有 $\Pr\{A\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{9^3}$ $\Pr\{B_1\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{9^3}$ $\Pr\{B_2\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}A_3^3}{9^3}$ 相加得 $\frac{156}{729}$. ☺

Note

讨论各种情况的概率进而求得所求事件的概率的方法实际上是**全概率公式**的一种体现.

1.4.3 Beyes 公式

全概公式是通过计算某一事件会发生的**所有原因和情况的可能性大小**来计算该事件发生的概率，而**Beyes**公式则与之相反，考察一件已经发生的事情的**各种原因或或情况的可能性大小**.

Theorem 1.4.4 Beyes 公式

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组，且 $\Pr\{A_i\} > 0$ for i in 1...n，则对任一可能发生的事件 B，有

$\Pr\{A_i\}$,$\Pr\{A_i|B\}$ 分别称为原因的先验概率和后验概率

$$\Pr\{A_i|B\} = \frac{\Pr\{A_i\}\Pr\{B|A_i\}}{\sum_{j=1}^{n}\Pr\left\{A_j\right\}\Pr\left\{B|A_j\right\}} \tag{1.7}$$

1.5 事件的独立性

Definition 1.5.1: 两事件独立性

独立与互斥是两种不同的概念

设 A, B 是两个事件，若

$$\Pr\{AB\} = \Pr\{A\}\Pr\{B\}$$

则称 A, B **相互独立**.

Theorem 1.5.1

设 A,B 两事件相互独立且 $\Pr\{B\} > 0$，则有

$$\Pr\{A|B\} = \Pr\{A\}$$

Theorem 1.5.2

若 A,B 两事件相互独立，则它们对立事件和其本身 (不同事件间) 的组合也相互独立.

根据三个事件 (略) 独立性的定义，可以类推到 n 个事件的独立性：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，若对于其中任意 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$，有

$$\Pr\left\{A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right\} = \Pr\left\{A_{i_1}\right\}\Pr\left\{A_{i_2}\right\}\cdots\Pr\left\{A_{i_k}\right\} \tag{1.8}$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **相互独立**.

Definition 1.5.2

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n > 2)$ 是 n 个事件，若其中任意两个事件相互独立，则称这 n 个事件**两两独立**.

由此可以得到多个独立事件所具备的性质

Corollary 1.5.1
设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n > 2)$ 相互独立, 则其中任意 $k(2 \leqslant k \leqslant n)$ 个 (它们的对立) 事件也相互独立.

1.6 Bernoulli 试验

即两点分布.

这相当于在实验结果序列中任取 k 次发生 A 事件

Theorem 1.6.1 Bernoulli 定理
一次试验中, 事件 A 发生的概率为 p, 进行这样的试验 n 次, 事件 A 发生 k 次的概率为

$$b(k; n; p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Note

n 次 Bernoulli 试验的概率分布就是二项分布. 其概率密度函数为

$$f(k, n, p) = \Pr(k; n, p) = \Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Glossary: 两点分布 =Bernoulli 试验; 二项分布 = 多次 Bernoulli 试验 =Bernoulli 概型.

辨析: $\Pr\{A\}$ 和 $\Pr(X)$ 使用的括号不同. 大括号代表是事件, 即一系列样本点集合 (故而用大括号), 小括号代表是随机变量 (因为此时是概率密度函数). ☺

Chapter 2

随机变量及其分布

2.1 随机变量

Definition 2.1.1: 随机变量

设随机试验的样本空间为 S, 称定义在 S 上的实值单值函数 $X = X(\omega)$ 为**随机变量**.
亦即

$$X : \omega \mapsto x_i \in \mathbb{R} \text{ i.e. } S \to \mathbb{R}$$

实际上,$\Pr(X = a)$ 是 $A = \{\omega | X(\omega) = a\}$ 的简记.

2.2 离散型随机变量及其分布

设 X 是一个随机变量, 如果 X 的所有可能取值为有限个或可列无限多个, 则称 X 为**离散型随机变量**.

Definition 2.2.1: 离散型随机变量分布律

设 X 是一个离散型随机变量, 如果

$$\Pr(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \cdots$$

则称 p_k 为 X 的**分布律**或**概率分布**, 亦称**概率质量函数**(PMF). 记为 $f_X(x)$.

就是高中所学之分布列.

2.2.1 常用离散分布

两点分布

Definition 2.2.2: 两点分布

设 X 的分布律为

$$\Pr(X = k) = \begin{cases} p, & k = x_1 \\ 1 - p, & k = x_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $0 < p < 1$, 则称 X 服从以 p 为参数的**两点分布**.

若 X 服从 $x_1 = 1, x_2 = 0$ 处参数为 p 的两点分布, 则称其服从参数为 p 的**0-1 分布**.

二项分布

Definition 2.2.3: 二项分布

当 $n=1$ 时, 二项分布退化为 0-1 分布.

设 X 的分布律为

$$\Pr(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n \tag{2.2}$$

其中 n 为正整数,$0<p<1$, 则称 X 服从参数为 n,p 的**二项分布**, 记为 $X\sim B(n,p)$.

$\sim$ 记号就是**服从**的意思

二项概率总存在一个最大值 M s.t. $(n+1)p-1\leqslant M<(n+1)p$.

Poisson 分布

Definition 2.2.4: Poisson 分布

设 X 的分布律为

$$\Pr(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,\cdots \tag{2.3}$$

其中 $\lambda>0$, 则称 X 服从参数为 λ 的**Poisson 分布**, 记为 $X\sim P(\lambda)$.

因为 $e^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, 将 x 换为 λ 可得泊松分布的概率和为 1.

2.3 累积分布函数

2.3.1 随机变量的分布函数

Definition 2.3.1: 随机变量 CDF

设 X 是一个随机变量, 对任意实数 x, 定义

$$F(x)=\Pr(X\leqslant x)\in[0,1]$$

称 $F(x)$ 为 X 的**累积分布函数**(CDF). 有时记作 $F_X(x)$ 或 $X\sim F(x)$.

分布函数 $F(x)$ 的值就表示 X 落在区间 $(-\infty,x]$ 的概率.

性质

1. 单调非减性: $x_1<x_2\Rightarrow F(x_1)\leqslant F(x_2)$
2. $F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\ F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$.
3. 右连续性: $\lim_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$

具有上述性质的函数一定是某个随机变量的 CDF.

2.3.2 离散型随机变量的分布函数

在上述基础上, 对于离散型随机变量 X 有 CDF:

$$F(x)=\Pr\left(X\leqslant X\right)=\sum_{x_i\leq x}\Pr\left(X=x_i\right)$$

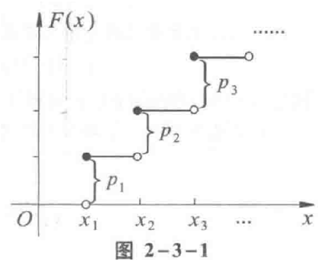


Figure 2.1: 阶梯型 CDF

$F(x)$ 是一个**阶梯型函数**, 在点 x_i 处的跃度为 $\Pr\left(X=x\right)$. 可以看出阶梯型函数符合 CDF 之性质: 总是右连续的; 而作为一个分段函数来说, 其各段区间总是左闭右开的.

Note

考题中由 CDF 反推分布列可以根据每一个左侧端点得到对应的随机变量 x_i.
计算分布列时, 有公式 $\Pr\left\{a\leqslant X<b\right\}=F(b)-F(a)$.

随机变量 X 的 CDF 为阶梯型函数 $\Leftrightarrow$ X 是离散型随机变量.

2.4 连续型随机变量及其概率密度

Definition 2.4.1: PDF

设 X 是一个随机变量, 如果存在非负可积函数 $f(x)$, 使对任意实数 x 有

$$F(x)=\Pr\left\{X\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

则称 X 为**连续型随机变量**,$f(x)$ 为 X 的**概率密度函数**(PDF).

立即可以得到 PDF 的性质

1. $f(x)\geqslant 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.
3. $F'(x)=f(x)$. 若 f(x) 在 x 处连续

Note

若某个随机变量的 CDF 可以写成 PDF 积分函数的形式, 则称其为连续型随机变量.

证明 X 取任一特值的概率为 0:

$$\text{考虑极限 }\Pr\left\{X=a\right\}=\lim_{\Delta x\leftarrow 0^+}\Pr\left\{a-\Delta x\leqslant X\leqslant a\right\}$$

对 RHS 积分, 有

$$\begin{aligned}\Pr\left\{X=a\right\}&=\lim_{\Delta x\leftarrow 0^+}\int_{a-\Delta x}^{a}f(x)\mathrm{d}x\\&=0.\end{aligned}$$

由上面的证明我们可以知道以下的性质

$$\Pr\{a < X < b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

无论 X 两侧端点开闭都成立.

2.4.1 常用连续型分布

均匀分布

Definition 2.4.2: 均匀分布

设 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & else \end{cases} \tag{2.6}$$

其中 $a < b$, 则称 X 服从参数为 a, b 的**均匀分布**, 记为 $X \sim U(a, b)$.

U stands for Uniform

设 $[a, b]$ 之间的任意子区间为 $[c, d]$, 由上式可得 $\Pr\{c < X < d\} = \int_c^d \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{d-c}{b-a}$. 因而我们可以得到

Corollary 2.4.1 均匀分布的 CDF

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b \\ 1, & x \geqslant b \end{cases} \tag{2.7}$$

指数分布

Definition 2.4.3: 指数分布

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}, \lambda > 0 \tag{2.8}$$

则称 X 服从参数为 λ 的**指数分布**, 记为 $X \sim E(\lambda)$.

积分得

Corollary 2.4.2 指数分布的 CDF

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

正态分布

Definition 2.4.4: 正态分布

若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty \tag{2.10}$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 为常数, 则称 X 服从参数为 μ,σ^2 的**正态分布**, 记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

Question 4: Poisson 积分

不使用 Wallis 公式, 求 Poisson 积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Solution: 分析法

$$\begin{aligned}
&\text{要求原式, 不妨先求其平方, 亦即}\\
&\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\\
&\text{化为累次积分有}\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\\
&\text{相当于在平面内求此积分, 化为极坐标有}\\
&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\\
&=\pi\\
&\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

通过证明 Poisson 积分, 我们可以得到正态分布的 PDF 重要性质

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=1 \tag{2.12}$$

图形特征

σ 越小, 方差越大, 曲线中峰越陡

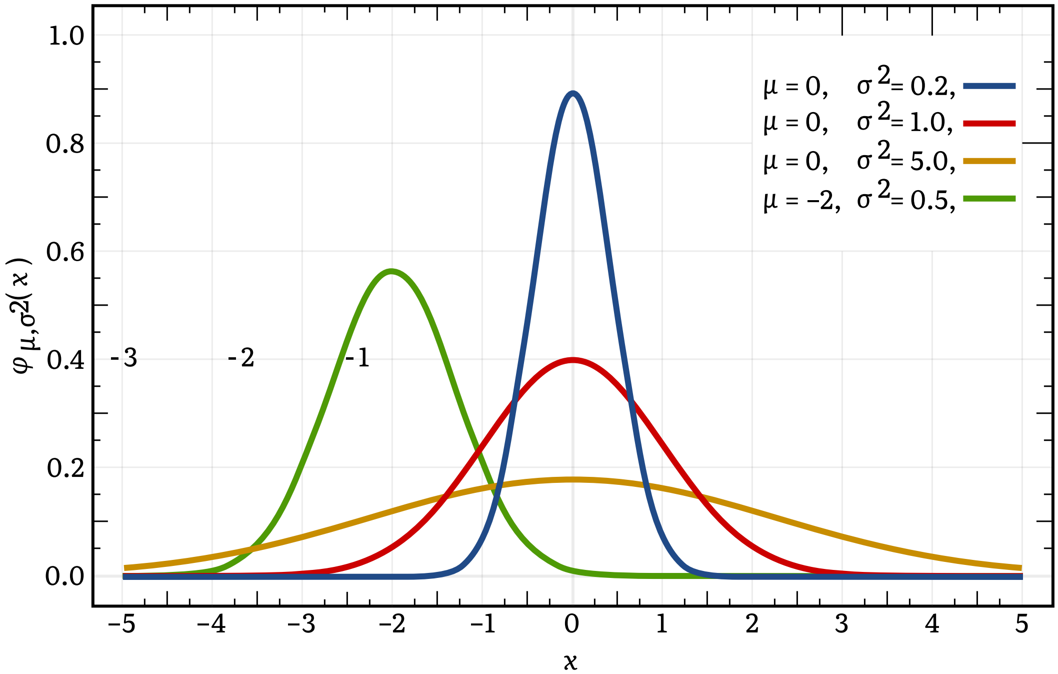


Figure 2.2: PDF

1. μ 确定曲线位置, σ 确定曲线中峰的陡峭程度
2. 密度曲线关于 $x = \mu$ 对称
3. 密度曲线在 $x = \mu$ 处有最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
4. 密度曲线在 $x = \mu \pm \sigma$ 处有拐点且以 x 轴为渐近线

当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, 称为**标准正态分布**, 记为 $X \sim N(0, 1)$,PDF 用 $\varphi(x)$ 表示,CDF 用 $\Phi(x)$ 表示.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad\qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t \tag{2.13}$$

Theorem 2.4.1
设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.
计算 $\Pr\{Y \leqslant x\}$ 时, 可转化为计算 $\Pr\{X \leqslant \mu + \sigma x\}$, 计算此时的 $\Phi(x)$ 即得证.

这说明任何一个一般的正态分布都可以通过**线性变换**转化为标准正态分布. 因此 X 的分布函数也可以写成

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Pr\{a < X < b\} = \Pr\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < Y < \frac{b-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$