

概率论与数理统计讲义

SCNUSoS



Evan 'notch1p' Gao
evan@notch1p.xyz

2023-大二上



CONTENTS

CHAPTER	随机事件及其概率	PAGE	2
1.1	随机事件		2
1.2	频率		3
1.3	概率		3
	概率的性质 — 3		
1.4	条件概率		4
	乘法公式 — 4 • 全概率公式 — 5		

Chapter 1

随机事件及其概率

1.1 随机事件

Definition 1.1.1: Sample Space

考虑样本空间集合 S ，我们有 $S := \{\text{所有样本点}\}$ 。

由定义，我们可以得到几种特殊的样本空间：

Example 1.1.1 (特殊的样本空间)

- \emptyset 事件：不可能发生的事件。
- $S - \emptyset$ 发生的事件。
- 基本事件 $\omega : |\omega| = 1$ i.e. 基本事件只含有一个样本点。

Note

由于 \emptyset 事件和 $S - \emptyset$ 事件是互为对偶的，我们可以得到**对偶律 (De Morgan)**：

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Definition 1.1.2: 和、积事件

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \text{ happen} \iff \exists i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \text{ happen} \iff \forall i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

1.2 频率

Definition 1.2.1: 频率

考虑事件 A ，其发生的**频率**是

$$f_n(A) := \frac{r_n(A)}{n} \in [0, 1]$$

其中频数 $\frac{r_n(A)}{n} \in [0, n]$. 显然有 $f_n(S) = 1$.

Corollary 1.2.1 有限可加性

若 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 且 $i \neq j$, $i, j \in [1, k]$ i.e. 互斥事件
则有

$$f_n\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$$

1.3 概率

Definition 1.3.1: 概率

(Kolmogorov 公理化定义) 设有随机试验 E 且与之对应的样本空间 S ，考虑事件 A

for $\forall A \in E$, if

- ① $0 \leq P(A) \leq 1$
- ② $P(S) = 1$
- ③ $\Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A_i\}$ i.e. **可列可加性**

则称 P 为 S 上的概率.

1.3.1 概率的性质

由上面的定义我们能够得到概率的性质：

1. $\Pr\{\emptyset\} = 0$
2. $\Pr\{\bigcup_{i=1}^n A_i\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\}$
 $\iff \forall i, j (i \neq j \rightarrow A_i A_j = \emptyset)$
3. $\Pr\{\bar{A}\} + \Pr\{A\} = 1$
4. $\Pr\{A - B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}$
 $\Rightarrow (A - B) \cap B = \emptyset$
5. (单调性) $B \subseteq A \Rightarrow \Pr\{B\} \leq \Pr\{A\}$
6. 若满足 5，由 4 可得 $\Pr\{A - B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{B\}$
7. (容斥原理) $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$

1.4 条件概率

Definition 1.4.1: 条件概率

设 A, B 是两个事件，且 $P(A) \neq 0$ ，则称

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{AB\}}{\Pr\{B\}}$$

为在事件 A 发生的条件下，事件 B 的**条件概率**。

Corollary 1.4.1 条件概率之性质

概率满足的性质条件概率都满足。

Theorem 1.4.1

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个互斥事件，则有

$$\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i | A\right\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i | A\}$$

Question 1: 证明

$$\Pr\{\bar{B}|A\} = 1 - \Pr\{B|A\}$$

Proof:

$$\begin{aligned}\Pr\{\bar{B}|A\} &= \frac{\Pr\{\bar{B}A\}}{\Pr\{A\}} \\ &= \frac{\Pr\{A\} - \Pr\{BA\}}{\Pr\{A\}} \\ &= 1 - \frac{\Pr\{B|A\}}{\Pr\{A\}} \\ &= 1 - \Pr\{B|A\}\end{aligned}$$



1.4.1 乘法公式

由条件概率的定义，我们可以得到乘法公式：

Theorem 1.4.2 乘法公式

$$\begin{aligned}\Pr\{A_1 A_2 \cdots A_n\} &= \Pr\{A_1\} \Pr\{A_2 | A_1\} \Pr\{A_3 | A_1 A_2\} \cdots \Pr\{A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}\} \\ &= \prod_{i=1}^n \Pr\left\{A_i | \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right\}\end{aligned}$$

Example 1.4.1 (「买彩票」)

第一次买中的概率为 $\frac{1}{2}$ ，第二次买中而第一次未中的概率是 $\frac{7}{10}$ ，第三次买中而前两次未中的概率是 $\frac{9}{10}$ ，求三次都未中的概率。

Solution: 以 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 表示事件「第 i 次买中」，以 B 表示事件「三次都未中」，那么

$$\begin{aligned}
 \because B &= \overline{A_1 A_2 A_3} \\
 \therefore \Pr\{B\} &= \Pr\{\overline{A_1 A_2 A_3}\} \\
 &= \Pr\{\overline{A_1}\} \Pr\{\overline{A_2} | \overline{A_1}\} \Pr\{\overline{A_3} | \overline{A_1 A_2}\} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{7}{10}\right) \left(1 - \frac{9}{10}\right) \\
 &= \frac{3}{200}
 \end{aligned}$$

1.4.2 全概率公式**Lemma 1.4.1** 完备事件组

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是有限或可数个事件，若其满足

1. 两两互斥
2. $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 是一个完备事件组。

Theorem 1.4.3 全概公式

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是一个完备事件组，且 $\Pr\{A_i\} > 0$ for i in $1 \dots n$ ，则对任一事件 B ，有

$$\Pr\{B\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\} \Pr\{B | A_i\}$$

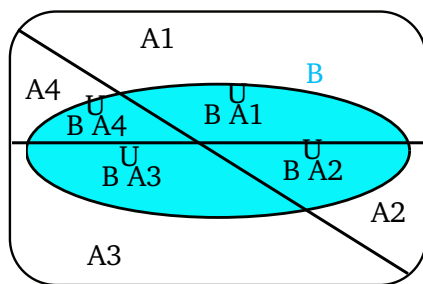


Figure 1.1: 全概公式示意图

好题

Question 2: P14-10

从 1 到 9 的整数中有放回地依次随机抽取 3 次，求取出的 3 个数之积能被 10 整除的概率。

显然这三个数中必有两数为 5 和 {2, 4, 6, 8}，因此

法一：分情况讨论

1. $A = \{\text{三个数里有两个 5 和一个偶数}\}$
2. $B = \{\text{三个数里有一个 5 和两个偶数}\}$
3. $C = \{\text{三个数里有一个 5 一个偶数和一个其他的奇数}\}$

那么有 $\Pr\{A\} = \frac{\binom{4}{1} \cdot 3}{9^3}$ $\Pr\{B\} = \frac{\binom{4}{1} \cdot 3 + \binom{4}{2} A_3^3}{9^3}$ $\Pr\{C\} = \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1} A_3^3}{9^3}$ 相加得 $\frac{156}{729}$.

法二：对立事件

不妨设三个数中出现 5 的事件为 A ，出现偶数的事件为 B 。

$$\begin{aligned}\because \Pr\{AB\} &= 1 - \Pr\{\overline{AB}\} \\ \therefore &= 1 - \left(\Pr\{\overline{A}\} + \Pr\{\overline{B}\} - \Pr\{\overline{A}\overline{B}\} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{8^3}{9^3} + \frac{5^3}{9^3} - \frac{4^3}{9^3} \right) \\ &= \frac{156}{729}\end{aligned}$$

法三：另一种分情况讨论（笔者的分法）

1. $A = \{\text{三个数中有两个相同的}\}$
2. $B = \{\text{三个数全不同}\}$
 - 2.1. $B_1 = \{\text{三个数全不同且有两个偶数}\}$
 - 2.2. $B_2 = \{\text{三个数全不同且有两个奇数}\}$
 - 2.3. **!! 此项必须要细分成上述两项，一起算会重!!**（惨痛教训

那么有 $\Pr\{A\} = \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{9^3}$ $\Pr\{B_1\} = \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{9^3}$ $\Pr\{B_2\} = \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1} A_3^3}{9^3}$ 相加得 $\frac{156}{729}$.