

SCNUSoS  
《概率论与数理统计》讲义



EVAN GAO  
[evan@notch1p.xyz](mailto:evan@notch1p.xyz)

大二上  
2023

@notch1p



# CONTENTS

CHAPTER	随机事件及其概率	PAGE	2
1.1	随机事件		2
1.2	频率		3
1.3	概率		3
	概率的性质 — 3		
1.4	条件概率		4
	乘法公式 — 4 • 全概率公式 — 5		

# Chapter 1

## 随机事件及其概率

### 1.1 随机事件

#### Definition 1.1.1: Sample Space

考虑样本空间集合  $S$ , 我们有  $S := \{\text{所有样本点}\}$ .

由定义, 我们可以得到几种特殊的样本空间 :

#### Example 1.1.1 (特殊的样本空间)

- $\emptyset$  事件 : 不可能发生的事件.
- $S - \emptyset$  发生的事件.
- 基本事件  $\omega : |\omega| = 1$  i.e. 基本事件只含有一个样本点.

#### Note

由于  $\emptyset$  事件和  $S - \emptyset$  事件是互为对偶的, 我们可以得到**对偶律 (De Morgan)** :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

#### Definition 1.1.2: 和、积事件

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \text{ happen} \iff \exists i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \text{ happen} \iff \forall i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

## 1.2 频率

### Definition 1.2.1: 频率

考虑事件  $A$ , 其发生的**频率**是

$$f_n(A) := \frac{r_n(A)}{n} \in [0, 1]$$

其中频数  $\frac{r_n(A)}{n} \in [0, n]$ . 显然有  $f_n(S) = 1$ .

### Corollary 1.2.1 有限可加性

若  $A_i \cap A_j = \emptyset$  且  $i \neq j$ ,  $i, j \in [1, k]$  i.e. 互斥事件  
则有

$$f_n\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$$

## 1.3 概率

### Definition 1.3.1: 概率

(Kolmogorov 公理化定义) 设有随机试验  $E$  且与之对应的样本空间  $S$ , 考虑事件  $A$

for  $\forall A \in E$ , if

- ①  $0 \leq P(A) \leq 1$
- ②  $P(S) = 1$
- ③  $\Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A_i\}$  i.e. **可列可加性**

则称  $P$  为  $S$  上的概率.

### 1.3.1 概率的性质

由上面的定义我们能够得到概率的性质 :

1.  $\Pr\{\emptyset\} = 0$
2.  $\Pr\{\bigcup_{i=1}^n A_i\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\}$   
 $\iff \forall i, j (i \neq j \rightarrow A_i A_j = \emptyset)$
3.  $\Pr\{\bar{A}\} + \Pr\{A\} = 1$
4.  $\Pr\{A - B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}$   
 $\Rightarrow (A - B) \cap B = \emptyset$
5. (单调性)  $B \subseteq A \Rightarrow \Pr\{B\} \leq \Pr\{A\}$
6. 若满足 5, 由 4 可得  $\Pr\{A - B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{B\}$
7. (容斥原理)  $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$

## 1.4 条件概率

### Definition 1.4.1: 条件概率

设  $A, B$  是两个事件, 且  $P(A) \neq 0$ , 则称

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{AB\}}{\Pr\{B\}} \quad (1.1)$$

为在事件  $A$  发生的条件下, 事件  $B$  的**条件概率**.

### Corollary 1.4.1 条件概率之性质

概率满足的性质条件概率都满足.

### Theorem 1.4.1

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是  $n$  个互斥事件, 则有

$$\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i | A\right\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i | A\} \quad (1.2)$$

### Question 1: 证明

$$\Pr\{\bar{B}|A\} = 1 - \Pr\{B|A\} \quad (1.3)$$

*Proof:*

$$\begin{aligned} \Pr\{\bar{B}|A\} &= \frac{\Pr\{\bar{B}A\}}{\Pr\{A\}} \\ &= \frac{\Pr\{A\} - \Pr\{BA\}}{\Pr\{A\}} \\ &= 1 - \frac{\Pr\{B|A\}}{\Pr\{A\}} \\ &= 1 - \Pr\{B|A\} \end{aligned}$$



### 1.4.1 乘法公式

由条件概率的定义, 我们可以得到乘法公式:

### Theorem 1.4.2 乘法公式

$$\Pr\{A_1 A_2 \cdots A_n\} = \Pr\{A_1\} \Pr\{A_2 | A_1\} \Pr\{A_3 | A_1 A_2\} \cdots \Pr\{A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}\} \quad (1.4)$$

$$= \prod_{i=1}^n \Pr\left\{A_i | \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right\} \quad (1.5)$$

**Example 1.4.1** (「买彩票」)

第一次买中的概率为  $\frac{1}{2}$ , 第二次买中而第一次未中的概率是  $\frac{7}{10}$ , 第三次买中而前两次未中的概率是  $\frac{9}{10}$ , 求三次都未中的概率.

**Solution:** 以  $A_i (i = 1, 2, 3)$  表示事件「第  $i$  次买中」, 以  $B$  表示事件「三次都未中」, 那么

$$\begin{aligned}
 \because B &= \overline{A_1 A_2 A_3} \\
 \therefore \Pr\{B\} &= \Pr\{\overline{A_1 A_2 A_3}\} \\
 &= \Pr\{\overline{A_1}\} \Pr\{\overline{A_2} | \overline{A_1}\} \Pr\{\overline{A_3} | \overline{A_1 A_2}\} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{7}{10}\right) \left(1 - \frac{9}{10}\right) \\
 &= \frac{3}{200}
 \end{aligned}$$

**1.4.2 全概率公式****Lemma 1.4.1** 完备事件组

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是有限或可数个事件, 若其满足

1. 两两互斥
2.  $\bigcup_{i=1}^n A_i = S$

则称  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是一个完备事件组.

**Theorem 1.4.3** 全概公式

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  是一个完备事件组, 且  $\Pr\{A_i\} > 0$  for  $i$  in  $1 \dots n$ , 则对任一事件  $B$ , 有

$$\Pr\{B\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\} \Pr\{B | A_i\} \quad (1.6)$$

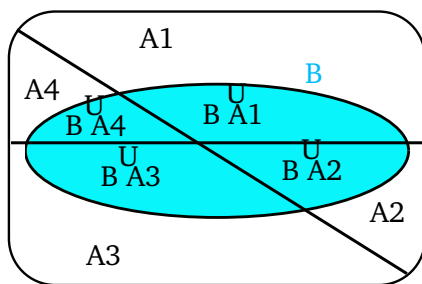


Figure 1.1: 全概公式示意图

## Question 2: P14-10

从 1 到 9 的整数中有放回地依次随机抽取 3 次, 求取出的 3 个数之积能被 10 整除的概率.

显然这三个数中必有两数为 5 和 {2, 4, 6, 8}, 因此

法一: 分情况讨论

1.  $A = \{\text{三个数里有两个 5 和一个偶数}\}$
2.  $B = \{\text{三个数里有一个 5 和两个偶数}\}$
3.  $C = \{\text{三个数里有一个 5 一个偶数和一个其他的奇数}\}$

那么有  $\Pr\{A\} = \frac{\binom{4}{1} \cdot 3}{9^3}$   $\Pr\{B\} = \frac{\binom{4}{1} \cdot 3 + \binom{4}{2} A_3^3}{9^3}$   $\Pr\{C\} = \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1} A_3^3}{9^3}$  相加得  $\frac{156}{729}$ .

☺

法二: 对立事件

不妨设三个数中出现 5 的事件为  $A$ , 出现偶数的事件为  $B$ , 那么

$$\begin{aligned}\Pr\{AB\} &= 1 - \Pr\{\overline{AB}\} \\ &= 1 - (\Pr\{\overline{A}\} + \Pr\{\overline{B}\} - \Pr\{\overline{A}\overline{B}\}) \\ &= 1 - \left(\frac{8^3}{9^3} + \frac{5^3}{9^3} - \frac{4^3}{9^3}\right) \\ &= \frac{156}{729}\end{aligned}$$

☺

法三: 另一种分情况讨论 (笔者的分法)

1.  $A = \{\text{三个数中有两个相同的}\}$
2.  $B = \{\text{三个数全不同}\}$ 
  - 2.1.  $B_1 = \{\text{三个数全不同且有两个偶数}\}$
  - 2.2.  $B_2 = \{\text{三个数全不同且有两个奇数}\}$

!! 此项须要分成上述两项, 一起算会重!! (惨痛教训)

那么有  $\Pr\{A\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{4}{1}\binom{3}{1}}{9^3}$   $\Pr\{B_1\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{9^3}$   $\Pr\{B_2\} = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}A_3^3}{9^3}$  相加得  $\frac{156}{729}$ .

☺