

概率论与数理统计讲义

SCNUSoS



Evan 'notch1p' Gao
evan@notch1p.xyz

2023-大二上

CONTENTS

CHAPTER	随机事件及其概率	PAGE	2
1.1	随机事件		2
1.2	频率		3
1.3	概率		3
	概率的性质 — 3		

Chapter 1

随机事件及其概率

1.1 随机事件

Definition 1.1.1: Sample Space

考虑样本空间集合 S ，我们有 $S := \{\text{所有样本点}\}$ 。

由定义，我们可以得到几种特殊的样本空间：

Example 1.1.1 (特殊的样本空间)

- \emptyset 事件：不可能发生的事件。
- $S - \emptyset$ 发生的事件。
- 基本事件 $\omega : |\omega| = 1$ i.e. 基本事件只含有一个样本点。

Note:-

由于 \emptyset 事件和 $S - \emptyset$ 事件是互为对偶的，我们可以得到**对偶律 (De Morgan)**：

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Definition 1.1.2: 和、积事件

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \text{ happen} \iff \exists i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \text{ happen} \iff \forall i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

1.2 频率

Definition 1.2.1: 频率

考虑事件 A ，其发生的频率是

$$f_n(A) := \frac{r_n(A)}{n} \in [0, 1]$$

其中频数 $\frac{r_n(A)}{n} \in [0, n]$. 显然有 $f_n(S) = 1$.

Corollary 1.2.1 有限可加性

若 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 且 $i \neq j, i, j \in [1, k]$ i.e. 互斥事件
则有

$$f_n\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$$

1.3 概率

Definition 1.3.1: 概率

(Kolmogorov 公理化定义) 设有随机试验 E 且与之对应的样本空间 S ，考虑事件 A

for $\forall A \in E$, if

- ① $0 \leq P(A) \leq 1$
- ② $P(S) = 1$
- ③ $\Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A_i\}$ i.e. 可列可加性

则称 P 为 S 上的概率.

1.3.1 概率的性质

由上面的定义我们能够得到概率的性质：

1. $\Pr\{\emptyset\} = 0$
2. $\Pr\{\bigcup_{i=1}^n A_i\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\}$
 $\iff \forall i, j (i \neq j \rightarrow A_i A_j = \emptyset)$
3. $\Pr\{\bar{A}\} + \Pr\{A\} = 1$
4. $\Pr\{A - B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}$
 $\Rightarrow (A - B) \cap B = \emptyset$
5. (单调性) $B \subseteq A \Rightarrow \Pr\{B\} \leq \Pr\{A\}$
6. 若满足 5，由 4 可得 $\Pr\{A - B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{B\}$
7. (容斥原理) $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$