概率论与数理统计讲义
SCNUSoS

Evan ‘notch1p’ Gao
evan@notch1p.xyz

2023-大二上

🚒🔥

Contents

Chapter 1

随机事件及其概率

1.1 随机事件

Definition 1.1.1: Sample Space

考虑样本空间集合 S，我们有 $S := \{所有样本点\}$.

由定义，我们可以得到几种特殊的样本空间：

Example 1.1.1 (特殊的样本空间)

- $\varnothing$ 事件：不可能发生的事件.
- $S - \varnothing$ 发生的事件.
- 基本事件 ω：$|\omega| = 1$ i.e. 基本事件只含有一个样本点.

Note

由于 $\varnothing$ 事件和 $S - \varnothing$ 事件是互为对偶的，我们可以得到**对偶律 (De Morgan)**：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Definition 1.1.2: 和、积事件

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ happen} \iff \exists i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \text{ happen} \iff \forall i \in [1, n] \text{ s.t. } A_i \text{ happens}$$

1.2 频率

Definition 1.2.1: 频率

考虑事件 A，其发生的**频率**是

$$f_n(A) := \frac{r_n(A)}{n} \in [0,1]$$

其中频数 $\frac{r_n(A)}{n} \in [0,n]$. 显然有 $f_n(S)=1$.

Corollary 1.2.1 有限可加性

若 $A_i \cap A_j = \varnothing$ 且 $i \neq j$, $i,j \in [1,k]$ i.e. 互斥事件
则有

$$f_n(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

1.3 概率

Definition 1.3.1: 概率

（*Kolmogorov* 公理化定义）设有随机试验 E 且与之对应的样本空间 S，考虑事件 A

$$\text{for } \forall A \in E, \text{if}$$

① $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

② $P(S) = 1$

③ $\Pr\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{A_i\}$ i.e. **可列可加性**

则称 P 为 S 上的概率.

1.3.1 概率的性质

由上面的定义我们能够得到概率的性质：

1. $\Pr\{\varnothing\} = 0$
2. $\Pr\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = \sum_{i=1}^{n} \Pr\{A_i\}$
   $\iff \forall i,j(i \neq j \rightarrow A_iA_j = \varnothing)$
3. $\Pr\{\overline{A}\} + \Pr\{A\} = 1$
4. $\Pr\{A-B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}$
   $\Rightarrow (A-B) \cap B = \varnothing$
5. （单调性）$B \subseteq A \Rightarrow \Pr\{B\} \leqslant \Pr\{A\}$
6. 若满足 5，由 4 可得 $\Pr\{A-B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{B\}$
7. （容斥原理） $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$