FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Grado en Matemáticas y Estadística

Curso académico 2022-23

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Trabajo de fin de grado

Teoría de juegos: En búsqueda de estabilidad (y robustez)

por

Manuel Grau Roldán

Tutor: Jorge González Ortega

Madrid, 15 de febrero de 2023

Índice general

Abstract

The objective of this final degree dissertation is to acquire knowledge in game theory, applications to different realistic competitive situations and the possible applications of sensitivity analysis to these situations. A practical case of realistic game theory will be solved between two companies competing for a market with similar products, although different in the eyes of consumers, which will have to make simultaneous and sequential decisions. In order to improve the likelihood of these companies making the right decision, we will apply sensitivity analysis to this model.

We will use R to solve and represent the case we study and perform the sensitivity analysis.

Resumen

El objetivo de este trabajo de fin de grado es adquirir conocimientos en teoría de juegos, sus aplicaciones a diferentes situaciones competitivas realistas y las posibles aplicaciones que tenga el análisis de sensibilidad a estas. Se resolverá un caso práctico de teoría de juegos realista entre dos empresas que compiten por un mercado con productos similares, aunque diferentes a ojos de los consumidores, donde tendrán que tomar decisiones simultáneas y secuenciales. Con el objetivo de mejorar la posibilidad de que dichas empresas tomen la decisión correcta, realizaremos una aplicación del análisis de sensibilidad a dicho problema.

Se usará R con el objetivo de resolver y representar el caso práctico y hacer el análisis de sensibilidad.

Capítulo 1

Introducción

Hay diversas situaciones en las cuales una empresa, institución o persona tiene que tomar una decisión que puede suponer una diferencia sustancial en su futuro. Para hacer esto, se busca la opción que más les conviene. En muchas ocasiones, no basta la simple intuición, por eso se creó la rama de las matemáticas de teoría de la decisión, para analizar de la mejor manera posible, mediante modelos, las diferentes situaciones, siendo capaz incluso de tener en cuenta las preferencias subjetivas presentes en estas.

Inevitablemente surgió la necesidad de no solo analizar las decisiones individuales, sino analizar cómo afectaban estas decisiones en los demás y viceversa, teniendo que evaluar los conflictos de intereses entre diferentes individuos. La teoría de juegos surgió con el objetivo de modelizar dichas situaciones y resolverlas.

Las bases de esta teoría fueron propuestas por Von Neumann y Morgenstern en su libro (Neumann y Morgenstern 1944). El matemático John Nash en su artículo (Nash 1951), desarrolló aún más esta teoría, planteó resolver los modelos de teoría de juegos mediante un equilibrio en el que a los distintos jugadores, suponiendo que sean racionales, no les interese cambiar de estrategia unilateralmente, haciendo predecible las estrategias de los diferentes jugadores. Este equilibrio se denomina equilibrio de Nash, en su honor.

Ningún modelo representa a la perfección la realidad; los modelos de teoría de juegos no son una excepción. Para estudiar cómo afectan a la solución dichas imperfecciones en los modelos existe el análisis de sensibilidad y el de incertidumbre. Diversos autores han utilizado el análisis de sensibilidad y de incertidumbre para comprobar la estabilidad de sus soluciones en teoría de juegos, de esta manera, se puede comprobar cómo varían los equilibrios de Nash tras perturbar el modelo.

Estructura de la memoria

En el capítulo 2 estudiaremos la teoría necesaria para la realización del caso práctico, lo dividiremos de tal forma que sea una progresión orgánica, con diferentes ejemplos para facilitar su asimilación.

Comenzaremos estudiando la teoría de la utilidad en la sección 2.1, donde veremos cómo formalizar matemáticamente las preferencias de una persona, con el objetivo de usarlo en las secciones posteriores, para analizar las preferencias de un jugador de la manera más lógica posible.

Seguiremos estudiando la teoría de la decisión en la sección 2.2, donde mostraremos cómo aplicar lo visto en la sección anterior a la hora de modelizar problemas de la vida real, en los que un agente tiene que tomar la mejor decisión posible a un problema planteado. También estudiaremos la actitud frente al riesgo de tomar una decisión de un agente.

En la sección 2.3 estudiaremos la teoría de juegos; esta sección es la más extensa. Veremos primero la formalización matemática de un problema de teoría de juegos y el concepto de estrategia de un jugador relacionándolo con la sección anterior, siguiendo con la definiciones de algunos tipos de juegos y cómo diferenciarlos. Proseguiremos con diferentes formas de modelización en teoría de juegos y explicaremos una variedad de metodologías que tenemos para resolver un problema de teoría de juegos. Principalmente, serán soluciones para juegos bimatriciales, el modelo de Bertrand y juegos secuenciales.

En la sección 2.4 daremos una breve definición del análisis de sensibilidad y de la incertidumbre, explicando cómo se aplicarían a casos prácticos de teoría de juegos.

En el capítulo 3 aplicaremos lo recogido en el capítulo 2 a un caso práctico. El caso práctico que haremos está motivado porque el 10 de septiembre de 2021 salió la resolución del caso de la empresa *Epic Games* contra *Apple*. Durante el juicio salió a la luz información sobre un problema de la industria, *Epic Games* quería que los jugadores de su famoso juego *Fornite* pudieran jugar entre sí, sin importar la plataforma desde la que jugaban, es decir, permitir por ejemplo que alguien con un teléfono pudiera jugar con otro con una videoconsola.

Epic Games se dirigió a *Nintendo*, *Microsoft* y *Sony*, propietarias de las videoconsolas más jugadas, generando un problema de teoría de juegos para dichas compañías. Salió a la luz que *Sony* al principio se negó, pero posteriormente cambió de idea. Este problema y la decisión de *Sony* motivó este trabajo, sirviendo como inspiración para el caso práctico que resolveremos. Mi intención original fue buscar la razón por la que se dio dicho cambio de decisión, pero analizar causalidad es muy complicado. Puede que la decisión tomada por *Playstation* no fuera robusta. Haremos un análisis de sensibilidad del caso práctico, donde intentaremos ver cuáles son los posibles factores que influyeron en que cambiara de idea.

Dada la naturaleza del problema descrito, muchos de los datos necesarios para resolverlo están ocultos, además de que la complejidad del problema real podría escaparse a las capacidades de un estudiante de grado. Por ello, muchos de los datos serán ficticios y otros no se tendrán en cuenta o se simplificarán, de modo que no se pretende representar el problema real de manera fidedigna.

En el capítulo 4 hablaremos de las conclusiones de esta memoria, resumiendo lo visto. Estudiaremos los puntos fuertes y las limitaciones del trabajo y destacaremos las conclusiones del caso práctico.

Los diferentes códigos en R que usaremos para resolver y graficar los diferentes pasos del caso práctico y su posterior análisis de sensibilidad y de incertidumbre, los podremos encontrar en el siguiente repositorio de *Github* `https://github.com/nothng-k/programas-y-latex`.

Objetivos y metodología

La siguiente memoria se centrará en adquirir los principios básicos de teoría de juegos y análisis de sensibilidad, creando un marco teórico desde el que estudiar un caso de economía de mercado, realizando diferentes técnicas de análisis de sensibilidad para estudiar la estabilidad y la incertidumbre de la solución del modelo. Para poder adquirir dichos principios necesitaremos una breve introducción a las teorías de la decisión y la utilidad.

Para resolver el caso práctico usaremos código de R donde programaremos un método basado en el algoritmo de coordenadas cíclicas con el objetivo de resolver el modelo de Bertrand. Del paquete de Python Nashpy usaremos la función *support_enumeration* para resolver los problemas bimatriciales; esta función devuelve los equilibrios de Nash usando el algoritmo de enumeración de los soportes. Llamaremos a la función desde R usando el paquete *replicate*, para permanecer en el mismo entorno de desarrollo. Para resolver los juegos secuenciales usaremos el algoritmo de inducción hacia atrás.

Capítulo 2

Base teórica

En este capítulo daremos una breve y necesaria introducción a las teorías de la decisión y de la utilidad. Posteriormente daremos las nociones de teoría de juegos y análisis de sensibilidad, que aplicaremos en el caso práctico.

2.1. Teoría de la utilidad

En esta sección daremos una breve introducción a la teoría de la utilidad. Esta teoría es muy útil, ya que te permite definir matemáticamente las preferencias subjetivas y objetivas que tiene la gente en su día a día. Usaremos principalmente como referencia el primer capítulo del libro (Mas-Colell, D.Whinston y R.Green 1995)

Empezaremos explicando las relaciones preferenciales. Dado un conjunto de alternativas, formalmente, una relación preferencial es una relación binaria que permite la comparación entre dos alternativas de dicho conjunto.

Definición 1 (Relación preferencial)**.** *Sean x e y dos estados de un cierto espacio de estados, representaremos que x es al menos tan preferible como y mediante $x \succeq y$.*

Definición 2 (Relación preferencial estricta)**.** *Sean x e y dos estados de un cierto espacio de estados, diremos que x es preferible a y, representándolo como $x \succ y$ si y solo si $x \succeq y$ pero no se da $x \preceq y$.*

Definición 3 (Relación indiferente)**.** *Sean x e y dos estados de un cierto espacio de estados, diremos que x es indiferente a y, representándolo como $x \sim y$ si y solo si se da $x \succeq y$ e $y \succeq x$.*

De esta forma podemos definir las preferencias.

Definición 4 (Preferencia racional)**.** *Una relación de preferencia es racional si se cumplen las siguientes dos propiedades, dado el espacio de estados X:*

(I) Completitud: Para todo $x, y \in X$ tenemos que $x \preceq y$ o $x \succeq y$ (o, no excluyente)

(II)Transitividad: Para todo $x, y, z \in X$ tenemos que si $x \preceq y$ e $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$.

El siguiente paso es asignar valores numéricos de manera ordenada mediante una función de utilidad para poder manejar más cómodamente las preferencias.

Definición 5 (Función de utilidad)**.** *Una función $u : X \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa una relación si, para todo $x, y \in X$:*

$$x \preceq y \iff u(x) \leq u(y)$$

Proposición 1. *Una relación preferencial puede ser representada mediante una función de utilidad solo si es racional.*

Pudiendo quedar así definidas numéricamente las preferencias de una persona.

2.2. Teoría de la decisión

Pasaremos a una introducción de la teoría de la decisión. Estando esta estrechamente relacionada con la teoría de la utilidad, la teoría de la decisión analiza la forma de seleccionar una de las alternativas entre varias posibles de manera racional. En este capítulo como referencia el libro (Pérez-Navarro, Jimeno-Pastor y Cerdá 2004).

Tenemos que tomar decisiones constantemente en nuestro día a día y no siempre sabemos cuál es la decisión correcta, ya que puede llegar a ser complejo o nos puede resultar complicado analizar las situaciones de manera lógica y razonable. Ya hemos visto cómo plasmar matemáticamente las preferencias de cada uno, ahora vamos a analizar como plantear los problemas asociados.

Un problema de decisión se compone de diversos elementos. Tenemos que modelizar las diferentes opciones que hay, la situación en la que nos encontramos o nos encontraremos y lo beneficioso que nos resulten las diversas alternativas.

Definición 6 (Problema de decisión)**.** *Un problema de decisión se encarga de analizar la forma de seleccionar una de las alternativas, en cierta situación, de forma racional. Los elementos esenciales de un problema de decisión son:*

1. *Un conjunto A de acciones o alternativas entre las cuales el decisor debe elegir la que le parezca mejor.*

2. *Un conjunto Θ de estados de la naturaleza que describen las circunstancias que pueden afectar o influir en la decisiones a adoptar.*

3. *Una función de utilidad $u : A\times\Theta \to \mathbb{R}$ de modo que para $\theta \in \Theta$ y $a \in A$, $u(\theta, a)$ mide las consecuencias de cada acción a cuando el estado de la naturaleza es θ.*

Nótese que en (1) y en (2) los conjuntos pueden ser finitos, numerables, continuos o arbitrariamente complejos

Puede darse el caso de que el conjunto Θ tenga asociado una distribución de probabilidad (puede ser objetiva o subjetiva).

Definición 7 (Lotería simple)**.** *Dado un conjunto de estados de la naturaleza $\Theta = \{\theta_1, ..., \theta_N\}$ $N \in \mathbb{N}$ entonces se llama lotería a la lista $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_N\}$, $\lambda_n \geq 0$ $\forall n \in \{1, .., N\}$ y $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n = 1$, donde λ_n se interpreta como la probabilidad de que el suceso θ_n ocurra.*

El concepto de lotería se puede extender en general mediante la función de distribución de la variable aleatoria de los estados de la naturaleza, si esta no tiene estados numerables.

Lo siguiente que nos planteamos es cómo podríamos hallar la mejor opción. Dada la posible naturaleza aleatoria del problema es necesario definir qué entendemos como mejor estrategia, ya que esto puede variar de manera subjetiva. A una persona puede que no le interese una opción por ser muy variable, prefiriendo otras opciones más seguras y viceversa. Esto se verá reflejado en la función de utilidad, empezaremos definiendo la utilidad esperada. Usaremos el libro (Vitoriano 2007) como referencia.

Definición 8 (Utilidad esperada)**.** *Siendo Λ la lotería sobre la variable aleatoria X y $u : X \to \mathbb{R}$ la función de utilidad que le hemos asociado, llamamos utilidad esperada a la esperanza matemática de $u(X)$, es decir, a $U = E[u(X)]$.*

Suponiendo que el problema tenga una función de utilidad aislada de subjetividades, a la que llamaremos función de valor $v : X \to \mathbb{R}$, como puede ser el dinero, llamaremos a su utilidad esperada asociada valor esperado.

Habiendo definido la utilidad esperada y el valor esperado, dado que una función de utilidad representa las preferencias, podemos definir su equivalencia de certeza.

Definición 9 (Equivalente de certeza)**.** *Sea Λ la lotería sobre la variable aleatoria X, $u : X \to [0, 1]$ la función de utilidad que le hemos asociado y $v : X \to [0, 1]$ su función de valor, definimos como aversión al riesgo $AR : X \to [-1, 1]$ a:*

$$AR(x) = E[v(x)] - E[u(x)]$$

Definimos:

- $AR(X) > 0$*: Decimos que el agente tiene aversión al riesgo.*

- $AR(X) = 0$*: Decimos que el agente es neutral frente al riesgo.*
- $AR(X) < 0$*: Decimos que el agente tiene propensión por el riesgo.*

En el caso de que las funciones de valor y de utilidad no estuvieran entre 0 y 1 se reparametrizarían para que se cumpla dicha condición. De esta forma tenemos una manera de describir cuál es la aversión al riesgo de un individuo.

2.3. Teoría de juegos

En esta sección usaremos como referencia los libros (Mas-Colell, D.Whinston y R.Green 1995) , el libro (Pérez-Navarro, Jimeno-Pastor y Cerdá 2004) para gran parte de la sección y los siguientes artículos (Shachter 1986), (Gracia Blázquez-Vallejo y Gámez-Jiménez 2006) y (González-Ortega, Ríos-Insua y Cano 2018).

Hasta ahora hemos analizado los problemas de decisión individuales. Podemos interpretar como una progresión razonable del problema añadir más agentes, es decir, además de una naturaleza aleatoria que puede alterar la decisión que más nos conviene, añadimos a otras personas con sus propios intereses que pueden alterarla.

En teoría de juegos cada individuo intenta conseguir el mejor resultado posible (maximizar su utilidad), teniendo en cuenta que el resultado del juego no depende sólo de sus acciones, sino también de las acciones de los otros individuos. Para maximizar la utilidad supondremos que los individuos son racionales, así podremos buscar un equilibrio en el que a los individuos no les convenga cambiar su decisión.

Definición 10 (Juego)**.** *Definimos juego como la representación formal de una situación donde un número de individuos, mayor que uno, interactúan de manera interdependiente. Los elementos básicos de un problema en teoría de juegos son:*

1. *Los jugadores: Serán los que tomarán decisiones que modifiquen el juego (se puede considerar a la naturaleza aleatoria como uno).*
2. *Las reglas: Definirá lo que puede y no puede hacer cada jugador y en qué momento.*
3. *Las consecuencias: Definirán cuáles son las consecuencias de cada acción de cada jugador.*
4. *Los beneficios: Definen las preferencias de cada jugador sobre los posibles resultados; normalmente se usarán funciones de utilidad para definirlos.*

Así podemos modelizar los problemas de teoría de juegos. Esta definición puede variar dependiendo de la referencia que se esté usando.

Definición 11 (Conjunto de información de un jugador)**.** *Un conjunto de información H de un jugador, es un conjunto de todas las decisiones, a las que llamaremos nodos de decisión, que son indistinguibles para este en cierto punto del juego. Todos los conjuntos de información H deben cumplir las siguientes propiedades:*

- *$\forall x \in H$ nodo decisión, x pertenece al mismo jugador.*
- *$\forall x$ nodo de decisión, x pertenece a uno y solo uno de los conjuntos de información del juego.*
- *Sea el conjunto de las posibles acciones del juego por $\mathcal{A}$ y el conjunto de posibles acciones dado un nodo x por $C(x) \subseteq \mathcal{A}$. Dado $x \in H$, $\forall y \in H$ $C(y) = C(x)$.*

Denotamos el conjunto de información que contiene el nodo de decisión x por $H(x)$.

Definición 12 (Estrategia)**.** *Si denotamos el conjunto de información recopilada del jugador i por $\mathcal{H}_i$, el conjunto de las posibles acciones del juego por $\mathcal{A}$ y el conjunto de posibles acciones dada la información H por $C(H) \subseteq \mathcal{A}$. Entonces definimos la estrategia de un jugador i como la función $s_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{A}$ con la propiedad de que $s_i(H) \in C(H) \quad \forall H \in \mathcal{H}_i$.*

2.3.1. Clasificaciones de juegos

Hay muchas formas de clasificar los juegos, aquí expondremos las más populares, usando como referencia el libro de (Pérez-Navarro, Jimeno-Pastor y Cerdá 2004).

Definición 13 (Juegos cooperativos y no cooperativos)**.** *En los juegos cooperativos se analizan las posibilidades de que algunos o todos los jugadores lleguen a un acuerdo que esté garantizado y no puedan incumplir, mientras que en el enfoque no cooperativo se analiza qué decisiones tomaría cada jugador en ausencia de acuerdo previo o en presencia de un acuerdo que puedan incumplir. Nosotros nos centraremos en estos últimos.*

Un ejemplo de juego no cooperativo serían las damas; los jugadores se enfrentan el uno al otro y no les beneficia cooperar.

Definición 14 (Juego simultáneo y secuencial)**.** *En los juegos simultáneos los jugadores mueven a la vez o no saben los movimientos de los otros jugadores a la hora de tomar sus decisiones, mientras que en los juegos secuenciales los jugadores tienen algún conocimiento de las acciones previas. Los jugadores no tienen por qué tener una información perfecta, es suficiente con que tengan algo de información.*

Por ejemplo, el ajedrez se trata de un juego secuencial, ya que un jugador mueve después del otro, mientras que, *"piedra, papel o tijeras"* es un juego simultáneo.

Los juegos simultáneos y los secuenciales se pueden entremezclar, dando lugar a juegos de gran interés como veremos en el caso práctico.

Definición 15 (Juego con información perfecta y con información imperfecta)**.** *Los juegos con información imperfecta son los juegos secuenciales en los que los jugadores no tienen todos la misma información del juego, mientras que en los juegos con información perfecta sí.*

Retomando el ejemplo del ajedrez, este tendría información perfecta ya que en todo momento se sabe qué ha realizado el otro jugador, mientras que en el póker no sabemos qué cartas poseen los contrincantes.

Definición 16 (Juego de suma cero)**.** *Es aquel juego que al sumar todos los beneficios de todos los jugadores siempre devuelve la misma constante.*

Es decir, los recursos disponibles no se ven alterados por el juego. Como en una partida de póker sin la presencia de la banca, el dinero total en la mesa al final de la partida no cambia, solo cambia de manos.

Hay muchas más formas de clasificación de juegos, como los juegos bayesianos o los juegos de información completa, pero esto es suficiente para desarrollar el trabajo.

2.3.2. Modelos de representación

Hay diversas formas de representar un juego, las clásicas son dos: la forma normal y la forma extensiva (o de árbol). Además, introduciremos otra forma de representación llamada diagramas de influencia, usaremos como referencia (Gracia Blázquez-Vallejo y Gámez-Jiménez 2006)

Forma normal

La forma normal de representación usa matrices, siendo la manera más sencilla para modelizar los juegos simultáneos.

Consiste en una matriz donde las posibles decisiones de un jugador corresponden a las fila de la matriz y las posibles decisiones del otro jugador corresponden a las columnas. Cada casilla de la matriz representa los diferentes resultados del juego con dos valores en su interior, uno a la izquierda y otro a la derecha, siendo el valor que aparece a la izquierda el beneficio que le corresponde al jugador de las filas y el que aparece a la derecha el beneficio del jugador de las columnas.

Así tendríamos con dos opciones para elegir cada jugador:

		Jugador B	
		Opción 1	Opción 2
Jugador A	Opción 1	$A_{1,1}, B_{1,1}$	$A_{1,2}, B_{1,2}$
	Opción 2	$A_{2,1}, B_{2,1}$	$A_{2,2}, B_{2,2}$

Figura 2.1: Ejemplo de representación en forma normal

Donde el jugador A es el jugador de las filas que toma la decisión $i \in \{1, 2\}$, y el jugador B es el jugador de las columnas que toma la decisión $j \in \{1, 2\}$, con beneficios $A_{i,j}$ y $B_{i,j}$ respectivamente.

Ejemplo 1 (Juego de las monedas)**.** Dos jugadores (1 y 2) depositan de manera simultánea dos monedas de un euro sobre una mesa. Si hay dos caras o dos cruces, el jugador 1 recoge los dos euros, mientras que si hay una cara y una cruz, el jugador 2 se lleva los dos euros.

Este juego lo representaríamos en forma normal de la siguiente forma:

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	1,-1	-1,1
	Cruz	-1,1	1,-1

Figura 2.2: Juego de las monedas (en forma normal)

Forma Extensiva

La forma extensiva de representación es más versátil que la forma normal, con esta se puede representar casi cualquier juego que se nos ocurra.

Con esta forma de representación usamos árboles, donde cada nodo está asociado un jugador o a un estado de la naturaleza, que tendrá que ser escrito al lado del nodo. Los arcos representan las diferentes acciones que puede tomar el jugador representado por el nodo del que salen, en el caso de que halla infinitas opciones se usaría un cono en su lugar. Al igual que con el nodo, al lado de las aristas hay que escribir de qué decisión se trata. Los arcos dan lugar a otros nodos, salvo cuando una decisión dé lugar a la finalización del juego, en cuyo caso deben aparecer los resultados del juego para cada jugador dependiendo de todas las decisiones que preceden.

Así tendríamos, con dos opciones para elegir cada jugador, el siguiente juego en forma extendida:

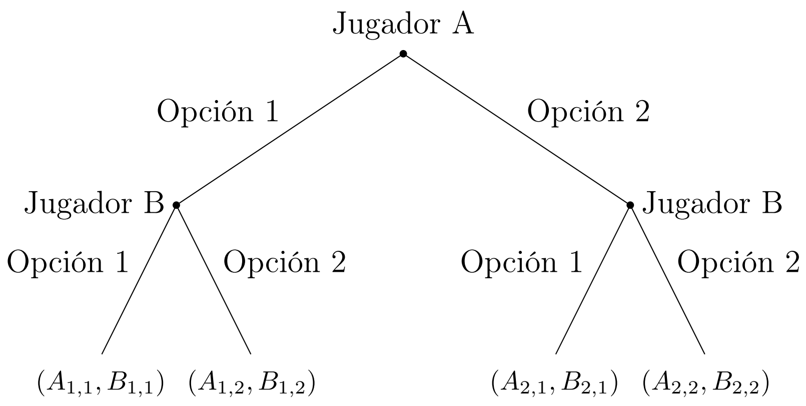


Figura 2.3: Ejemplo de representación en forma extendida

Vemos que A elige primero un $i \in \{1, 2\}$ y luego B elige conociendo i un $j \in \{1, 2\}$ con beneficios $A_{i,j}$y $B_{i,j}$ respectivamente.

Podemos representar un juego simultáneo mediante una línea discontinua que una los nodos pertenecientes a un mismo conjunto de información de un jugador, indicando que dichas decisiones, asociadas a dichos nodos, se toman sin conocer la decisión del nodo previo.

Ejemplo 2. Cojamos el mismo juego de antes, el ejemplo de las monedas 1, la representación en forma extensiva sería la siguiente:

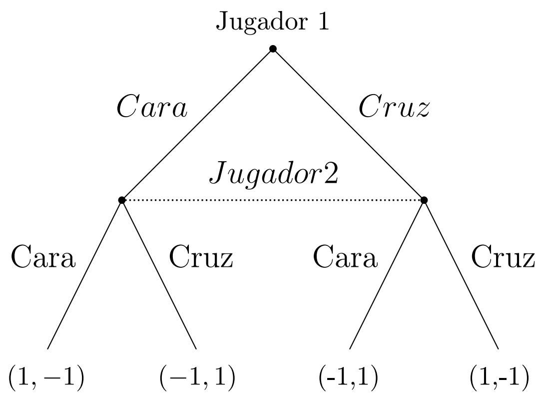


Figura 2.4: Juego de las monedas en forma extensiva

Diagramas de influencia

Ahora vamos a exponer una forma de representación simple, compacta e intuitiva. Este método de representación que se suele usar en redes bayesianas fue introducido para teoría de juegos por Shachter en (Shachter 1986) , artículo que usaremos como referencia, aunque solo se usaba para un único agente. Posteriormente diferentes investigadores generalizaron para el caso multiagente (MAID por sus siglas en inglés); usaremos como referencia la explicación del artículo (González-Ortega, Ríos-Insua y Cano 2018) y (Koller y Milch 2003) para explicar estos.

Un diagrama de influencia se trata de un grafo dirigido donde los nodos son:

1. Cuadrados: Llamados nodos de decisión, usados para representar una decisión.
2. Hexágonos o rombos: Llamados nodos de utilidad, representan la utilidad obtenida.
3. Círculos: Llamados nodos de probabilidad, usados para representar un evento aleatorio.

Dichos nodos se relacionan entre si mediante flechas (o arcos):

1. Flechas continuas o condicionales: Si se dirigen a un nodo de probabilidad significa que dicho nodo de probabilidad está condicionado por el nodo anterior, y si se dirige a un nodo de utilidad implica que la utilidad recibida depende del nodo anterior.
2. Flecha discontinua o de información: Se dirige a un nodo de decisión e indica que dicha decisión se toma tras conocer el resultado del nodo anterior.

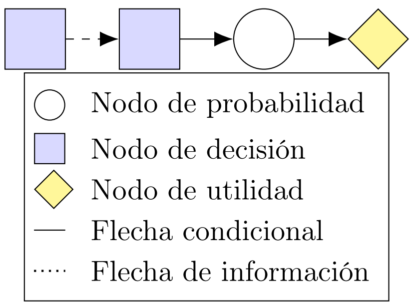


Figura 2.5: Leyenda

Los diagramas bi-agente (BAID) consisten en dos diagramas de influencia acoplados, representando los nodos de cada agente mediante un código de colores, en el caso de múltiples agentes se les llama (MAID).

Ejemplo 3 (Juego de las monedas en forma BAID)**.** Cojamos otra vez el mismo juego de las monedas 1, la representación en forma de BAID es:

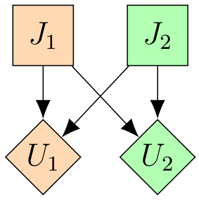


Figura 2.6: Juego de las monedas en forma de BAID

Siendo J_1 la decisión tomada por el jugador, J_2 la decisión tomada por el jugador 2, 1 si es cara y -1 si es cruz y

$$U_1(J_1, J_2) = J_1 * J_2$$

$$U_2(J_1, J_2) = -J_1 * J_2$$

las funciones de utilidad del jugador 1 y del jugador 2 respectivamente.

2.3.3. Resolución de problemas

Hay diversas formas de resolver los diferentes problemas de teoría de juegos, cada una se centra en un aspecto. Aquí expondremos las más importantes e introduciremos el concepto de equilibrio de Nash. Presentaremos primero las resoluciones para juegos simultáneos y posteriormente para los juegos secuenciales.

Métodos resolutivos juegos simultáneos

Primero resolveremos el problema mediante argumentos de dominación y luego introduciremos el concepto de equilibrio de Nash. Para resolver los juegos simultáneos los representaremos en forma normal por ser esta la manera más adecuada. Usaremos como referencia el libro de (Pérez-Navarro, Jimeno-Pastor y Cerdá 2004).

Definición 17 (Estrategia dominada)**.** *En el juego $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, donde u_i es la función de utilidad del jugador i y S_i su conjunto de posibles acciones, sea s_i' una estrategia del jugador i. Decimos que s_i' es una estrategia estrictamente dominada cuando:*

$$u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, ..., s_n) \geq u_i(s_1, ..., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, ..., s_n)$$

se cumple para toda estrategia s_i de dicho jugador y para toda toda combinación de estrategias de los otros jugadores. (Es decir, no le conviene usar la estrategia s_i tanto o menos, hagan lo que hagan los otros jugadores.)

Si todas las desigualdades se cumplen de manera estricta diremos que es estrictamente dominada.

Una estrategia que no es dominada por ninguna otra se llama estrategia dominante

Nótese que este tipo de estrategias no tienen por qué existir, ni tienen por qué ser únicas.

De esta forma, si encontramos una estrategia dominante, podríamos considerarla como una solución al problema de teoría de juegos. Un ejemplo clásico es el del dilema del prisionero. En este se ve claro cuál es la estrategia dominante.

Ejemplo 4 (Dilema del prisionero)**.** La policía arresta a dos sospechosos, pero no hay pruebas suficientes para condenarlos. Tras haberlos separado, la policía les plantea colaborar. Si confiesan ambos, se les condena a ambos a una pena de 6 años de prisión. Si confiesa uno y el otro no, el que confiese saldrá libre, mientras que el otro será condenado a 10 años de prisión. Si ambos deciden no confesar solo se les podrá condenar a 1 año de prisión. Expresando el juego en forma normal nos quedaría:

		Sospechoso 2	
		C	H
Sospechoso 1	C	-1,-1	-10,0
	H	0,-10	-6,-6

Figura 2.7: Dilema del prisionero

Siendo H para hablar y C para callar, podemos ver que si llamamos u_1 a la función de utilidad del sospechoso 1, en el caso de que el sospechoso 2 callara, tendríamos:

$$u_1(H, C) = 0 > -1 = u_1(C, C)$$

Y para el caso en el que el sospechoso 2 hablara tendríamos:

$$u_1(H, H) = -6 > -10 = u_1(C, H)$$

Por lo que para el sospechoso 1 la estrategia estrictamente dominante es H (hablar) y de manera análoga para el sospechoso 2 su estrategia dominante es también H.

Encontrar la estrategia dominante puede llegar a ser complicado, además de que este método no se puede usar siempre. Por ello hay otros métodos basados en estrategias dominantes y dominadas que no tienen por qué dar una estrategia dominante, pero pueden dar una solución al problema.

Uno de estos métodos resolutivos es el de eliminación iterativa estricta, consistente en eliminar para cada jugador aquellas estrategias que están estrictamente dominadas por las demás. Al ser opciones peores, generamos otro problema sin tener en cuenta dichas estrategias. Si repetimos hasta que no se elimine ninguna estrategia, nos quedará para cada jugador un conjunto de estrategias más reducido. No tiene por qué dar una solución concreta, pero reducir las opciones es útil.

Hay muchos más métodos iterativos que dan soluciones mediante argumentos de dominación, cada uno con sus ventajas e inconvenientes.

Definición 18 (Equilibrio de Nash para estrategias puras). *Consideremos un juego* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$*, entonces* $s^* = (s_1^*, ..., s_i^*, ..., s_n^*)$ *es un equilibrio de Nash si,*

$$E[u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)] \geq E[u_i(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)]$$

$\forall i \in \{1, ..., n\}$ *y* $\forall s_i \in S_i$.

Es decir, un equilibrio de Nash se trataría de un punto en el que ninguno de los jugadores desea cambiar unilateralmente de opción.

Pese a que el concepto de equilibrio de Nash en estrategias puras es uno de fácil interpretación, tal y como hemos mencionado, no siempre da solución a los problemas, ya que pueden existir más de uno de estos. Los jugadores pueden tener una preferencia por alguno de estos equilibrios. Por ello existe el concepto de estrategia mixta, que se puede considerar una generalización del primero, y el cual introduce aleatoriedad en el concepto de estrategia.

Definición 19 (Estrategia mixta). *Sea* $S_i = \{s_i^1, ..., s_i^k\}$ *el conjunto de estrategias puras del jugador i , definimos como estrategia mixta del jugador i a toda lotería* $\sigma_i = (\sigma_i^1, ..., \sigma_i^k)$ *sobre* S_i*. Siendo* σ_i *la estrategia consistente en jugar* s_i^k *con probabilidad* σ_i^j *para* $j \in \{1, ..., k\}$*. Denotamos como* $\Delta(S_i)$ *al conjunto de todas las estrategias mixtas de* S_i*.*

Se puede asignar probabilidad 1 a una de las opciones y 0 a las demás, es decir, las estrategias mixtas contienen a las estrategias puras.

Ahora introduciremos el concepto de equilibrio de Nash en estrategias mixtas y lo usaremos para encontrar soluciones del problema de teoría de juegos mediante argumentos de equilibrio.

Definición 20 (Equilibrio de Nash para estrategias mixtas). *Consideremos un juego* $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$*, entonces* $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_i^*, ..., \sigma_n^*)$ *es un equilibrio de Nash si:*

$$E[u_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)] \geq E[u_i(\sigma_1^*, ..., \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, ..., \sigma_n^*)]$$

$\forall i \in \{1, ..., n\}$ *y* $\forall \sigma_i \in \Delta(S_i)$

Así en el ejemplo de las monedas 1, el equilibrio de Nash sería $\sigma^* = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$

Algoritmo de enumeración de los soportes

Presentaremos un algoritmo resolutivo para juegos bimatriciales de dos personas, es decir, juego simultáneos de dos jugadores. Usaremos como referencia (Nisan et al. 2007).

Proposición 2 (Condición de mejor respuesta)**.** *Consideremos un juego bimatricial de dos jugadores, donde los beneficios de cada jugador vienen dados por las matrices* $A_{m\times n}$ *y* $B_{m\times n}$*, para* $m, n \in \mathbb{N}$.

Un par de estrategias mixtas (x, y)*, donde* $x = (x_1, ..., x_n)$*,* $y = (y_{n+1}, ..., y_{n+m})$*,* $N = \{1, ...n\}$*,* $M = \{n + 1, ...n + m\}$ *y definimos como soporte de una estrategia* x *a* $S(x) = \{i|x_i > 0\}$*. Entonces* (x, y) *son equilibrio de Nash, si y solo si:*

$$\forall i \in S(x) \qquad (Ay)_i = max\{(Ay)_k|k \in N\} = u$$

$$\forall j \in S(y) \qquad (x^T B)_j = max\{(x^T B)_k|k \in M\} = v$$

Es fácil comprobar con esta proposición que un juego bimatricial tiene un número finito de equilibrios de Nash, además de que nos indica que el soporte de dichos soportes forman parte de un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Definición 21 (Juego bimatricial no degenerado)**.** *Un juego bimatricial con* A *y* B *como matrices de beneficios, se considera no degenerado si y solo si para cualquier estrategia* y'*, que es la mejor respuesta a la estrategia* x*,* $|S(x)| \geq |S(y')|$ *y para cualquier estrategia* x'*, que es la mejor respuesta a la estrategia* y*,* $|S(y)| \geq |S(x')|$ *.*

Es decir, en un juego no degenerado bimatricial, cada par de estrategias de un equilibrio de Nash tiene el mismo número de estrategias en su soporte. Mediante este principio funciona el siguiente algoritmo resolutivo.

Teorema 1 (Algoritmo de enumeración de los soportes)**.** *Sea un juego bimatricial no degenerado, el siguiente algoritmo nos devuelve todos los equilibrios de Nash:*

Para cada $k \in \{1, ..., min(m, n)\}$ *y para cada par* $(I, J) \subseteq (N, M)$*, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\sum_{i\in I}(x_i B_{i,j}) = v \quad \forall j \in J \qquad \sum_{i\in I} x_i = 1 \qquad \forall\ i \in I \qquad x_i \geq 0$$

$$\sum_{j\in J}(A_{i,j} y_j) = u \quad \forall i \in I \qquad \sum_{j\in J} y_j = 1 \qquad \forall j \in J \qquad y_j \geq 0$$

Donde $u = max\{(Ay)_k|k \in N\}$ *y* $v = max\{(x^T B)_k|k \in M\}$*.*

En el caso de que este sistema de ecuaciones no tenga solución para un soporte, implica que no hay equilibrio de Nash para dicho soporte.

Este algoritmo nos devuelve todos los posibles equilibrios de Nash, pero no funciona para las matrices degeneradas.

Modelo de duopolio de Bertrand

Presentaremos un modelo de juego simultáneo que nos resultará de gran ayuda para resolver el caso práctico y mostraremos mediante un ejemplo cómo se suelen resolver estos problemas. En esta sección usaremos como referencia los libros (Vega-Redondo 2000) y (Vitoriano 2007).

En el modelo de Bertrand dos empresas compiten en un mercado. Cada empresa vende productos de calidades diferentes y puede elegir el precio al que los vende. La demanda de los productos de cada empresa es menor cuanto mayor sea el precio de estos y menor sea el precio de la otra empresa con producto semejante. Cada empresa tiene a su vez un coste de producción del artículo y suponemos que tiene capacidad de producción ilimitada. No hay retrasos en el envío del producto y solo se produce lo que se vende. Por último, las empresas no pueden pactar el precio del productor; no hay cooperación. Se trata de un modelo de economía de competitiva.

Vamos a ver un ejemplo con este modelo y vamos a resolverlo:

Ejemplo 5 (Ejemplo del modelo de Bertrand)**.** Dos empresas compiten por un mercado. Hay diferencias entre los productos, siendo i una de las dos empresas y j la otra, con p_i el precio del producto de la empresa i, y p_j el precio del producto de la empresa j. La cantidad de clientes que compren el producto en la empresa i vendrá determinado por la siguiente función, equivalente para la otra empresa:

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i - b * p_j$$

donde $0 < b \leq 1$ es el grado de sustituibilidad entre los dos productos, siendo el mismo para ambos, y $a > 0$ una constante asociada a los compradores por los que compiten.

Por lo que el beneficio que tiene la empresa i será:

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j) * (p_i - c) = (a - p_i - b * p_j) * (p_i - c)$$

Donde el coste de producción para ambas empresas es c.

Buscamos encontrar un punto p_j y p_i tal que el precio, sea óptimo para ambas empresas. Nuestro objetivo ahora es obtener el precio óptimo para la empresa i, suponiendo un precio fijo de la otra empresa p_j,

$$max_{p_i \geq 0} \pi_i(p_i, p_j) = max_{p_i \geq 0}(a - p_i - b * p_j) * (p_i - c)$$

Para hallar el máximo primero derivaremos $\pi_i(q_i, q_j)$ sobre p_i e igualaremos a cero:

$$\frac{\partial \pi_i(p_i, p_j)}{\partial p_i} = a - 2p_i + b * p_j + c = 0$$

Obtenemos que:

$$p_i = \frac{a + b * p_j + c}{2}$$

Haciendolo de manera análoga para la otra empresa obtenemos el sistema de ecuaciones lineal con dos incógnitas:

$$\begin{cases} p_j = \frac{a+b*p_i+c}{2} \\ p_i = \frac{a+b*p_j+c}{2} \end{cases}$$

despejamos respecto a p_j en la segunda ecuación:

$$\frac{a + b * p_i + c}{2} = \frac{2p_i - a - c}{b}$$

$$b(a + b * p_i + c) = 2(2p_i - a - c)$$

$$(a + c) * (2 + b) = p_i * (b^2 + 4)$$

como $b^2 - 4 = (2 - b) * (2 + b)$:

$$p_i^* = \frac{a + c}{2 - b}$$

y análogamente para j:

$$p_j^* = \frac{a + c}{2 - b}$$

Derivamos otra vez para comprobar que es máximo:

$\frac{\partial \pi_i(p_i,p_j)^2}{\partial p_i^2} = -2$

Negativo, por tanto es un máximo y tenemos como equilibrio de Nash $(\frac{a+c}{2-b}, \frac{a+c}{2-b})$.

Este método analítico de resolverlo requiere una función beneficio en forma convexa para ambos jugadores,. Dado que la función beneficio suele ser muy complicada de derivar, se suelen usar diferentes métodos computacionales para obtener el equilibrio de Nash, no pudiendo garantizar siempre dicha condición.

Métodos resolutivos juegos secuenciales

Ahora estudiaremos el caso del problema de los juegos secuenciales. Usaremos la forma de representación extensiva, si bien todo lo mencionado se puede usar de manera equivalente para la forma de representación BAID.

Empezaremos con el concepto de subjuego. Si dividimos el problema en otros menos complejos independientes nos será más sencillo resolver el problema. En esta sección volveremos a usar como referencia el libro (Pérez-Navarro, Jimeno-Pastor y Cerdá 2004).

Definición 22 (Subjuego)**.** *Una parte de un juego extensivo $G' \subseteq G$ es un subjuego con inicio en x si se cumplen las dos siguientes propiedades:*

1. *Contiene al nodo x y a todos los nodos que siguen a x, y sólo a ellos.*
2. *El nodo x es un conjunto de información unitario.*
3. *Si el nodo y pertenece a G', también pertenecen a G' todos los nodos del conjunto de información al que pertenece y, es decir, G' no rompe ningún conjunto de información.*

Es decir, dichos subjuegos los podemos analizar de forma independiente. Nótese que también se consideran subjuegos aquellos en los que solo interviene uno de los jugadores, es decir, un problema de decisión.

Ahora introduciremos un nuevo concepto de equilibrio para juegos extensivos.

Definición 23 (Equilibrio de Nash en subjuegos)**.** *Dado un juego secuencial, se dice que una estrategia es un equilibrio de Nash en subjuegos si es a su vez equilibrio de Nash en todos los subjuegos que contiene.*

Ahora daremos un teorema de existencia equivalente al que vimos para los juegos simultáneos.

Teorema 2 (Teorema de existencia de ENPS)**.** *Todo juego secuencial finito tiene un equilibrio de Nash en subjuegos.*

De esta forma estamos en situación de dar un algoritmo resolutivo llamado inducción hacia atrás, consistente en resolver por etapas el árbol de decisión. La idea del mismo es ir resolviendo los diferentes subjuegos empezando por todos los que hay al final, haciendolo de manera iterativa hasta llegar al primer nodo

Teorema 3 (Algoritmo de inducción hacia atrás)**.** *Para un juego secuencial, con información completa y perfecta.*

1. *Considera todos los subjuegos que no contienen otros subjuegos además de sí mismos.*
2. *Obtén el equilibrio de Nash de cada uno de los subjuegos que no contienen otros subjuegos además de sí mismos.*
3. *Sustituye dichos subjuegos por los beneficios resultantes de aplicar sus equilibrios de Nash, conservando la estrategia en el conjunto de estrategias.*

4. Con el juego que quede repite 2 y 3 hasta que se llegue al nodo inicial.

5. El conjunto de estrategias que ha llegado hasta el nodo inicial es el equilibrio de Nash en subjuegos.

Así obtenemos un método resolutivo ampliamente usado.

Ejemplo 6 (Niño-maestro)**.** Un niño en la escuela se suele portar mal en clase. Si se porta bien, considera que no gana nada y su maestro considera que gana mucho, ya que no tiene que tratar con él. A este beneficio del profesor le asignaremos 2. Si el niño se porta mal, el maestro al regañarle un poco hace parar al niño. El niño ha conseguido ser travieso y el maestro ha calmado la clase, ambos consideran que han ganado un poco (asignaremos un beneficio de 1 a cada uno). Si el profesor, además de regañarle le castiga durante el recreo, tendrá que quedarse con él perdiendo su tiempo de descanso (asignaremos un beneficio de -1 a cada uno). Supondremos que este caso no se va a repetir más, es decir, no es iterativo.

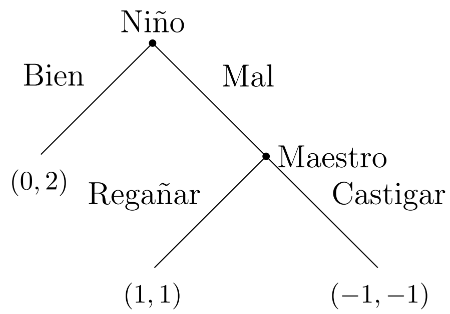


Figura 2.8: Juego con subjuego

Aquí el subjuego que tendríamos que resolver primero sería el nodo de decisión del maestro. Al ser el único jugador, es claro que la mejor opción es regañar sin castigar.

Dado esto, reduciendo el problema, solo queda resolver la decisión del niño. Como el niño ganará 1 portándose mal y considera que no gana nada portándose bien, el equilibrio de Nash en subjuegos es $s^* = (Mal, Regañar)$

2.4. Análisis de sensibilidad

El objetivo de modelizar el mundo que nos rodea reside en facilitar la comprensión de nuestro mundo para estudiarlo e interpretarlo. El problema de modelizar es que no siempre se representa la realidad tal y como es. El mundo es muy complejo y se nos puede pasar algún detalle, fallar en la interpretación de los datos o los propios intereses de la persona que modeliza pueden influir, por ello una visión escéptica es necesaria. El análisis de sensibilidad nació con el objetivo de estudiar cómo una variación en la interpretación o modelado de un problema puede variar el resultado del mismo. Usaremos como principal referencial el libro (Saltelli et al. 2008).

Definición 24 (Análisis de sensibilidad)**.** *El análisis de sensibilidad es el estudio de cómo la incertidumbre en el resultado del modelo pueda resultar de las diferentes fuentes de incertidumbre en el modelo.*

Existen diferentes formas de afrontar este estudio. Generalmente las diferentes metodologías usadas siguen las siguientes pautas:

1. Cuantificar la incertidumbre de las entradas o factores. Esto puede ser complicado ya que las entradas pueden ser subjetivas o no estar cuantificadas.
2. Identificar el resultado o resultados que se quieren analizar.
3. Resolver el problema para distintas entradas, normalmente dictado por la incertidumbre de las entradas; suele depender del problema.
4. Usar los resultados de los problemas anteriores para calcular o estudiar la influencia de las distintas entradas.

Un método común es el método mapeo de factores, consistente en generar varios valores de uno o varios parámetros y observar como afectan al resultado del modelo. Cuando el modelo es muy complejo con muchos parámetros, este método tiene el problema de ser muy ineficiente, aunque resulta muy útil por la fácil implementación del mismo.

El artículo (Esmaeili, Aryanezhad y Zeephongsekul 2008), que usaremos como referencia, es especialmente interesante para este trabajo. En este artículo los autores modifican varios parámetros en el modelo de Stackelberg con un enfoque cooperativo, que es un caso especial de economía de competitiva, al igual que el modelo de Bertrand.

Antes de realizar un análisis de sensibilidad, se suele realizar un análisis de la incertidumbre. Es parecido al análisis de sensibilidad y sigue un esquema similar, con la diferencia de que este se centra más en cuantificar la incertidumbre y la propagación de la incertidumbre, teniendo más en cuenta los errores en los factores y no tanto los posibles fallos en el modelo.

Para realizar un análisis de la incertidumbre normalmente se muestrea usando técnicas de Montecarlo diferentes valores de los parámetros y se estudia el resultado mediante diferentes herramientas estadísticas.

El análisis de la incertidumbre se suele usar en tándem con el análisis de sensibilidad, hallando primero mediante el análisis de la incertidumbre los parámetros que podrían afectar más al modelo y posteriormente decidiendo que análisis de sensibilidad elegir.

Capítulo 3

Caso práctico

En este capítulo pondremos en práctica todo lo visto en la teoría para una situación competitiva entre dos empresas. Empezaremos proponiendo y resolviendo el modelo de teoría de juegos, posteriormente haremos un análisis de sensibilidad. EL código que usaremos en este capítulo lo podremos encontrar en el siguiente repositorio de *Github*, `https://github.com/nothng-k/programas-y-latex`.

3.1. Enunciado y modelado del problema

Pese a representar en un primer momento un caso real, dada la falta de datos, el modelo presentado a continuación no representará de forma fidedigna la realidad.

Fornite es un videojuego gratuito en línea perteneciente a la empresa *Epic Games*. Para aumentar la cantidad de jugadores, *Epic Games* ha decidido proponerle por separado a *Sony*, propietaria de la consola *Playstation*, y a *Microsoft*, propietaria de la consola *Xbox*, hacer cross-play con su juego en las nuevas consolas que van a sacar; esto es, que alguien que juege con *Xbox* pueda jugar con alguien que juege con ordenador, móvil o con *Playstation* (si esta última aceptara). *Epic Games* cargaría con todos los gastos de servidores y los gastos para cada empresa serían despreciables.

Ambas empresas buscan obtener el mayor beneficio. Llevan compitiendo por el mercado durante años y la cooperación es nula. Además, *Fornite* es jugado por una gran cantidad de gente, lo cual podría suponer un cambio en la cantidad de consolas de nueva generación vendidas y en el precio que les pueden poner a estas para obtener el máximo beneficio. Supondremos por simplicidad que solo la venta de consolas influye en el beneficio.

Denotaremos cada una de las empresas por $i \in \{p, x\}$, donde p es *Playstation* y x es *Xbox*, Para cada empresa i la cantidad de consolas vendidas en total a lo largo del tiempo de fabricación que se espera es V_i una variable aleatoria que viene dada por $V_i \sim Bn(q_i(p_i, p_j, c_p, c_x, k, m), n)$, donde $q_i(p_i, p_j, c_i, c_j, k, m) = f_i(p_i, p_j, k) * g_i(p_i, c_i, c_j, m) * h_i(c_i, c_j)$. Teniendo como variables:

- $p_i \in \mathbb{R}^+$ el precio de la consola de la empresa i en euros.
- $k \in \mathbb{R}^+$ como la constante que interviene en la influencia del precio frente al competidor. En nuestro ejemplo usaremos $k = 400$ por ser un precio aparentemente razonable para la gente.
- $c_i \in \{0, 1\}$ es la decisión de hacer cross-play de la empresa i, con 0 no hacerlo y 1 hacerlo.
- m se podría interpretar como lo dispuesta que está una persona a comprar una consola por el precio. En nuestro ejemplo usaremos $m = 2000$.
- $n \in \mathbb{R}^+$ como el número de personas susceptibles de comprar la consola. Usarenos $n = 5 * 10^7$.

Solo contemplaremos el ejercicio para los valores $0 < p_p < m * h_p(c_p, c_x)$ y $0 < p_x < m * h_x(c_p, c_x)$. Representamos el problema mediante el BAID siguiente:

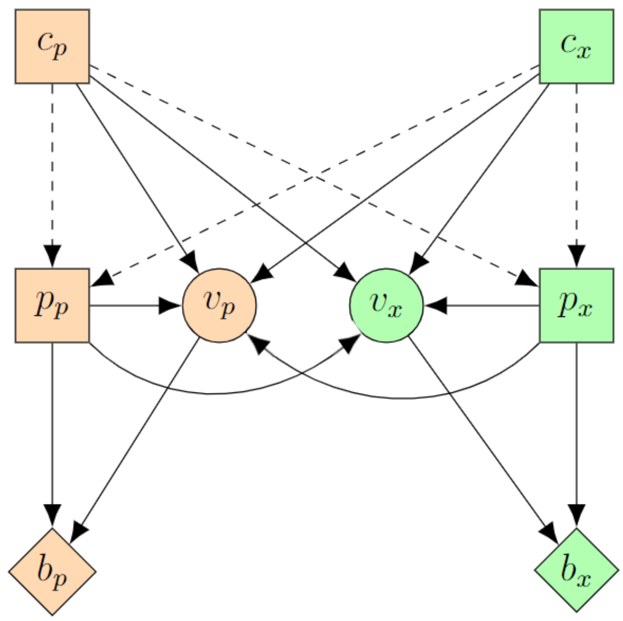


Figura 3.1: BAID del caso práctico

De esta manera queda representado.

- $f_i(p_i, p_j, k) = 1 - \left(\dfrac{e^{p_i/k}}{e^{p_i/k} + e^{p_j/k}} \right)$

  Es la función que podríamos interpretar como la influencia que tiene sobre las ventas la comparación que hacen los posibles compradores entre el precio de las consolas. Usamos la función Shoftmax para representarlo, que es una función que funciona muy bien en este caso. La restamos a 1 para que al aumentar el precio nos alejemos de 1 en lugar de acercarnos, es decir, cuanto más barato mas compradores. La gráfica de la función sería la siguiente:

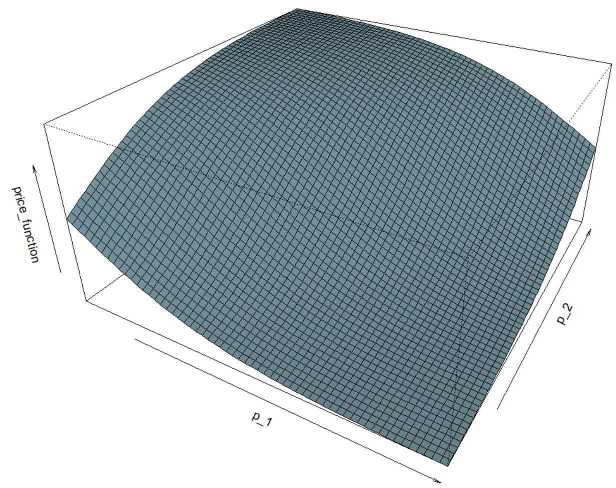


Figura 3.2: Función f_i

- $h_p(c_p, c_x) = \begin{cases} 0{,}75 & si \;\; c_p = c_x = 0 \\ 0{,}9 & si \;\; c_p = 1 \;\; y \;\; c_x = 0 \\ 0{,}3 & si \;\; c_p = 0 \;\; y \;\; c_x = 1 \\ 0{,}8 & si \;\; c_p = c_x = 1 \end{cases}$ $\quad h_x(c_p, c_x) = \begin{cases} 0{,}7 & si \;\; c_p = c_x = 0 \\ 0{,}4 & si \;\; c_p = 1 \;\; y \;\; c_x = 0 \\ 0{,}8 & si \;\; c_p = 0 \;\; y \;\; c_x = 1 \\ 0{,}9 & si \;\; c_p = c_x = 1 \end{cases}$

  Podemos interpretar estas funciones como la influencia que tiene sobre las ventas la conveniencia de poder jugar con quien quieras al juego *Fortnite* y la opinión de los compradores sobre la decisión de la empresa de hacer o no cross-play. *Playstation* tiene mejor renombre, por eso suele tener un número mayor, pero si *Xbox* acepta y *Playstation* no, su influencia sobre el mercado se verá mermada haciendo que su competidor se vea como una mejor marca. Al aceptar ambos, al tener *Xbox* mejores prestaciones, suponemos que *Xbox* sale ganando más que *Playstation*. Supondremos que estos datos se han sacado mediante conocimiento experto.

- $g_i(p_i, c_i, c_j, m) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{p_i}{m * h_i(c_p, c_x)}\right)^2 & si \;\; 0 \leq p_i \leq (m * h_i(c_p, c_x)) \\ 0 \;\; caso \;\; contrario \end{cases}$

  Esta la podemos interpretar como la influencia que tiene sobre la gente el precio aislado de la consola; cuanto más cara, menos ventas. En el intervalo

$[0, m * h_i(c_p, c_x)]$ usamos una parábola desplazada a la derecha de tal forma que corte en el eje de ordenadas en el punto $(0, 1)$ y que corte al eje de abscisas una única vez en el punto $(m * h_i, 0)$, diremos que es 0 en todo lo demás.

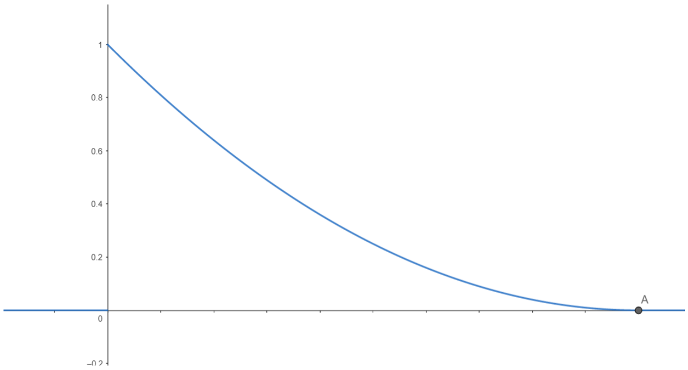


Figura 3.3: Función g

Multiplicamos el número de consolas vendidas por la diferencia entre el precio de venta y el precio de fabricación para obtener el beneficio b_i, para la empresa i de:

$$b_i = v_i * (p_i - C)$$

Donde $C \in \mathbb{R}^+$ es el precio de fabricación por consola para ambas empresas. En nuestro ejemplo usaremos $C = 100$. Para *Playstation* con $c_p = 0$ y $c_x = 0$ y cambiando por 0 los valores menores que cero (es mejor no sacar la consola y no ganar nada que perder dinero) y $1 < p_ps < 1000$, $1 < p_xb < 1000$ la gráfica sería la siguiente.

(a) *Playstation* (b) *Xbox*

Figura 3.4: Beneficios

3.2. Resolución mediante equilibrio de Nash.

Tal y como vimos anteriormente al tratarse de un juego secuencial usaremos la inducción hacia atrás para resolverlo.

Dado que los beneficios dependen de un factor aleatorio, empezaremos calculando la utilidad esperada que tendría una empresa i:

$$E[B_i] = E[v_i * (p_i - C)] = E[v_i] * E[p_i - C] = (p_i - C) * E[v_i]$$

Por ser v_i una Binomial, tenemos que la esperanza es $E[v_i] = q_i(p_i, p_j, c_i, c_j, k, m) * n$, por lo tanto:

$$E[B_i] = (p_i - C_i) * q_i(p_i, p_j, c_i, c_j, k, m) * n$$

Quedándonos como resultado el siguiente BAID con nodos de utilidad $E[B_i]$:

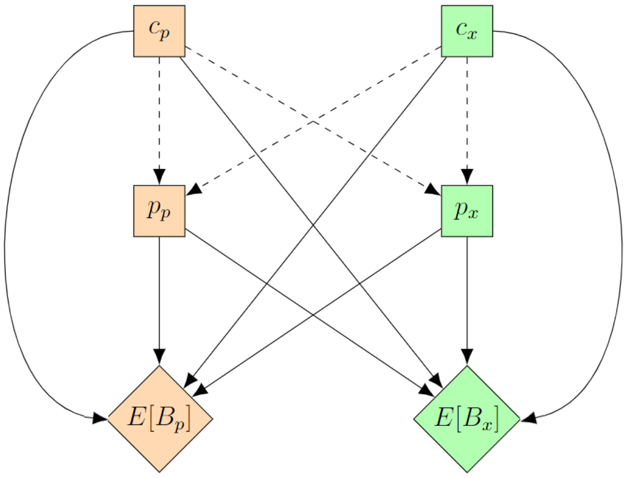


Figura 3.5: BAID del caso práctico sin aleatoriedad

Ahora calcularemos para los cuatro posibles resultados de los nodos c_p y c_x, el equilibrio de Nash del precio de las consolas. Tal y como vimos en el ejemplo de Bertrand, se pueden calcular los equilibrios intersecando los conjuntos de los precios óptimos de cada consola fijados los precios de la otra consola.

Para obtener el equilibrio de Nash usaremos una modificación del algoritmo de las coordenadas cíclicas ya que se acerca al equilibrio aumentando o disminuyendo las coordenadas de un eje sin hacerlo al mismo tiempo en ambos ejes.

1. Empezamos en un punto inicial $(x_0, y_0) \in \{p_p, p_x | 0 < p_p < m * h_p(c_p, c_x)$ y $0 < p_x < m * h_x(c_p, c_x)$.

   Para cada iteración i:

2. Calculamos el p_p que maximiza los beneficios para $p_x = p_{x,i-1}$ y lo asignamos a $p_{p,i}$.

3. Calculamos p_x que maximiza los beneficios para $p_p = p_{p,i}$ y lo asignamos a $p_{x,i}$.

4. Terminar cuando $d((p_{p,i}, p_{x,i}), (p_{p,i-1}, p_{x,i-1}))$ sea menor que un ϵ dado.

Si el algoritmo acaba convergiendo tendremos un equilibrio de Nash. En nuestro caso, al observar la figura 3.4 correspondiente a *Playstation*, vemos que la *"cresta"* que correspondería con los óptimos crece sobre todo al aumentar p_x, de manera análoga para *Xbox*, los beneficios aumentan al aumentar p_p. Parece que solo se cruzan las *"cresta"* una vez, generándose un equilibrio de Nash, este es un punto de silla, ya que si aumentáramos ambos precios a la vez, al correr el algoritmo no llegaríamos a otro equilibrio de Nash. Por lo que, nosotros inicializaremos en el punto $(0,0)$ y solo comprobaremos que converge.

Tras obtener la utilidad esperada de cada caso nos quedaría el siguiente juego simultáneo:

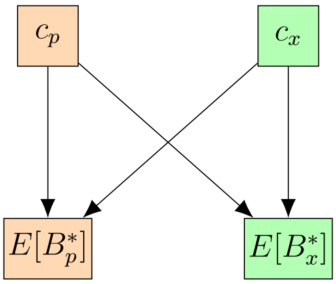


Figura 3.6: BAID del caso práctico simplificado

De tal forma que nos quedaría por resolver, el siguiente problema de teoría de juegos en forma normal:

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Xbox</td></tr>
<tr><td></td><td>Cross-play</td><td>No</td><td>Si</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Playstation</td><td>No</td><td>3.000M€|2.747M€</td><td>460M€| 2.749M€</td></tr>
<tr><td>Si</td><td>3.605M€| 916M€</td><td>3.665M€ | 4.376M€</td></tr>
</table>

Figura 3.7: Forma normal del caso práctico simplificado

Es fácil ver que la estrategia dominada para *Playstation* es hacer cross-play al igual que la *Xbox*. Obtendremos el equilibrio de Nash en estrategias mixtas usando la librería *Nashpy* de *Python* que usaremos en R, dándonos como resultado tras ejecutar el código:

- Para $c_p = 1$ de estrategia para *Playstation* y $c_x = 1$ para *Xbox*.

- Con un beneficio esperado para cada caso de 3.665.411.948€ para *Playstation* y de 4.376.168.454€ para *Xbox*
- Con unos precios por consola de $p_p = 440$€ para *Playstation* y de $p_x = 460$ € para *Xbox*

Tal y como esperábamos ambas empresas deciden hacer cross-play. Observamos que *Xbox* podrá ponerle mayor precio a su consola y obtendrá más beneficios que *Playstation*, tiene sentido ya que la función $h(1,1)$ beneficia más a *Xbox* que a *Playstation*

3.3. Análisis de sensibilidad del caso práctico

La percepción que tienen las personas del precio de una consola que no ha salido es muy complicada de medir. Las empresas suelen usar elicitación y encuestas, entre otros, para intentar predecirlo, pero dichas predicciones no son muy fiables.

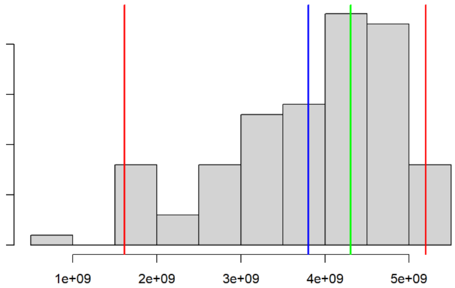
Dado que las decisiones del ejercicio anterior son muy importantes y podrían suponer un cambio muy grande en el futuro de las empresas, para eso está el análisis de sensibilidad. Resulta inevitable preguntarse cómo influyen las diferentes variables en dichas decisiones.

3.3.1. Análisis de sensibilidad de $h_p(1,1)$

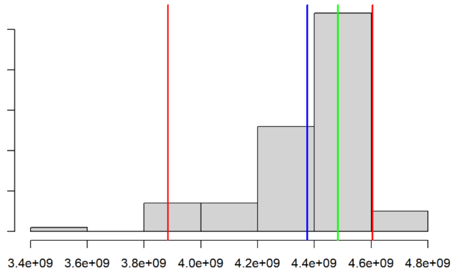
Comenzaremos por un análisis de la incertidumbre sobre el factor $h_p(1,1)$, suponiendo que se ha descubierto que el parámetro sigue una distribución $Beta(\alpha = 8, \beta = 2)$.

Mediante técnicas de Montecarlo muestrearemos 100 veces el factor $h_p(1,1)$ y para cada valor de estimaremos c_p, c_p, p_p, p_s, los beneficios esperados de cada empresa, estimando posteriormente para cada una de esas muestras la media, la moda y un intervalo de confianza al 95 %.

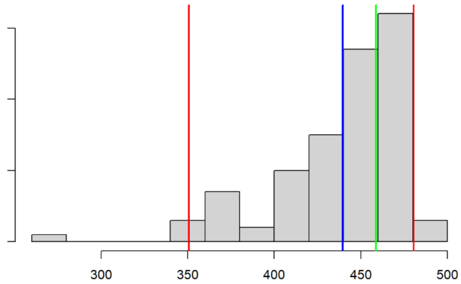
Tras realizar el muestreo observamos que el equilibrio de Nash para la decisión de hacer cross-play no cambia para ningún valor muestreado. Ahora analizaremos tanto el equilibrio de Nash del precio de las consolas como los beneficios esperados para cada empresa, obtenemos los siguientes histogramas:



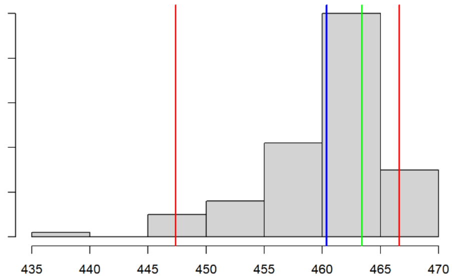
(a) Beneficios de *Playstation*



(b) Beneficios de *Xbox*



(c) Precios de *Playstation*



(d) Precios de *Xbox*

Figura 3.8: Histogramas

Donde las líneas horizontales rojas representan los cuantiles al 0,025 y al 0,975, las azules, la media muestral y las verdes la moda estimada mediante el estimador de Venter.

En el equilibrio de Nash de los precios para *Playstation* obtenemos una media muestral de 440€, una moda de 460€, los cuantiles al 0,025 y al 0,975 de 350€ y 480€ respectivamente.

Para su beneficio esperado obtenemos una media de 3.802.338.582,66€, una moda de 4.302.440.780€ , los cuantiles al 0.025 y al 0.975 de 1.615.273.846€ y 5.198.874.991€ respectivamente.

Observamos que ambos histogramas están sesgados a la izquierda de forma parecida a la función de densidad de la $Beta(\alpha = 8, \beta = 2)$ salvando la escalas. La moda es mayor que la media en ambos casos, pareciendo esta más fiable a la hora de estimar el valor del equilibrio de Nash por provenir de una distribución Beta.

Es destacable lo grande que es el intervalo de confianza mediante técnicas Montecarlo de los beneficios esperados, siendo el cuantil al 0.025 de 1.615.273.846€ y al 0.975 de 5.198.874.991€, siendo también destacable el de los precios.

En el equilibrio de Nash de los precios para *Xbox* obtenemos una media de 460.37€, una moda de 463.4€, los cuantiles al 0,025 y al 0,975 de 447€ y 466€ respectivamente.

Para su beneficio esperado obtenemos una media de 4.374.980.663€, una moda de 4.482.525.143€, los cuantiles al 0.025 y al 0.975 de 3.883.555.405€ y 4.605.210.455€ respectivamente.

Observamos que ambos histogramas están sesgados a la izquierda como en el caso anterior. La moda es mayor que la media en ambos casos, al igual que en el caso anterior.

Es destacable lo pequeño que es el intervalo de confianza de los beneficios esperados en comparación con el de *Playstation*, siendo el cuantil al 0.025 de 3.883.555.405€ y al 0.975 de 4.605.210.455€, siendo también destacable el de los precios.

Queda claro que el parámetro $h_p(1,1)$, no parece afectar a la decisión de hace cross-play, aunque cabe destacar que tiene la capacidad de influir mucho en el precio y las ventas de *Playstation* mientras que influye poco en *Xbox*. Lo ideal sería hacer un análisis más exhaustivo tras tomar la decisión de hacer cross-play para comprobar si se puede obtener un dato más fiable.

3.3.2. Análisis de sensibilidad de la k y la m

Ahora realizaremos un análisis de sensibilidad con el objetivo de comprobar cómo de robustas son las decisiones tomadas en el ejercicio anterior. Para ello crearemos un mallado con las distintas soluciones al problema anterior para 9 valores de k equidistantes entre 200 y 600 y para 9 valores de m equidistantes entre 1000 y 3000. Los gráficos siguientes muestran la influencia conjunta de la m y k en la p y la q que forman parte de las estrategias mixtas de *Playstation* $\sigma_p = (p, 1-p)$ y *Xbox* $\sigma_x = (q, 1-q)$.

	M= 1000	M= 1250	M= 1500	M= 1750	M= 2000	M= 2250	M= 2500	M= 2750	M= 3000
k= 200	0	0	0	0	0.8752	0.848	0.8250	0.8056	0.7898
k= 250	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.8726	0.8519	0.8328
k= 300	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.8721
k= 350	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
k= 400	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
k= 450	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
k= 500	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
k= 550	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
k= 600	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000

Figura 3.9: Evolución de la p de *Playstation* del análisis de sensibilidad de la m y la k

	M= 1000	M= 1250	M= 1500	M= 1750	M= 2000	M= 2250	M= 2500	M= 2750	M= 3000
k= 200	0	0	0	0	0.9928	0.977	0.9651	0.9548	0.9470
k= 250	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.9920	0.9796	0.9689
k= 300	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.9917
k= 350	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
k= 400	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
k= 450	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
k= 500	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
k= 550	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000
k= 600	0	0	0	0	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000

Figura 3.10: Evolución de la q de *Xbox* del análisis de sensibilidad de la m y la k

Observamos mediante el código de colores que si aumentamos mucho la m o reducimos mucho la k la solución pasa a ser estrategia mixta, mientras que si aumentamos la k o reducimos la m, seguiríamos teniendo las mismas estrategias puras que en el caso original.

Cabe destacar que cuando nos encontramos las estrategias mixtas, la p y la q difieren mucho del equilibrio puro que obtuvimos en el caso práctico, siendo más probable tanto para *Playstation*, como para *Xbox* elegir no hacer cross-play. Al ser la primera decisión que tienen que tomar podría ser muy perjudicial equivocarse.

Estas situaciones podrían suponer un cambio en los beneficios esperados y un cambio en el precio que se pondría a las consolas. Las siguientes tablas muestran los precios esperados para el caso de *Playstation* y *Xbox* haciendo cross-play, es decir el resultado original. No ponemos todos los precios de cada consola para cada caso por necesitar demasiadas tablas.

	M= 1000	M= 1250	M= 1500	M= 1750	M= 2000	M= 2250	M= 2500	M= 2750	M= 3000
k= 200	262.54	290.32	312.87	331.48	346.95	359.97	371.05	380.59	388.87
k= 250	274.02	306.94	334.62	358.20	378.23	395.51	410.39	423.46	434.87
k= 300	282.32	319.34	351.29	379.04	403.09	424.29	442.75	459.27	473.89
k= 350	288.62	328.83	364.15	395.57	423.31	447.84	469.87	489.49	507.09
k= 400	293.51	336.33	374.72	409.05	439.89	467.57	492.61	515.12	535.52
k= 450	297.44	342.45	383.21	420.17	453.75	484.18	511.85	537.17	560.23
k= 500	300.68	347.47	390.30	429.49	465.45	498.32	528.41	556.22	581.63
k= 550	303.40	351.69	396.29	437.39	475.37	510.47	542.75	572.72	600.44
k= 600	305.64	355.32	401.43	444.19	483.92	520.97	555.28	587.21	617.02

Figura 3.11: Precios esperados *Playstation* del análisis de sensibilidad de la m y la k

	M= 1000	M= 1250	M= 1500	M= 1750	M= 2000	M= 2250	M= 2500	M= 2750	M= 3000
k= 200	273.54	300.44	322.04	339.78	354.46	366.76	377.25	386.25	394.13
k= 250	287.86	320.31	347.22	369.85	389.01	405.43	419.60	431.91	442.73
k= 300	298.52	335.58	367.05	393.95	417.26	437.50	455.14	470.86	484.71
k= 350	306.74	347.59	382.89	413.54	440.64	464.39	485.49	504.27	521.04
k= 400	313.27	357.20	395.95	430.06	460.41	487.34	511.54	533.22	552.76
k= 450	318.52	365.17	406.73	443.80	477.12	507.07	533.99	558.45	580.76
k= 500	322.81	371.77	415.78	455.54	491.49	524.07	553.66	580.73	605.37
k= 550	326.50	377.29	423.56	465.59	503.91	538.93	570.82	600.27	627.40
k= 600	329.59	382.16	430.22	474.35	514.80	551.95	586.29	617.64	646.92

Figura 3.12: Precios esperados *Xbox* del análisis de sensibilidad de la m y la k

Podemos observar que tanto *Playstation* como *Xbox* aumentan el precio de sus consolas cuando k y m aumentan, sin diferir mucho entre una u otra. Algo normal, ya que si la gente opina que puede pagar más por una consola estarán dispuestos a pagar más para ambas.

Ahora analizaremos la evolución de los beneficios esperados de cada compañía.

	M= 1000	M= 1250	M= 1500	M= 1750	M= 2000	M= 2250	M= 2500	M= 2750	M= 3000
k= 200	1507584083	1965591008	2380143772	2752750928	2652873864	2906595062	3140921257	3354637132	3551799715
k= 250	1546131330	2041127306	2501788127	2926159824	3314630443	3669686131	3444385258	3695436686	3929660465
k= 300	1568107579	2087385417	2579991822	3041689354	3472337098	3871936572	4241712304	4585411821	4236637708
k= 350	1581317042	2116865447	2631766986	3120899396	3583849435	4018537734	4426469866	4808418765	5165654640
k= 400	1589610198	2136159879	2667660319	3178076864	3665411948	4127766690	4566005972	4979761959	5370182729
k= 450	1594821540	2149494742	2692764130	3218917373	3725420728	4210351901	4672534439	5113045012	5532264982
k= 500	1598154405	2158630791	2710735907	3249232976	3770762571	4273313057	4755872762	5218676287	5660733657
k= 550	1600444871	2164962963	2724059154	3271892288	3805303363	4322349683	4820988533	5302190893	5765104296
k= 600	1601867661	2169741342	2733853579	3289212343	3832239148	4360797813	4874107560	5369454961	5849185658

Figura 3.13: Beneficios esperados *Playstation* del análisis de sensibilidad de la m y la k

	M= 1000	M= 1250	M= 1500	M= 1750	M= 2000	M= 2250	M= 2500	M= 2750	M= 3000
k= 200	1839819353	2361427842	2830308934	3249545230	2194850974	2395607578	2577488075	2744601586	2898366183
k= 250	1901269854	2468318160	2991746669	3472061795	3909612095	4308629825	2858576629	3059381206	3243179154
k= 300	1941150950	2539320374	3101782734	3626632952	4112964205	4564244623	4979848153	5365708599	3527160129
k= 350	1968901134	2588896408	3179063504	3737922487	4262993529	4754425596	5215309730	5645356619	6046917677
k= 400	1989055132	2625235912	3237404138	3821430326	4376168454	4900972430	5397094732	5864128281	6304138902
k= 450	2004316972	2652984610	3281296274	3885561098	4464085862	5015532028	5540123887	6039106288	6512146528
k= 500	2016297824	2674562585	3315837431	3936115123	4533714984	5106978440	5655492205	6180745235	6681047097
k= 550	2025885318	2691853692	3343519388	3976700336	4589626178	5181138827	5749669826	6296532312	6821040583
k= 600	2033627763	2706077134	3366207940	4010024095	4635529465	5242055425	5827721737	6392924016	6938014217

Figura 3.14: Beneficios esperados *Xbox* del análisis de sensibilidad de la m y la k

Al observar las casillas sin estrategias mixtas, al aumentar la m y la k obtienen ambas empresas más beneficios. Tal y como hemos visto, las empresas pueden aumentar los precios de las consolas llevando a tener más beneficios, ya que al aumentar la m y la k, la gente pasa a considerarlas más baratas. Nótese que *Xbox* sigue siendo la que más gana.

Lo extraño viene al observar los casos en los que tenemos estrategias mixtas. Los beneficios esperados de *Playstation* disminuyen un poco en comparación, mientras que los de *Xbox* disminuyen mucho, posicionando a *Playstation* como la compañía líder del mercado.

La conclusión a la que llegamos es que pese a que en algunos puntos lleguemos a pasar de estrategias puras a mixtas, estos cambios están alejados del caso original. Se recomienda hacer una estimación de la varianza de los parámetros. Si la varianza no es excesiva se puede decir que la solución es bastante robusta.

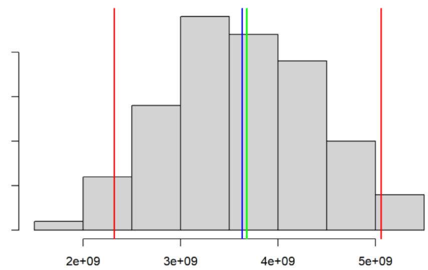
Supongamos que siguiendo la recomendación, se ha estimado que los parámetros k y m siguen una distribución normal bi-dimensional tal que:

$$(K, M)^t \sim N\left(\mu = (400, 2000)^t, \Sigma = \begin{pmatrix} 10^4 & 2 * 10^4 \\ 2 * 10^4 & 10^5 \end{pmatrix}\right)$$

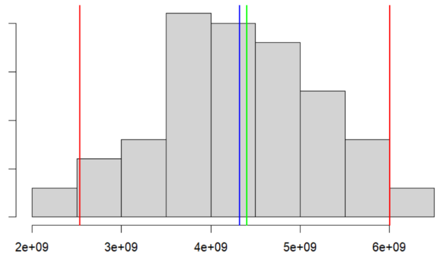
Mediante técnicas de Montecarlo muestrearemos 100 veces (K,M) y para cada valor de estimaremos c_p, c_x, p_p, p_x, los beneficios esperados de cada empresa, estimando posteriormente la media, la moda y un intervalo de confianza al 95 %.

Tras realizar el muestreo observamos que el equilibrio de Nash para la decisión de hacer cross-play cambia muy poco, de las 100 muestras que hemos tomado solamente hay un caso en el que la estrategia del equilibrio de Nash sea diferente de $c_p = 1$, $c_x = 1$ y toma en su lugar como equilibrio de Nash en estrategias mixtas, $(0{,}8518, 0{,}1482)$ y $(0{,}9769, 0{,}0231)$, por lo que será poco probable que afecte al resultado final.

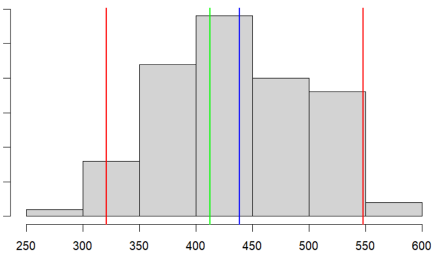
Analizaremos tanto el equilibrio de Nash del precio de las consolas como los beneficios esperados para cada empresa, obtenemos los siguientes histogramas:



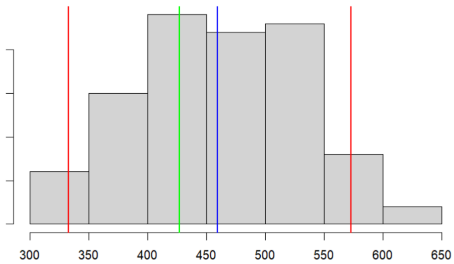
(a) Beneficios de *Playstation*



(b) Beneficios de *Xbox*



(c) Precios de *Playstation*



(d) Precios de *Xbox*

Figura 3.15: Histogramas

Donde las líneas horizontales rojas representan los cuantiles al 0,025 y al 0,975, las azules, la media muestral y las verdes la moda estimada mediante el estimador de Venter.

Para los precios del equilibrio de Nash de *Playstation* obtenemos una media de 438€, una moda de 412€, los cuantiles al 0,025 y al 0,975 de 320€ y 547€ respectivamente.

Para su beneficio esperado obtenemos una media de 3.632M€, una moda de 3.681M€ , los cuantiles al 0.025 y al 0.975 de 2.320M€ y 5.058M€ respectivamente.

Observamos que en ambos histogramas parece que tanto los beneficios como los precios están distribuidos como normales, además no hay mucha diferencia entre la media y la moda y el intervalo de confianza parece simétrico respecto a la media, haremos un test de Lilliefors para comprobarlo. El test nos da un p-valor de 0.1615 para los precios y de 0.5958 para los beneficios esperados, no hay evidencias para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significancia del 10 %. Efectivamente estamos ante distribuciones normales.

Para los precios del equilibrio de Nash de *Xbox* obtenemos una media de 460€, una moda de 427€, los cuantiles al 0,025 y al 0,975 de 332€ y 572€ respectivamente.

Para su beneficio esperado obtenemos una media de 4.320M€, una moda de 4.400M€, los cuantiles al 0.025 y al 0.975 de 2.534M y 6.001M€ respectivamente.

Observamos los histogramas de *Xbox*, al igual que con *Playstation*, todo nos indica que tanto el precio como el beneficio esperado se distribuyen como normales. Lo comprobamos mediante el test de Lilliefors. El test nos da un p-valor de 0.1212 para los precios y de 0.7924 para los beneficios esperados, no hay evidencias para rechazar la hipótesis nula con un nivel de significancia del 10 %. Estamos otra vez ante distribuciones normales.

Concluimos que la decisión de hacer cross-play es muy estable ante los parámetros k y m , sin embargo el equilibrio de Nash del precio varía mucho, variando a su vez el beneficio esperado.

Capítulo 4

Conclusiones

En esta memoria hemos abordado una introducción a la teoría de juegos, con la necesaria introducción a las teorías de la utilidad y de la decisión. Estudiamos posibles formas de modelado más usadas. Siendo la forma normal la más útil a la hora de modelar juegos simultáneos, la forma extensiva la forma clásica de representación de los juegos secuenciales (pudiendo llegar a ser bastante extensa al representar juegos muy complejos) y la forma de representación MAID como la visualmente más atractiva. También explicamos el concepto de equilibrio de Nash, tanto para juegos secuenciales como para juegos simultáneos. Expusimos diferentes formas de hallar el equilibrio de Nash, mediante algoritmos de resolución. También definimos y explicamos formas de aplicar el análisis de sensibilidad y de la incertidumbre a la teoría de juegos.

En el caso práctico hemos puesto en valor un modelo en el que usamos estas teorías. Pudimos apreciar que un correcto modelado y solución puede reportar grandes beneficios económicos a una empresa. Dicho caso práctico consiste en un juego bimatricial y un juego modificado del modelo de Bertrand en tándem. Hallando los equilibrios de Nash mediante el uso los algoritmos descritos realizando un análisis posterior de sensibilidad y de la incertidumbre.

Podríamos haber estudiado que el número de ventas progresara con el tiempo, en lugar de considerar todas las ventas que se esperarán tener, dando lugar a un juego diferencial. También se podría haber añadido otra empresa competidora. Sin embargo no se realizaron estas ideas por requerir una dedicación mayor de lo esperable para el objetivo de este trabajo de fin de grado.

También hay que destacar el costo computacional. Hemos usado coordenadas cíclicas para calcular el equilibrio de Nash, pese a no tener funciones convexas, por ser mucho más eficiente que un método basado en mallado que podría haber dado un equilibrio más fiable. Para poner en contexto, el algoritmo lleva aproximadamente 10 iteraciones en devolver un equilibrio, es decir, calcula los beneficios para cada consola 10 veces, tardando el análisis de sensibilidad en correr 15 minutos, mientras que un método basado en el mallado del dominio, para devolvernos un equilibrio fiable, podría necesitar calcular los beneficios 10^4 veces. Es decir, suponiendo que contribuya a la lentitud del código en un 50 %, aproximadamente el código tardaría $7{,}5 * 10^3$ minutos o casi 5 días y 5 horas.

Las conclusiones realizadas en el caso práctico no representan la realidad correctamente por haber sido simplificado el modelo, pero se asemeja lo suficiente. Ambas empresas decidieron hacer cross-play y pusieron el precio de sus consolas de nueva generación a 500€, con versiones más baratas disponibles, para que la gente que considerara que 500€ es caro pudieran comprar consolas más baratas.

El análisis de sensibilidad, pese a no ser muy exhaustivo, nos ha brindado una idea de la influencia del factor $h_p(1,1)$ y lo sensibles que son las soluciones ante los parámetros k y m, lo cual resulta muy útil a la hora de saber si se está tomando la decisión correcta. Hicimos un análisis de la incertidumbre para el parámetro $h_p(1,1)$, y concluimos que no tiene influencia en la decisión de hacer cross-play, pero puede influenciar mucho en el equilibrio de Nash de los precios de las consola, influyendo a su vez en los beneficios, siendo esta influencia especialmente notable para *Playstation*. Si se desean valores más fiables para *Playstation*, se recomienda hacer una análisis más exhaustivo de la distribución de $h_p(1,1)$. Tras realizar el análisis de sensibilidad de los parámetros m y k, hemos concluido que en casos extremos podrían influenciar mucho en los beneficios esperados de las empresas y la decisión de hacer cross-play de ambas empresas es robusta.

Hemos visto cómo la teoría de juegos es realmente útil. La capacidad que tiene para describir de manera lógica problemas de la vida real es usada en diversos entornos, la economía, los juegos de azar y las relaciones empresariales, entre otros. Si a esto le añadimos el análisis de sensibilidad que permite analizar la robustez de dichas decisiones, nos encontramos con una herramienta extremadamente útil.

Realizar esta memoria me ha servido para interiorizar capacidades como la búsqueda de artículos y libros científicos, el manejo de la escritura con LaTeXy conceptos de teoría de juegos, que me serán útiles, no solo en el ámbito académico, sino también en el personal dada su gran aplicabilidad. Respecto al caso práctico, considero que pese a tener margen de mejora, la función de los beneficios de las empresas representa bastante bien los beneficios obtenidos causados por la competitividad entre estas empresas, gracias, en parte, al uso de una función de ventas multiplicativa, en lugar de aditiva. Considero que el análisis de sensibilidad, ha sido de gran utilidad a la hora de observar la estabilidad y robustez de las distintas decisiones.

Capítulo 5

Bibliografía

Libros

Neumann, John von y Oskar Morgenstern (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. E.E.U.U.: Princeton University Press. ISBN: 978-0691130613.

Mas-Colell, Andreu, Michael D.Whinston y Jerry R.Green (1995). *Microeconomic Theory*. New York, U.S.A: Oxford University Press. ISBN: 0-19-507340.

Pérez-Navarro, Joaquín, José Luis Jimeno-Pastor y Emilio Cerdá (2004). *Teoría de Juegos*. Madrid, España: Pearson Education. ISBN: 978-84-832-2799-2.

Vitoriano, Begoña (2007). *Teoría de la Decisión: Decisión con Incertidumbre, Decisión Multicriterio y Teoría de Juegos*. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid. URL: `https://gc.scalahed.com/recursos/files/r161r/w25298w/teoria_decesion.pdf`.

Nisan, Noam et al. (2007). *Algorithmic Game Theory*. U.S.A: Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-87282-9.

Vega-Redondo, Fernando (2000). *Economía y Juegos*. Barcelona, España: Antoni Bosch. ISBN: 84-85855-88-4.

Saltelli, Andrea et al. (2008). *Global Sensitivity Analysis. The Primer*. Gran Bretaña: John Wiley y Sons Ltd. ISBN: 0-19-507340.

Otras fuentes

Nash, John Forbes (1951). «Non-cooperative Games». En: *Annals of Mathematics* 54.2, págs. 286-295.

Shachter, Ross D. (1986). «Evaluating influence diagrams». En: *Operations Research* 34.6, págs. 871-882.

Gracia Blázquez-Vallejo, María de y Carmen Virginia Gámez-Jiménez (2006). *Teoría de juegos y aplicaciones: El dilema del prisionero*. El archivo original no es accesible. URL: `https://studylib.es/doc/5270226/teor%C3%ADa-de-juegos-y-aplicaciones--el-dilema-del-prisionero`.

González-Ortega, Jorge, David Ríos-Insua y Javier Cano (2018). «Adversarial risk analysis for bi-agent influence diagrams: An algorithmic approach». En: *European Journal of Operational Research* 273, págs. 1085-1096.

Koller, Daphne y Brian Milch (2003). «Multi-agent influence diagrams for representing and solving games». En: *Games and economic behavior* 45, págs. 181-221.

Esmaeili, M., MirBahador Aryanezhad y P. Zeephongsekul (2008). «A game theory approach in seller–buyer supply chain». En: *European Journal of Operational Research* 195, págs. 442-448.