第 15 讲 调和函数与 Laplace 算子

（草稿）

教学目的

空间的维数的增加带来物理世界的多样性和复杂性。Laplace 方程的解是调和函数，是一维空间线性函数的推广，体现着空间维数增加后的新现象以及数学分析上的问题。美妙的复变函数论只能用于解二维问题。

主要内容

参考书目：

1. S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, Harmonic function theory, 2nd ed., Springer, 2001.
2. 华罗庚，从单位圆谈起，科学出版社，1981.
3. 陈维恒，流形上的微积分（第二版），高等教育出版社，2001
4. V. I. Arnold, Lectures on Partial Differential Equations, Springer, 2004.

调和函数的研究一开始就与人类对地球重力的研究相联系。位势方程在 18 世纪关于引力的研究中已显露头角，Green 定理已应用于许多其它类型的微分方程. 在 19 世纪关于热传导的研究中出现了，因为物体内的温度分布显然逐点变化，但当它不随时间变化处于稳定状态时，从而热方程就化为位势方程，静电学和静磁学的新的一类应用加强了 19 世纪早期在重力吸引的计算中的位势方程，这里椭球体的吸引也是一个关键问题.

对于位势方程而言，尽管有 Laplace，Poisson 和 Gauss 以及别人的工作，但关于它的解的一般性质在 19 世纪 20 年代还几乎毫无所知，那时确信通积分必须包含两个任意函数，一个给出解在边界上的值另一个给出导数在边界上的值. 然而在温度满足位势方程的稳态热传导情形，人们知道只要温度在表面上给定了，整个三维物体内部的温度或热分布就确定了. 因此在位势方程的上述假定的通解中，任意函数之一必须按某种方式由某一个别的条件固定下来.

1850 年，William Thomson 称满足 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 的解为 u 调和函数（harmonic function）。自修成才的英国数学家 George Green（1793 – 1841）试图用彻底的数学方式论述静电磁学，1828 年自费印刷《关于数学分析应用与电磁学理论》，直到 William Thomson（1824-1907）f 发现它并认识到其重要价值。

从随机运动角度，可以建立 Laplace 方程[1]。 设有一个围墙包围的矩形体育场，四周有门以供出入。有一人在体育场中央站立，通过掷硬币的方式决定行走方向：连续掷硬币两次，若两次国徽面都朝上，向正北方向一步；若第一次国徽面朝上，第二次麦穗面朝上，向正东方向一步；若第一次麦穗面朝上，第二次国徽面朝上，向正南方向一步；若两次麦穗面都朝上，向正西方向一步。试问在遇到围墙之间，他走出体育场的概率。先取一个平面坐标系，以体育场

[1] J. F. Reynolds, A Proof of the Random-Walk Method for Solving Laplace's Equation in 2-D *The Mathematical Gazette*,,49: 416-420,1965

中心位置为原点，正东向为x轴方向，正北向为y轴方向；设设体育场所在区域为Ω，令D表示所有的门；每次掷硬币时，国徽面和麦穗面朝上的概率相等，此人的步长为h，所在位置为点(x,y)，遇到体育场围墙之前的几率为$u(x,y)$。由于向四个方向行走的几率相等，于是

$$u(x,y)=\frac{1}{4}[u(x,y+h)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x-h,y)]$$

即

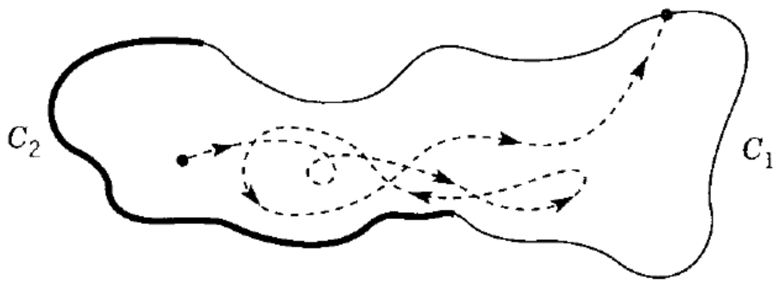
$$\frac{u(x+h,y)+u(x-h,y)-2u(x,y)}{h^2}+\frac{u(x,y+h)+u(x,y-h)-2u(x,y)}{h^2}=0$$

设$u(x,y)\in C^2(\Omega)$，步长h比Ω得尺度$\dim(\Omega)$要小得多，可令$h\to 0$，利用 Taylor 级数展开，容易得到

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

上述问题转化为下列边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=0,\ (x,y)\in\Omega\\ u=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\in\partial\Omega\backslash D\end{cases}\end{cases}$$



这个问题可以一般地刻画在平面域D Brown 运动：粒子随机性周直到遇到边界停止。如图令边界分为$C_1=D$和$C_2=\partial\Omega\backslash D$两个部分，$u(x,y)$是点$(x,y,z)$开始随机移动并在$C_1$上某点停止的粒子的几率。

§1 调和函数

比照一维调和函数的性质，调和函数实际是高维空间中最简单的一类函数，随着空间维数的增加，函数变得更将丰富。

1.1 基本解

对于$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\in R^n$

$$r=|x|=x_1^2+\cdots+x_n^2=\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2$$

且

$$\frac{\partial r}{\partial x_k}=\frac{x_k}{r},\quad k=1,2,\cdots,n$$

Laplace 方程

$$\Delta u=(D_1^2+\cdots+D_n^2)u=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=0$$

非齐次 Laplace 方程

$$\Delta u=f$$

称为 Poisson 方程。

注意到多项式

$$1,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x_k^2-x_l^2,\ (3x_k^2-x_l^2)x_l,\ k,l=1,2,\cdots,n$$

特别地线性函数，都是 Laplace 方程的解，称为**调和函数**。调和函数在伸缩变换，平移变换和正交变换下，仍保持为调和函数。

鉴于 Laplace 算子$\Delta=D_1^2+\cdots+D_n^2$与函数$|x|=x_1^2+\cdots+x_n^2$之间的水平集（level set）都是以原点为中心的球面，调和函数与球面之间的关系在调和函数理论中中心位置。一个是后面要证明的平均值性质，一个是在单位球上不变的R^n上的线性变换$T:R^n\to R^n$，称为正交变换。如

果$u \in C^2(\Omega)$，则在$T^{-1}(\Omega)$上

$$\Delta(u \circ T) = \Delta u \circ T$$

设变换在R^n的标准基上为$T = [t_{jk}]$，则

$$D_m(u \circ T) = \sum_{j=1}^{n} t_{jm} \left(D_j u\right) \circ T$$

其中D_m是关于第m个坐标的偏导数。再次求导并对m求和

$$\Delta(u \circ T) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{km} t_{jm} \left(D_k D_j u\right) \circ T = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{km} t_{jm} \right) \left(D_k D_j u\right) \circ T = \sum_{j=1}^{n} \left(D_j D_j u\right) \circ T$$

$$= (\Delta u) \circ T$$

函数$u \circ T$称为的转动。上述结果表明：调和函数的转动还是调和的。

当问题具有径向对称性时，解$u(x) = v(r)$：$R^n \to R$，有

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \frac{\partial r}{\partial x_k} = v'(r) \frac{x_k}{r}, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \frac{\partial r}{\partial x_k} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right), \quad k = 1,2,\cdots,\mathrm{n}$$

整理得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = v''(r) \left(\frac{x_k}{r} \right)^2 + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_k^2}{r^3} \right), \quad k = 1,2,\cdots,n$$

于是

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

$\Delta u = 0$当且仅当

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0$$

直接积分求解，得

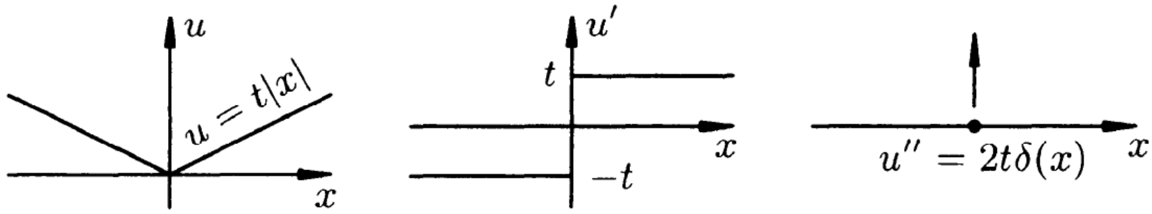
$$v(|x|)=\begin{cases} b|x|+c, & n=1 \\ b\log|x|+c, & n=2 \\ \dfrac{b}{|x|^{n-2}}+c, & n\geq 3 \end{cases}$$

其中b，c是任意函数。但是当$b\neq 0$，$r=0$时，$v(r)$没意义，说明 Laplace 方程在全空间没有径向对称解，或者$r=0$是 Laplace 方程解的一个奇点。这也是与一维 Laplace 方程解的性质重要区别。特别地，取$c=0$，对于$x\in R^n$，$x\neq 0$，称

$$K(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}|x|, & n=1 \\ -\dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & n=2 \\ \dfrac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}}\dfrac{1}{(n-2)|x|^{n-2}}, & n\geq 3 \end{cases}$$

为 Laplace 方程的基本解。其中$\Gamma(x)$是$\Gamma-$函数。当$n\geq 3$时，基本解就是位于原点的单位正电荷在全空间上的净电位。

当$n=1$时，函数$|x|$及其导数的变化如图



当$n=2$时，函数$\log|x||$扮演$n>2$时$|x|^{2-n}$相同的角色。请注意，$\lim_{x\to\infty}\log|x|=\infty$但$\lim_{x\to\infty}|x|^{2-n}=0$；此外注意到函数$\log|x|$既无上界也无下界，但 $|x|^{2-n}$始终是正的。这些事实暗示调和函数理论在平面上和在更高的维度之间的差别。另一个关键区别源于平面上全纯（holomorphic functions）函数和在的调和函数（harmonic functions）之间的紧密关系：$\Omega\subset R^n$上的实值函数是调和的，当且仅当它是局部地是一个全纯函数的实部。在更高的维度中不存在没有类似结果。

1.2 圆域：Poisson 公式

从基本解就可以看出，二维问题是具有特殊性的，需要专门加以研究，当然这种特殊性也是很令人迷惑不解的。在二维空间中，圆形区域$\bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega = \{(x, y)|0 \le x^2 + y^2 \le a^2\}$中是最简单的一种。

求解 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0，\ (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \varphi(x, y)，\ (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

引入极坐标

$$x = r\cos\theta\ ，\ y = r\sin\theta$$

问题变为$u(x, y) = u(r, \theta)$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0，\ 0 < r < 1，\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ u(r, \theta) = f(\theta)，\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

分离变量

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

代入方程，可以得到

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} = -\lambda$$

其中 λ是常数。因此得到

$$r^2R'' + rR' + \lambda R = 0$$
$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0$$

由于$u(x, y)$的单值性，要求$\Theta(\theta)$具有周期性

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi)，\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$$

因此当$\lambda < 0$时，方程 $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$得不到非零解。当$\lambda = 0$时，有

$$u(r, \theta) = (A + B\log r\,)(C\theta + D\,)$$

为使$u(r,\theta)$是以2π为周期, $C=0$。因为当$r\to 0$时, $\log r\to -\infty$, 为保证解在$r=0$有限, $B=0$;

因此$u(r,\theta)=A$。当$\lambda>0$时，方程 $\Theta''+\lambda\Theta=0$的解为

$$\Theta(\theta)=A\cos\sqrt{\lambda}\,\theta\ +B\sin\sqrt{\lambda}\,\theta$$

周期性

$$\sqrt{\lambda}=k>0,\ \ k=0,1,2,\cdots$$

Euler 方程

$$r^2R''+rR'+kR=0$$

的解

$$R(r)=Cr^k+Dr^{-k}$$

当$a=0$时，区域$\bar{\Omega}$为圆盘。为使解在$r=0$有限，$D=0$；因此

$$u_k(r,\theta)=r^k(A_k\cos k\,\theta\ +B_k\sin k\,\theta),\ \ k=0,1,2,\cdots$$

边值问题的解写为

$$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^k(A_k\cos k\,\theta\ +B_k\sin k\,\theta)$$

其中

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos k\theta\,\mathrm{d}\theta,\ \ k=0,1,2,\ \ \cdots$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin k\theta\,\mathrm{d}\theta,\ \ k=1,2,\cdots$$

把系数表示式代回级数解，可以得到封闭性表示。若记$\rho=r/a$，得到

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ +\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\int_0^{2\pi}f(\tau)(\cos k\tau\cos k\,\theta\ +\sin k\tau\sin k\,\theta)\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos k(\theta-\tau)\right]f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

当$0\le\rho<1$，有

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos k(\theta-\tau)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\theta-\tau)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\theta-\tau)}\right]$$

$$=1+\frac{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}}{1-\rho\mathrm{e}^{ik(\theta-\tau)}}+\frac{\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\tau)}}{1-\rho\mathrm{e}^{-ik(\theta-\tau)}}=\frac{1-\rho^2}{1-\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\tau)}-\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\tau)}+\rho^2}$$

$$=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}$$

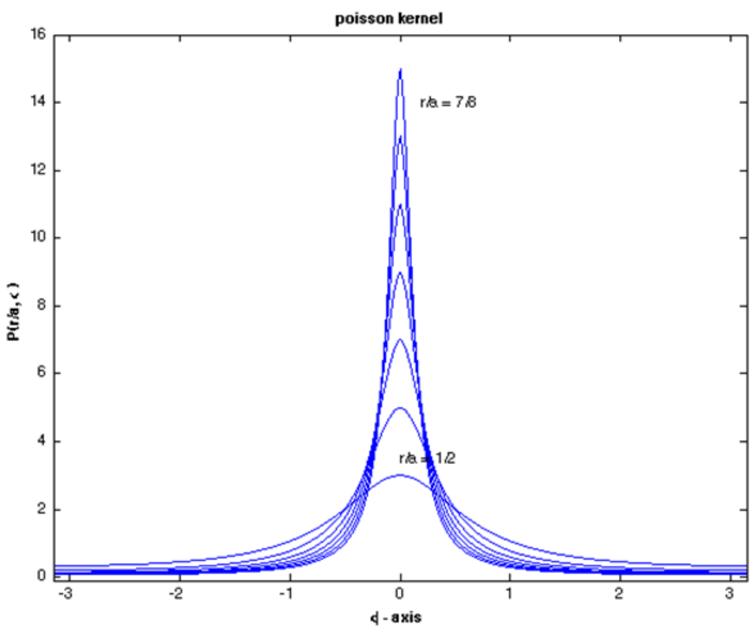
因此

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,a,\theta-\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

此即 Poisson 公式，其中

$$P(r,a,\theta)=\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos\theta+r^2}$$

称为 Poisson 核。



如图所示，Poisson 核具有下列性质：

(i) 恒正性。当$r<a$时，$P(r,a,\theta-\tau)>0$;

(ii)

$$\lim_{r\to a} P(r,a,\theta-\tau)=\begin{cases}0, & \text{当}\theta=\tau\text{时}\\ \infty, & \text{当}\theta\neq\tau\text{时}\end{cases}$$

(iii)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,a,\theta-\tau)\mathrm{d}\tau=1$$

其中性质(ii)，(iii)表明 Poisson 核是具有"δ函数性质"。

应用圆内 Dirichlet 问题解 Poisson 公式，直接可以得到调和函数的性质：特别地，当$\rho=0$，有

$$u(0,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

表述为平均**均值定理**：如果函数u在某一圆内是调和的，那么u在圆心的值等于u在圆周上值的平均值。

注意到

$$(a-r)^2\le a^2-2ar\cos\theta+r^2\le(a+r)^2$$

代入 Poisson 公式

$$u(r\sin\theta\,,r\cos\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\tau)}u(a\sin\tau\,,a\cos\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\le\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a\sin\tau\,,a\cos\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{a+r}{a-r}u(0,0)$$

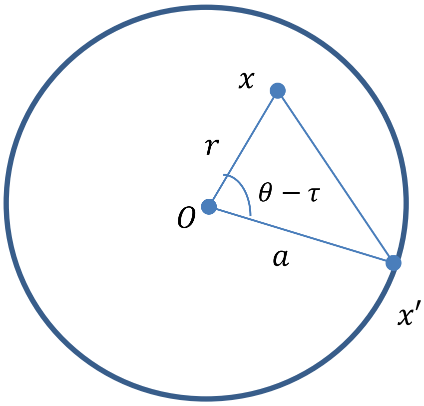
容易证明 Harnack 不等式

$$\frac{a-r}{a+r}u(0,0)\le u(x,y)\le\frac{a+r}{a-r}u(0,0)$$

只要令$a\to\infty$，Liouville 定理是直接推论：在全平面有上界（或有下界）的调和函数必为常数！

令$x=(r,\theta)$，$x'=(a,\tau)$，则$r=|x|$，$a=|x'|$，$|x-x'|^2=a^2-2ar\cos\theta-\tau+r^2$，因此$\mathrm{d}s=a\mathrm{d}\tau$

$$u(x)=\frac{a^2-r^2}{2\pi a}\int_{|x'|=a}^{0}\frac{u(x')}{|x-x'|^2}\mathrm{d}s$$



1.3 解析函数

虽然 d’Alembert 在他的著作中和 Euler 在一些特殊问题中已经用这技术解过位势方程，直到 19 世纪中叶复函数论才活跃地应用于位势理论．从技术观点来看，19 世纪最独特的创造是单复变函数的理论，常被称为函数论．这个新的数学分支统治了 19 世纪，像微积分的直接扩展统治了 18 世纪那样．函数论这一最丰饶的数学分支，曾被称为这个世纪的数学享受．它也曾被欢呼为抽象科学中最和谐的理论之一．

1830 年，学者们就熟知复数$z=x+\mathrm{i}y$的几何表示是二维平面上的一个向量，其中$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。按照波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

有 d’Alembert 通解

$$u(x,y)=f(x+ay)+u(x-ay)$$

的思路，只要取$a^2=-1$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，则 Laplace 方程的通解在某种意义下为

$$u(x,y)=f(x+\mathrm{i}y)+g(x-\mathrm{i}y)$$

引入复变数

$$z=x+\mathrm{i}y \text{ 及复共轭 } \bar{z}=x-\mathrm{i}y$$

可以建立了二维 Laplace 方程与复变函数的天然联系。

最简单的复变函数是幂函数

$$f(z)=z^n \text{ 或复共轭 } g(\bar{z})=\bar{z}^n$$

其中$n\geq 0$是不同的整数。利用z^n，$n=0$，1，2，…，可生成无穷多线性无关的复调和函数。更一般地，如果$f(z)$是个幂级数，设为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

a_n，$n=0$，1，2，…为复常数，它对z围绕某个开圆盘收敛，则$f(z)$为复调和函数。

称$w=f(z)=u+\mathrm{i}v$是$z=x+\mathrm{i}y$的一个解析函数，如果满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

则u和v和两者都满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

先定义解析函数的概念。如果在开集合D上对于所有的点z，复变函数$w(z)$可导，即导数

$$w'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{w(z+h)-w(z)}{h}$$

不论复数h怎样趋于 0，极限都有意义。函数论与位势理论的相依关系基于如下事实：如果$w=u+\mathrm{i}v$是$z=x+\mathrm{i}y$的一个解析函数，则u和v和两者都满足 Laplace 方程. 此外，如果u满足以 Laplace 方程，则$u+\mathrm{i}v$解析的共轭函数v必定存在，表述为 Euler 定理。Riemann 从复变函数的角度给 Dirichlet 问题以新的重要性，在他的博士论文中，证明了二维 Dirichlet 原理。

如果

$$w=w(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

是解析的，则函数$w(z)$的虚部和实部满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

如果函数$u(x,y)$，$v(x,y)$是二阶连续的，则它们是调和的，且

$$w'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

既然复变量z的函数$w(z)$就是把$w(z)$定义域内的每一个复数$z=x+\mathrm{i}y$赋予一个新复数$w=w(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，也就是$w$把$z-$平面（或$xy$平面）上的点映照到$w-$平面（或$uv$平面）上的点。因此，$z-$平面一个区域就映照到$w-$平面上的不同形状的区域。如果$w(z)$是解析的，在$z-$平面的一个圆盘的变形程度就随圆盘变小而减少，只要$w'(z)$在圆心$z_0$不为零。由此，当$w'(z)\neq 0$，解析函数$w(z)$确定的映照就是共形的。

解析函数或共性映照$f(z)$的关键性质之一是把$w-$平面中的区域E上的调和函数变换成D在$z-$平面的原像E上的调和函数。特别地，如果能解出熟悉的区域E（比如矩形或圆盘）上的Dirichlet，Robing或者Neumann问题，就能利用$f(z)$解出不熟悉的区域D上的相应定解问题。

在复平面上变换

$$w=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

由于

$$1-|w|^2=1-w\bar{w}=1-\frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)1-a\bar{z}}=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-a\bar{z}|^2}$$

将单位圆$|z|=1$变换为单位圆$|w|=1$，单位圆内部变换为单位圆内部。微分

$$\mathrm{d}w=\frac{\mathrm{d}z}{1-\bar{a}z}-\frac{(z-a)\bar{a}\mathrm{d}z}{(1-\bar{a}z)^2}=\frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}\mathrm{d}z$$

因此二次微分型

$$\frac{|\mathrm{d}w|^2}{(1-|w|^2)^2}=\frac{|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

不变，相应地有不变的微分算子

$$(1-|w|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial w\partial\bar{w}}=(1-|z|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}}$$

这就是Laplace算子

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

当$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau}(0\le\tau\le 2\pi)$时，$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$，即

$$e^{i\psi}=\frac{e^{i\tau}-a}{1-\bar{a}e^{i\tau}}=\frac{1-ae^{-i\tau}}{1-\bar{a}e^{i\tau}}e^{i\tau}$$

微分式

$$e^{i\psi}d\psi=\frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}e^{i\tau})^2}e^{i\tau}d\tau$$

相除，得到

$$d\psi=\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}d\tau$$

命$a=re^{i\theta}$，$r<1$，得到

$$\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\tau)+r^2}=P(r,\theta-\tau)$$

就是 Poisson 核，单位圆经变换到自己的 Jacobi 行列式。

例 求解外部 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & x^2+y^2>a^2\\ u(a,\theta)=\varphi(\theta), & 0<\theta<2\pi\end{cases}$$

其中$\varphi(\theta)$是以2π为周期的连续周期函数。

定义共形映照

$$w(z)=\frac{a^2}{z},\quad z\neq 0$$

把圆周$r=R$的外部$r>a$映照到去掉极点$z=0$的圆周内部，即$0<r<a$。运用极坐标，由于$z=re^{i\theta}$，

$$w(z)=f\left(re^{i\theta}\right)=\frac{a^2}{r}e^{-i\theta}$$

换言之，$w(z)$把点(a,θ)映照成$(a^2r^{-1},-\theta)$。如果$r\geq a$，则$a^2r^{-1}\leq a^2$。因此，$w(z)$把圆周$r=R$的外部$r>a$映照到去掉极点$z=0$的圆周的内部。现有关于边界函数$\varphi(-\theta)$的 Poisson 积分公式，得到$r<a$的一个解

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,a,\theta-\tau)\varphi(-\tau)d\tau$$

然后，利用共性映照就得到问题的一个解

$$u(r,\theta)=U\left(\frac{a^2}{r},-\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\frac{a^2}{r},a,-\theta-\tau\right)\varphi(-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\frac{a^2}{r},a,t-\theta\right)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\frac{a^4}{r^2}}{\frac{a^4}{r^2}-\frac{2a^2}{r}\cos k(\theta-t)+r^2}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-a^2}{a^2-2ar\cos k(\theta-t)+r^2}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

注意到原问题还有其他解，总可以添加调和函数

$$\left[\left(\frac{R}{r}\right)^n-\left(\frac{r}{R}\right)^n\right]\binom{\sin n\theta}{\cos n\theta},\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

的线性组合。这些线性组合在圆周$r=R$上为零，这与唯一性不矛盾，因为圆周外部区域不是有界开集合，可以证明通过共性映照得到的解在这样的意义上是唯一的有界解，存在常数M，使得对所有的(r,θ)，$r\geq 1$，$|u(r,\theta)|\leq M$。

§2 基本性质

在一维空间R^1中，调和函数$u(x)$满足

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=0$$

也就是线性函数

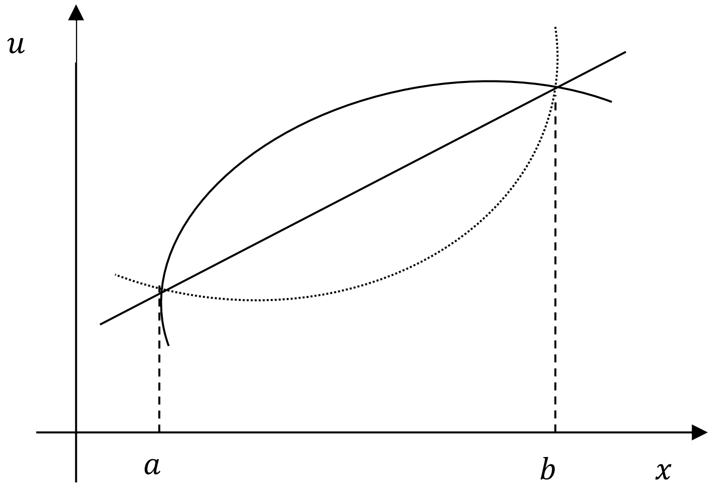
$$u(x)=ax+b$$

设$u(x)\in C^2(a,b)$，还有凸函数（convex function）

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\leq 0$$

和凹函数（concave function）

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\geq 0$$



直观地，容易验证下列命题：

(i) 均值原理：若$u(x)$是$[a,b]$上是线性可积函数，则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[u(a)+u(b)]$$

(ii) 弱极值定理： $x \in (a,b)$若

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \le (\ge) 0$$

即$u(x)$是(a,b)中的凸（凹）函数，且$u(x)$在$[a,b]$上连续，则它的极小（大）值只能在闭区间边界上达到。

(iii) 强极值原理：若$u(x)$是(a,b)上二次连续可微凸（凹）函数，在(a,b)某一内点达到极小（极大）值，则$u(x) \equiv \mathrm{const}.$

(iv) Hopf 引理：令$u(x)$是$[a,b]$上不恒等于常数，(a,b)中凸（凹）函数。若$u(x)$在(a,b)的端点可导且达到极小（大）值，则$u(x)$指向内导数是严格正（负）的。

(v) 逆均值原理：若$u(x)$定义在某个开区间(A,B)上，且上式在每个闭区间$[a,b] \subset (A,B)$成立，则$u(x)$是(A,B)上的线性函数。

(vi) 线性函数$u(x)$在区间(a,b)的边界上通量

$$u'(b) - u'(a) = 0$$

(vii) Liouville 定理：若$u(x)$是R^1上处处定义的有界线性函数，则$u(x) \equiv \mathrm{const}.$

(viii) 区间(a,b)上任意一个线性函数$u(x)$是解析的（analysistic）。

作为一维线性函数在高维空间的推广，Laplace 方程的解，调和函数（Harmonic function）比一维线性函数更丰富的空间变化，且具有强极值定理，Liouville 定理以及解析性等一系列重要性质，在偏微分方程理论中具有重要的地位，仍然发挥重要的作用。

2.1 散度定理

对于有两个连续导数的函数，运用散度定理，可以得到一系列重要的结论。美国数学家 O. D. Kellogg（1878 – 1932）关于位势理论 Foundations of potential theory（1929）不朽贡献，给出三个 Green 公式，尽管有些初等，十分重要。

散度定理涉及一个带有拓扑边界（开的连同集合但未必单连通）∂A的区域$A \subset R^n$和一个函数$w: \partial A \cup A \to R^n$，使得

$$w \in C^1(A) \text{和} w \in C(\partial A \cup A)$$

如果$p = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$，对于函数$w$的每一实分量函数

$$w_k = w_k(p) = w_k(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad 1 \le k \le n$$

记

$$\operatorname{div} w = \nabla \cdot w = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial x_k}$$

如果$\hat{n}$是区域A的边界∂A上的外法线，散度定理说

$$\int_A \operatorname{div} w \, dA = \oint_{\partial A} (w, \hat{n}) \, \mathrm{ds}$$

其中，

$$(w, \hat{n}) = \sum_{k=1}^{n} wu_k n_k \text{，} n_k \text{是} \hat{n} \text{的方向余弦}$$

神秘的 Green 区域后来称为代数拓扑学的研究范畴。

对于$u: A \to R^1$和$u \in C^1(A)$，记函数的梯度

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

是一个向量或列矩阵。容易证明

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\nabla^2 v$$

如果$A \subset R^n$是一个 Green 区域，对每一个u，$v \in C^2(A)$和$C^1(\partial A \cup A)$，令

$$w = u \operatorname{grad} v$$

带入散度定理

$$\int_A u\nabla^2 v\, dA + \int_A (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)\, \mathrm{d}A = \int_{\partial A} (u \operatorname{grad} v, \hat{n})\, \mathrm{d}s = \int_{\partial A} u(\operatorname{grad} v, \hat{n})\, \mathrm{d}s = \int_{\partial A} u\frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s$$

得到**第一 Green 恒等式**

$$\int_A u\nabla^2 v\, dA + \int_A (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)\, \mathrm{d}A = \int_{\partial A} u\frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s$$

这个结果也为俄国数学家 Michel Ostrogradsky（1801 – 1861）在 1828 年呈送给彼得堡科学院。

这是 Green 函数方法的基础。

把第一 Green 恒等式内的两函数交换位置后相减，得到**第二 Green 恒等式**

$$\int_A (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, \mathrm{d}A = \int_{\partial A} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}s$$

2.2 平均值定理

现在设Ω是R^n上的一个开集，且u是Ω上的一个调和函数. 将推导一个极为重要的平均位公式，它说明函数u在点$u \in \Omega$上的取值$u(x)$等于u在球面$\partial B(x,r)$上的平均值，也等于它在球$B(x,r)$上的平均值。由此公式可推导出关于调和函数的许多重要结论.

平均值定理：假设$u \in C^2(\Omega)$是Ω上的调和函数，则对于任意的球$B(x,r) \subset \Omega$，有

$$u(x)=\oint'_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)=\int'_{B(x,r)}u(y)\mathrm{d}y$$

其中积分记号

$$\oint'_{\partial B(x,r)}\mathrm{d}S(y)=\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\oint'_{\partial B(x,r)}\mathrm{d}S(y)\text{，}\quad\int'_{B(x,r)}\mathrm{d}y\,\frac{1}{\alpha(n)r^{n}}\int'_{B(x,r)}\mathrm{d}y$$

而

$$\alpha(n)=\frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$$

是单位球的体积。令

$$\phi(r)=\oint'_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)$$

作平移伸缩变换，则

$$\phi(r)=\oint'_{\partial B(0,1)}u(x+rz)\mathrm{d}S(z)$$

对求导并利用 Gauss-Green 定理

$$\phi'(r)=\oint'_{\partial B(0,1)}Du(x+rz)z\mathrm{d}S(z)=\oint'_{\partial B(x,r)}Du(y)\frac{y-x}{r}\mathrm{d}S(y)$$

$$=\oint'_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u(y)}{\partial n}\mathrm{d}S(y)=\int'_{B(x,r)}\Delta u(y)\mathrm{d}y=0$$

于是$\phi(r)$是常数。由$u(x)$的连续性，从而

$$u(x)=\lim_{t\to 0^{+}}\phi(t)=\phi(r)$$

即有

$$u(x)=\oint'_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}S(y)$$

注意到

$$\int_{B(x,r)} u(y)\mathrm{d}y = \int_0^r \oint_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}t = u(x)\int_0^r n\alpha(n)t^{n-1}\mathrm{d}t = \alpha(n)r^n u(x)$$

关于平均值的你命题也成立。

逆均值定理：假设$u \in C^2(\Omega)$满足，对于任意球$B(x,r) \subset \Omega$,

$$u(x) = \oint'_{\partial B(x,r)} u(y)\mathrm{d}S(y)$$

则u是调和函数.

证明　对于固定的$x \in \Omega$，任意球$B(x,r) \subset \Omega$，如平均值定理定义的函数$\phi(r)$是个常数，因此$\phi'(r) = 0$，即有

$$\frac{r}{n}\int'_{B(x,r)} \Delta u(y)\mathrm{d}y = 0$$

令$r \to 0$，由于$\Delta u(x)$的连续性，则必有

$$\Delta u(x) = 0$$

因此则u是调和函数.

实际上，逆平均值定理中的光滑性条件$u \in C^2(\Omega)$可以放宽到$u \in C^1(\Omega)$

2.3 极值定理

强极值原理：假设Ω是R^n上的有界开集，$u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$是$\Omega$上的调和函数，则

(1) $u(x)$在Ω上的最大(小)值一定在边界$\partial\Omega$急上达到，即

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

(2) 如果Ω是连通的，且存在$x_0 \in \Omega$急使得调和函数$u(x)$在x_0点达到$u(x)$在$\overline{\Omega}$上的最大(小)值，则$u(x)$在$\overline{\Omega}$上是常数.

若记

$$M = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$$

如果$u(x)$在边界$\partial\Omega$上的某点达到M，结论(1)自然成立. 如果$u(x)$在总上的内点$x_0 \in \Omega$达到M，即$u(x_0) = M$，证明在Ω的一个包含x_0的连通分支Ω_1上，调和函数$u(x)$恒为常数M

固定$x_1 \in \Omega_1$、则存在一条路径γ：$[0,1] \to \Omega_1$连接x_0和x_1两点，也就是说，路径$\gamma(t)$关于t连续且$\gamma(0) = x_0$和$\gamma(1) = x_1$。定义上确界

$$l = \sup\{t \in [0,1] \big| u\big(\gamma(t)\big) = M\}$$

只需证明$l = 1$，从而得到$u(x_1) = u\big(\gamma(1)\big) = M$。如若不然，设$l < 1$并记$x_l = \gamma(l)$，由函数$u\big(\gamma(t)\big)$的连续性，有$u(x_l) = M$. 由于$x_l$是内点，因此存在$B(x_l, r_l) \subset \Omega_1$，在$B(x_l, r_l)$应用平均值公式并注意到$u(x_l) = M$，得到在$B(x_l, r_l)$上函数$u(x) = M$. 注意到$\gamma(t)$在$l$处的连续性，存在充分小的$\varepsilon > 0$，使得$\gamma$在区间$[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$上的象集包含于$B(x_l, r_l)$. 于是$u\big(\gamma(l + \varepsilon)\big) = M$. 这与$l$是上确界的定义矛盾. 因此假设$l < 1$不成立，从而$l = 1$.

这样证明了在Ω的包含x_0的连通分支Ω_1上，$u(x)$恒为常数M. 由于函数$u(x)$的连续性，$u(x)$在Ω_1的边界$\partial\Omega_1$上也恒为常数M. 而Ω_1的边界$\partial\Omega_1$是Ω的边界$\partial\Omega$的一部分，从而得到定理的结论(1)成立.

A PROOF OF LIOUVILLE'S THEOREM

EDWARD NELSON

Consider a bounded harmonic function on Euclidean space. Since it is harmonic, its value at any point is its average over any sphere, and hence over any ball, with the point as center. Given two points, choose two balls with the given points as centers and of equal radius. If the radius is large enough, the two balls will coincide except for an arbitrarily small proportion of their volume. Since the function is bounded, the averages of it over the two balls are arbitrarily close, and so the function assumes the same value at any two points. Thus a bounded harmonic function on Euclidean space is a constant.

PRINCETON UNIVERSITY

Received by the editors June 26, 1961.

Liouville 定理：若u为R^n上有界调和函数，则u为常数.

Edward Nelson 的证明[2]，设u是R^n中的调和函数，以M为界。令$x \in R^n$和$r > 0$。依据平均值公式

$$|u(x) - u(0)| = \frac{1}{V\big(B(0,r)\big)} \left| \int_{B(x,r)} u\mathrm{d}V - \int_{B(0,r)} u\mathrm{d}V \right| \leq M \frac{V(D_r)}{V\big(B(0,r)\big)}$$

其中

$$D_r = [B(x,r) \cup B(0,r)] \backslash [B(x,r) \cap B(0,r)]$$

当$r \to 0$时，$V(D_r) \to 0$.因此$u(x) = u(0)$，即u为常数

§3 流形上的调和函数

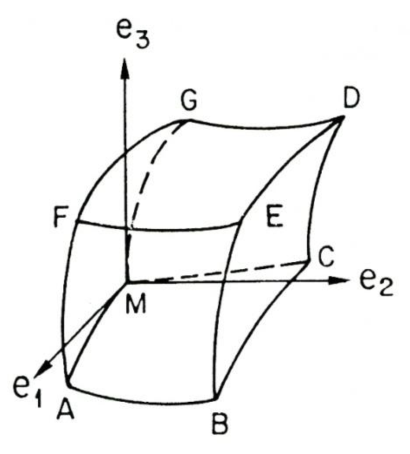
随着数学本身的发展，以及解决物理和力学中的各种问题的需要，仅仅考虑欧氏空间中的微积分是不够的. 例如，只知道定义在 Euclid 空间的开区域中的函数的连续性和可微性，则尚不能对于定义在球面上的函数的连续性和可微性有正确而深刻的了解。所以，有必要把微积分的“演出舞台”从欧氏空间进一步拓展到微分流形。概念是由伟大的数学家 D. Riemann 在 1854 年的著名演讲《关于几何学的基本假设》中提出来的。在笛卡儿和费马发明坐标系之后，所处的空间中的点与 3 个有次序的实数的组(r. g’ ?)能够建立 L—l 对应关系. 这是数学中的革命性创举，是牛顿和莱布尼茨发明微积分的前奏曲. Riemann 关注数学物理问题，特别是热方程他把物理中的数据看成是抽象空间中的点，该数据成为“点”的坐标此时，坐标不再有具体的几何含义如距离、夹角等. 黎曼引进的实际上是现在所称的局部坐标系。

在 20 世纪初 Polnc 盯 e 提出拓扑学之后，拓扑概念很快成为数学的基础概念流形和微分流形的概念在此基础上逐渐成熟，大范围分析(即大范围的微积分学)和大范围微分几何学应运而生，成为 20 世纪的热门研究课题与此同时，微分流形的有关概念成为现代数学的基本术语，出现在众多的数学文献中了解和掌握微分流形的基本概念和术语是进入现代数学殿堂的前提.

[2] Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 995, Alberto Farina 称它为简单而优雅的证明(a simple and elegant proof).

2.1 曲面坐标

关注热方程的数学家兼工程师 Gabriel Lame（1796-1870）引入了一个主要的技巧，即使用曲线坐标系，用于许多类型的方程. 此前，Euler 和 Laplace 已使用了球坐标，知道了从直角坐标变换到球坐标的方法。新坐标系和坐标曲面的价值是双重的. 一方面，在直角坐标系中，一个偏微分方程可能不能分离成这坐标系中的常微分方程但在另一坐标系中可能是可分离的. 另一方面，物理问题可能需要一个曲面边界条件，比如说椭球上的边界条件，这样的边界在有一族以椭球组成坐标面的坐标系中可以简单地表示出来，而在直角坐标系中必须用比较复杂的方程。此外，在所采用的适当的坐标系中经变量分离后，这个边界条件变成恰好可应用于所得常微分方程中的一个方程.

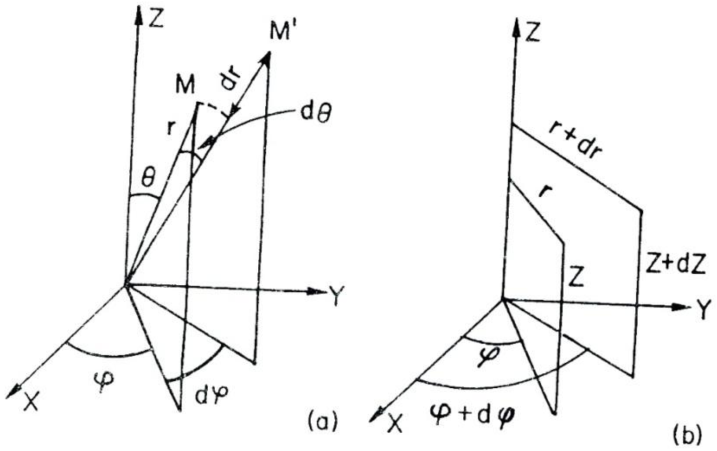


如果空间中的点位置由三个有序的数(ξ_1, ξ_2, ξ_3)来表示，且每三个这样有序的数就完全确定一个空间的点；反之，若空间中每一点都对应着三个这样有序的数，则称(ξ_1, ξ_2, ξ_3)为空间的曲线坐标。由于空间点又可用熟悉的直角坐标(x_1, x_2, x_3)来表示，所以(ξ_1, ξ_2, ξ_3)都是直角坐标的单值函数，反之，直角坐标(x_1, x_2, x_3)也是(ξ_1, ξ_2, ξ_3)的单值函数，记为

$$\begin{cases}\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3)\\ \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3)\\ \xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3)\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\\ x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\\ x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\end{cases}$$

下面三个方程

$$\xi_1(x_1,x_2,x_3)=c_1,\ \xi_2(x_1,x_2,x_3)=c_2,\ \xi_3(x_1,x_2,x_3)=c_3$$



分别表示(ξ_1,ξ_2,ξ_3)的三个等值面，又称为坐标曲面。由于(ξ_1,ξ_2,ξ_3)是单值函数，所以空间中的各点，只有一组坐标曲面通过。每两个坐标曲面相交的曲线称为坐标曲线。例如，在$\xi_2(x_1,x_2,x_3)=c_2$与$\xi_3(x_1,x_2,x_3)=c_3$两个坐标曲面相交的坐标曲线上，ξ_2，ξ_3分别取c_2 和c_3值,只有ξ_1值可以改变。该条坐标曲线称为坐标曲线ξ_1；与此类推，同样可作出坐标曲线ξ_2，ξ_3。过空间任意点M，有三条坐标曲线，$\xi_1(M)$，$\xi_2(M)$，$\xi_3(M)$。在其切线方向上取一组单位矢量$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$购成右手坐标系。如果$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$是互相正交的，则称这组坐标系是正交曲线坐标系。在正交曲线坐标中，P点的矢量$\mathbf{A}$可表示为

$$\mathbf{A}=A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3$$

在坐标曲线ξ_1上的曲线弧元长度为

$$\mathrm{d}s_1=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi_1=H_1 d\xi_1$$

其中

$$H_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\right)^2}$$

与此类推，一般地有

$$\mathrm{d}s_k=H_k\mathrm{d}\xi_k,\ k=1,2,3$$

和度规系数

$$H_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_k}\right)^2}\text{，}\ k = 1\text{，}\ 2\text{，}\ 3$$

任意一个标量函数$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$的梯度为

$$\text{grad}\, u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \nabla u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial s_k} \mathbf{e}_k$$

而

$$\frac{\partial u}{\partial s_k} = \frac{\partial u}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial s_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial u}{\partial \xi_k}$$

因此

$$\nabla u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{H_k}\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\mathbf{e}_k$$

任意一个矢量函数$\mathbf{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$的散度定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s$$

取六面体，体积为

$$V = \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_3 = H_1 H_2 H_3 \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3$$

在坐标$\boldsymbol{e}_1$方向，位于ξ_1和$\xi_1 + d\xi_1$处的坐标面通量为

$$[A_1\, \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_3]_{\xi_1 + d\xi_1} - [A_1\, \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_3]_{\xi_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1}(A_1 H_2 H_3)\mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3$$

与此类推，得到矢量$\mathbf{A}$的总通量

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}(A_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(A_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}(A_3 H_2 H_1)\right]$$

综上所述，对任一个标量函数$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$而言

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla\, u) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_k}\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right)$$

对于球坐标系

$$\xi_1 = r\text{，}\ \xi_2 = \theta\text{，}\ \xi_3 = \phi\text{；}\ H_1 = 1\text{，}\ H_2 = r\text{，}\ H_3 = r\sin\theta$$

有

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$

对于柱坐标系

$$\xi_1 = r，\xi_2 = \phi，\xi_3 = z；H_1 = 1，H_2 = r，H_3 = 1$$

则

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

2.2 微分流形

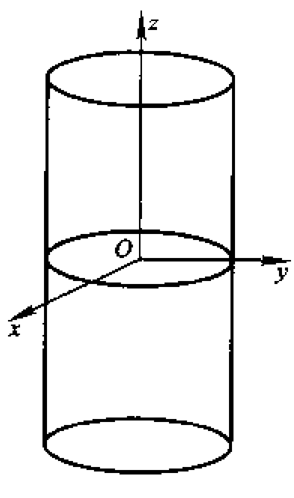
多元微积分是研究定义在 n 维欧氏空间 RH 上的函数的微积分理论. 但是，随着数学的发展，以及它的应用范围的扩大，把我们所考虑的空间局限于欧氏空间显然是不够的。比如，要大范围地研究地球的表面，则它在数学上只能看作一个椭球面，尽管在每一点的附近可以近似地看作一小块平面，但是就整个表面来说它不是 2 维的欧氏空间。当然，在微积分“演出”的舞台从 Euclid 空间扩展到一般的微分流形的过程中，始终是把 Euclid 空间作为参照物，把 Euclid 空间作为模型。要把在 Euclid 空间中籍以定义连续函数、可微函数的构造抽象出来，移植到抽象的非空集合上来

例子：设$M = R^2\backslash\{O\}$，$N = R^3$，定义映射$f: M \to N$为

$$x = f^1(u,v) = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$$
$$y = f^2(u,v) = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$$
$$z = f^3(u,v) = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)$$

则M在f下的像$f(M)$是中的圆柱面

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in R^3:\ x^2+y^2=1,\ -\infty < z < +\infty\right\}$$



显然，f是从M到Σ的 1-1 对应。实际上，对于任意的$(x,y,z) \in \Sigma$，只要取

$$u = xe^z,\ v = ye^z$$

则

$$f(u,v) = \left(f^1(u,v), f^2(u,v), f^3(u,v)\right) = (x,y,z)$$

所以逆映射

$$f^{-1}(x,y,z) = \left(xe^z,\ ye^z\right),\ \forall (x,y,z) \in \Sigma$$

因为$f^1(u,v), f^2(u,v), f^3(u,v)$都是$M$上的连续函数，所以$f$是从$M$到$R^3$的连续映射，但是$\Sigma$不是$R^3$的开子集，那么$f$作为从$M$到$\Sigma$的映射是否连续呢?反过来，逆映射$f^{-1}$：$\Sigma \to M$是否连续呢?它们的连续性应该怎样定义呢?这些就是需要解决的新问题。要定义映射$f: M \to \Sigma$的连续性，关键是要弄清楚圆柱面Σ在它的任意一点的邻域是什么。具体地说，集合$M = R^2 \backslash \{O\}$与圆柱面Σ是同胚的。

例子说明，只考虑定义在R^n的开子集上的连续函数或连续映射是不够的，需要考虑定义在像圆柱面Σ那样的集合上的连续函数或连续映射。如果要对定义在集合X上的函数能够叙述连续性的概念，必须有一种方式在集合X上指定一些满足一定条件的子集，让这些子集作为其中的每一个元素的邻域. 这就是集合X的拓扑结构.

设$r > 0$，$X_0 \in R^n$，命

$$B(X_0; r) = \{A \in R^n : d(X_0, A) < r\}$$

称为n维欧氏空间R^n中以X_0为中心、以r为半径的**球状邻域。球邻域**的形状取决于一个实数表征的度量$d(X_0, A)$，不涉及维数的统一语言。包含在 Euclid 空间中习惯的几何形象，又包含构造各种形状离奇的球的可能。

开集

闭集

覆盖

曲面定向，联通性

根据定义，开区间(a,b)是光滑流形，但是闭区间$[a,b]$不是光滑流形. 同样，在平面上的开圆盘$\{(u,v)\in R^2: u^2+v^2<1\}$是光滑流形，而闭的圆盘$\{(u,v)\in R^2: u^2+v^2\leq 1\}$不是光滑形. 由此可见，一些员常见的空间不属于光滑流形之列，这自然是不合理的. 比较上面的例子能够发觉，问题出在有没有边界上，以及如何刻画边界。

流形（Manifold），是局部具有 Euclid 空间性质的空间。流形最简单的实例就是实际上 Euclid 空间。像地球表面这样的球面是一个稍为复杂的例子。一般的流形可以通过把许多平直的片折弯并粘连而成。 流形在数学中用于描述几何形体，提供最自然的研究可微性舞台。物理上，经典力学的相空间和构造广义相对论的时空模型的四维伪黎曼流形都是流形的实例。他们也用于位形空间(configuration space)。环面(torus)就是双摆的位形空间。

如果把几何形体的拓扑结构看作是完全柔软的，因为所有变形(同胚)会保持拓扑结构不变，而把解析簇看作是硬的，因为整体的结构都是固定的(譬如一个 1-维多项式，如果知道(0,1)区间的取值，则整个实属范围的值都是固定的，局部的扰动会导致全局的变化)，那么可以把光滑流形看作是介于两者之间的形体，其无穷小的结构是硬的，而整体结构是软的。这也许是中文译名流形的原因，整体的形态可以流动，由中国著名数学家和数学教育学家江泽涵引入。这样，流形的硬度使它能够容纳微分结构，而它的软度使得它可以作为很多需要独立的局部扰动的数学和物理上的模型。

流形可以视为近看起来类似 Euclid 空间或其他相对简单的空间的物体。例如：曾经以为地球是平坦的，因为相对于地球很小，这是一个可以理解的假象。所以，数学上的理想的球在足够小的区域也像一个平面，这使它成为一个流形。但是球和平面有很不相同的整体结构：如果在球面上沿一个固定方向走，最终回到起点；而在一个平面上，可以一直走下去。

一个曲面是 2 维的。但是，流形可以有任意维度。其他的例子有，一根线的圈(一维的)以及三维空间中的所有旋转(三维的)。旋转所组成的空间，表明流形可以是一个抽象空间。流形的技术得以能够独立的考虑这些对象，从某种意义上来讲，可以有一个不依赖于任何其他空间的球。

局部的简单性是一个很强的要求。例如，不能在球上吊一个线并把这个整体叫做一个流形；包含把线粘在球上的那一点的区域都不是简单的 ：既不是线也不是面 ，无论这个区域有多小. 用收集在地图集中的平的地图在地球上航行。类似的，可以用在数学图集中的数学地图(称为坐标图)来描述一个流形.通常不可能用一张图来描述整个流形，这是因为流形和建造它的模型所用的简单空间在全局结构上的差异。当使用多张图来覆盖流形的时候，必须注意它们重叠的区域，因为这些重叠包含了整体结构的信息。

有很多不同种类的流形。最简单的是拓扑流形，它们局部看来像 Euclid 空间。其他的变种包含了它们在使用中所需要的额外的结构。例如，一个微分流形不仅支持拓扑，而且要支持微积分。Riemann 流形的思想导致了广义相对论的数学基础，使得人们能够用曲率来描述时空。圆是除欧几里得空间外的拓扑流形的一个简单例子。考虑一个半径为 1，圆心在原点的圆。若x和y是圆上的点的坐标，则有$x^2+y^2=1$。局部看来，圆像一条线，而线是一维的。换句话说，只要一个坐标就可以在局部描述一个圆。例如，圆的上半部，y坐标大于零的部分（右图中黄色的部分），任何一点都可以用x坐标确定。投影映射:

$$\phi_{\mathrm{top}}\colon\ (x,y)\mapsto x$$

把上半圆映射到开区间$(1,1)$。反过来，给定一个x，$\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$就是上半圆的一点:

$$\phi_{\mathrm{top}}^{(-1)}\colon\ x\mapsto\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$$

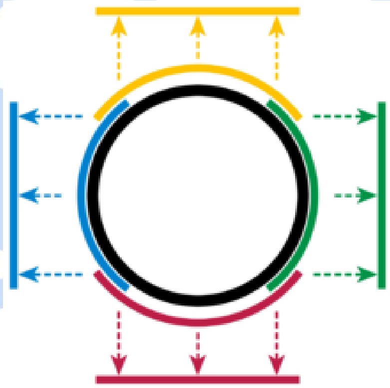
这样的一个映射ϕ_{top}就是一个坐标图。作用就是告之“地图”上的一点对应着实际中的哪一点。ϕ_{top}和它的逆映射$\phi_{\mathrm{top}}^{(-1)}$都是连续函数甚至是光滑函数，这样的映射也叫做一个（微分）同胚。

类似的，也可以为圆的下半部（红），左半部（蓝），右半部（绿）建立坐标图。这四个部分合起来覆盖了整个圆，这四个坐标图就组成了该圆的一个图册。

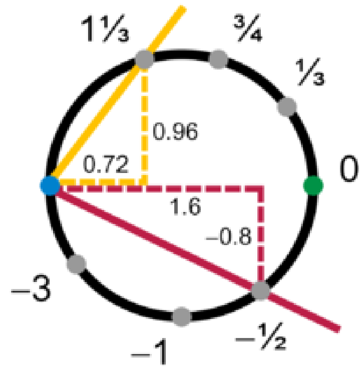
注意圆上部和右部的重叠部分，也就是位于圆上x和y坐标大于 0 的四分之一圆弧。两个坐标图ϕ_{top}和ϕ_{right}都将这部分双射到区间$(0,1)$。这样有一个从$(0,1)$到它自己的双射T：首先取$(0,1)$上面一点a（黄色线段右半部分的点）黄色坐标图的逆映射到达圆上的对应点$\left(a,\sqrt{1-a^2}\right)$，再通过绿色坐标图映射到$(0,1)$上：

$$T(a)=\phi_{\text{right}}\left(\phi_{\text{top}}^{(-1)}(a)\right)=\phi_{\text{right}}\left(a,\sqrt{1-a^2}\right)=\sqrt{1-a^2}$$

映射T称为坐标变换映射，描述一张“地图”上的点是如何对应到另一张“地图”上的相应的点，说明了两张地图之间的关系。



四张图分别把圆的一部分映射到一个开区间，它们合在一起覆盖了整个圆。



圆流形基于斜率的坐标图集，每个图覆盖除了一点之外的所有点。

2.3 Laplace 算子

尽管在有向 Riemann 流形上如同有向的 Euclid 空间一样能够定义各种各样的微分算子，它们在容许的局部坐标系下有相同的表达式。但是 Riemann 流形可以有不同于 Euclid 空间的拓扑性质，特别是 Riemann 流形有不同于 Euclid 空间的度量结构，通常说 Euclid 空间是平直的，而一般的 Riemann 流形是弯曲的，因此这些微分算子应该有不同的性态研究 Riemann 流形上

微分穷子的性态是引人注目。结合具体的例子说明在弯曲的 Riemann 流形上的微分算子的性态和在 Euclid 空间上的情形

考虑单位球面$S^2=\{(x,y,z)\in R^3\colon x^2+y^2+z^2=1\}$和与其对照的 Euclid 空间$R^2$. 不同之处在于$S^2$是紧致的，而$R^2$是非紧的；$S^2$是弯曲的，而因$R^2$是平直的，不弯曲的。设$(u,v))$是$R^2$上的笛卡儿直角坐标系，则 Laplace 算子是

$$\Delta u=\nabla^2 f=\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)u,\ \forall u\in C^\infty(R^2)$$

因此，1 次多项式都是调和的，是u,v的任意的线性组合。没u是R^2上的k次多项式，$k\geq 2$，于是可设

$$u=a_0u^k+a_1u^{k-1}v+\cdots+a_{k-1}uv^{k-1}+a_rv^k=\sum_{i=0}^{k}a_iu^{k-i}v^i$$

那么

$$\Delta u=\sum_{i=0}^{k-2}(k-i)(k-i-1)a_iu^{r-i-2}v^i+\sum_{i=2}^{k-2}i(i-1)a_iu^{k-i}v^{i-2}$$
$$=\sum_{i=0}^{k-2}[(r-i)(r-i-1)a_i+(i+2)(i+1)a_{i+2}]u^{k-i-2}v^i$$

因此f是k次调和多项式当且仅当它的系数满足条件

$$(k-i)(k-i-1)a_i+(i+2)(i+1)a_{i+2}=0,\ \forall 0\leq i\leq k-2$$

由此可见，在R^2上r次调和多项式构成一个 2 维的向量空间。例如，在$k=2$时，f是调和多项式的充分必要条件是$a_0+a_2=0$，所以 2 次调和多项式是u^2-v^2和uv的任意的线性组合；在$k=3$时，调和多项式的基底是u^3-3uv^2，$3u^2v-v^3$。因此，在R^3上有很多调和函数. 但是，**在单位球面上，情况就完全不一样了，仅有常值函数是调和函数。更一般地，“紧致有向 Riemann 流形上的调和函数必定是常值函数”**

下面研究S^2上的 Laplace 算子和R^3中的 Laplace 算子之间的关系．为此，考虑半径为r的球面$S^2(r)$上的 Laplace 算子，记为Δ_r；单位球面 5’上的 Laplace 算子记为Δ，即$\Delta = \Delta_1$，而 Euclid 空间R^3中的 Laplace 算子则记为Δ_0。对照 44．3 的例 4 中的公式不难得知，R^3中的 Laplac 算子Δ_0，和$S^2(r)$上的 Laplace 算子Δ之间有下列关系式:

设$u \in C^\infty(R^3)$，则

$$\Delta_0 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \Delta_r u|_{S^2(r)}$$

特别地，R^3中的 Laplac 算子Δ_0和单位球面S^2上的 Laplace 算子Δ之间有下列关系式:

$$(\Delta_0 u)_{S^2} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right|_{r=1} + \left.\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} + \Delta(u|_{S^2}),\ \forall u \in C^\infty(R^3)$$

实际上．上式对于只在R^3中包含单位球面S^2在内的一个开邻域上有定义的光滑函数都是成立的．

在球坐标系(r, θ, φ)下，k次齐次多项式为

$$u = r^k u_0(\theta, \varphi)$$

于是

$$\Delta_0 u = k(k+1) r^{k-2} u_0(\theta, \varphi) + r^{k-2} \Delta u_0(\theta, \varphi)$$

如果u是R^3R3 上的调和函数，则在上面的方程式中命$k = 1$使得到

$$\Delta(f|_{S^2}) = \Delta f_0(\theta, \varphi) = k(k+1) f_0(\theta, \varphi) = -k(k+1) f|_{S^2}$$

综上所述，若u是定义在R^3上的k次齐次调和多项式，则$f|_{S^2}$满足方程式

$$\Delta(f|_{S^2}) = -k(k+1) f|_{S^2}$$

即$f|_{S^2}$是单位球面S^2上特征值为$-k(k+1)$的特征函数．进一步还能够证明：在S^2上的所有特征函数都可以这样得到.

习题 15

1. 证明区域$\bar{\Omega}$为圆环 Dirichlet 问题的解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}(A_0+B_0\log r)+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k r^k+B_k r^{-k})\cos k\,\theta+(C_k r^k+D_k r^{-k})\sin k\,\theta$$

2. 证明

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial S}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)\mathrm{d}S_Q\;=4\pi u(P)$$

和

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{S}\left(\frac{1}{r_{PQ}}\right)\Delta u \mathrm{d}A_Q\quad =0$$

注意，4π就是是单位球面面积。

3. 证明对于$r\le r_0$，有

$$\frac{r_0-r}{r+r_0}\le\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2r_0 r\cos(\theta-t)+\;r^2}\le\frac{r+r_0}{r_0-r}$$

利用此结果推断：如果$u(r,\theta)$在开圆盘$r<r_0$内调和，在闭圆盘$r\le r_0$上连续且是非负的，则 Harnack 不等式

$$\frac{r_0-r}{r+r_0}u(0,0)\le u(r,\theta)\le\frac{r+r_0}{r_0-r}u(0,0),\;\; r<r_0$$

成立；利用 Harnack 不等式证明对于所有(x,y)有定义的非负调和函数$u(x,y)$必是常数。

4. 证明如果v是调和函数u的调和共轭，则在任意点处，梯度∇u和∇v是等长的且是正交的，由此推断在$\nabla u\neq 0$的点，u和v的水平曲线是正交的。

5. 证明上半平面的 Lapalce 方程 Dirichelt 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\;\; -\infty<x<\infty,\;\; -\infty<y<\infty\\ \qquad u(x,0)=\varphi(x),\;\; -\infty<x<\infty\end{cases}$$

如果$\varphi(x)$，$-\infty < x < \infty$是有界连续函数，则有唯一有界连续解

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x-s)^2}\varphi(s)\mathrm{d}s$$

提示：应用 Fourier 变换。