**NASA Technical Report:Euler Angles, Quaternions and Transformation Matrices**

Author: 练孙鸿

**0 引言**

因为最近要给Noise3D集成一个RigidTransform之类的class，动机是做SH Lighting Preview Utility的时候想要用鼠标旋转球体，结果发现如果只能控制Euler Angle的话实现delta rotation很麻烦，干脆就把四元数也加进来然后实现一个RigidTransform的类，把几种旋转表示的转换都封装一下。这里考虑了几种旋转表示方法：Euler Angle，Quaternion，Rotation Matrix，（还有个擦边的Lookat转Euler Angle）。网上很多blog的旋转表示转换方法都是基于ZYX的欧拉角顺规的，这就很不清真了，因为D3D是y轴向上的左手系而且顺规也不一样，那么很多公式就不能直接copy了。这篇笔记玩意主要参考了一篇NASA 1977的Technical Report[1]，看起来好像给出了12种欧拉角顺规的euler-to-matrix conversion，以及与quaternion的转换等。所以我觉得可以看一手，并且记下一点与D3D相关的旋转转换公式。

**1 欧拉角(Euler Angle)，顺规，旋转矩阵**

D3D和OpenGL不同，用的坐标系是Y轴竖直向上的左手系，所以欧拉角Yaw-Pitch-Roll的顺规是跟广大blog、OpenGL不一样的，那么博客上、甚至维基百科[2]上的各种基于右手系xyz顺规(分别对应roll, pitch,yaw)的看起来就不太能随随便便直接用了。虽然有一部分转换是DirectXMath支持的，例如XMQuaternionRotation()，XMMatrixRotationQuaternion()等。但是为了不要用得稀里糊涂，以及实现一些接口不提供的东西，我还是决定自己实现几种Rotation Representation的conversion吧…

首先欧拉角旋转序列(Euler Angle Rotational Sequence)一共有12种顺规，6种绕三条轴的旋转(XYZ,XZY,YXZ,YZX,ZXY,ZYX)，另外6种绕两条轴的旋转(XYX,YXY,XZX,ZXZ,YZY,ZYZ)。如果相邻两次旋转是绕同一条轴，例如XXY，那么其实可以坍缩成XY。那么只绕一条轴旋转就根本不够自由度就不需要说了。所以一共是12种旋转顺规（可以表示所有旋转的集合），其中基于D3D的Noise3D采用的是Z(roll)X(pitch)Y(Yaw)顺规，写成列向量矩阵时应该是：（与维基百科Euler Angles[3]给出的结果一致）

其中是绕y轴旋转的yaw，是绕x轴旋转的pitch，是绕z旋转的roll。所以：

注意两种不同的旋转顺规想要把同一物体旋转到同一姿态，那么他们的欧拉角Yaw-Pitch-Roll角度值是不一样的。

**2 四元数(Quaternion)**

我们可以用把一个旋转写成四元数的形式。如果我们设是旋转角，旋转轴由方向余弦(directional cosine)表示为，由轴角Axis-Angle方式构造四元数方式如下：

注意：

这里按右手定则来定义旋转方向（笔者疑问：左右手系和左右手法则有没有什么影响呢？），那么给定一个四元数，可以构造旋转矩阵[1][4]：

**引用**

[1]Henderson, D.M.. Euler angles, quaternions, and transformation matrices for space shuttle analysis[C]//NASA, Jun 09, 1977.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Conversion\_between\_quaternions\_and\_Euler\_angles#Tait%E2%80%93Bryan\_angles

[3] <https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_angles>

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation\_matrix