Экзамен по Теории вероятностей и математической статистике

Вопрос 1. Дать определения случайного события, пространства элементарных событий. Привести примеры.

Определение: **Элементарным исходом** (или **элементарным событием**) называют любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Множество всех элементарных исходов будем называть **пространством элементарных событий**.

Пример:

Пусть опыт состоит в однократном подбрасывании монеты. При математическом описании этого опыта естественно отвлечься от несущественных возможностей (например, монета встанет на ребро) и ограничиться только двумя элементарными событиями: выпадением "герба" (можно обозначить этот событие Г, $\omega_{\text{Г}}$ или ω_1) и выпадением "цифры" (Ц, $\omega_{\text{Ц}}$ или ω_2). Таким образом,

$$\Omega = \{\text{Г}, \text{Ц}\}, \Omega = \{\omega_{\text{Г}}, \omega_{\text{Ц}}\}$$

или

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

При двукратном подбрасывании монеты (или однократном подбрасывании двух монет) пространство элементарных событий будет, очевидно, содержать 4 элемента, т.е.

$$\Omega = \{\omega_{\text{ГГ}}, \omega_{\text{ЦГ}}, \omega_{\text{ГЦ}}, \omega_{\text{ЦЦ}}, \}$$

где $\omega_{\text{ГГ}}$ — появление "герба" и при первом, и при втором подбрасываниях, и т.д.

Вопрос 2. Дать классическое определение вероятности, сформулировать основные свойства вероятности.

Определение: Вероятностью события A назовем отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных событий (исходов) к общему числу N равновозможных элементарных событий, т.е.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Данное определение вероятности события принято называть **классическим определением вероятности**. Заметим, что наряду с названием "классическая схема" используют также на- звания "случайный выбор", "равновероятный выбор" и т.д.

Основные свойства:

Свойство 1. Для любого события A вероятность удовлетворяет неравенству $P(A) \geq 0$.

Свойство 2. Для достоверного события Ω (которое содержит все N элементарных исходов) $P(\Omega) = 1$.

Свойство 3. Если события A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Вопрос 3. Сформулировать аксиомы теории вероятности. Сформулировать и доказать основные свойства вероятности.

Аксиома 1 (аксиома неотрицательности): $P(A) \geq 0$;

Аксиома 2 (аксиома нормированности): $P(\Omega) = 1$;

Аксиома 3 (расширенная аксиома сложения): для любых попарно несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ справедливо равенство

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Значение $P(A)$ называется **вероятностью события** A.

Иногда вместо аксиомы 3 удобно использовать две другие аксиомы.

Аксиома 3′ (аксиома сложения для двух событий): для любых двух несовместных событий A и B справедливо равенство

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

;

Аксиома 4 (аксиома непрерывности): если последовательность событий $A_1, ..., A_n ...$ такова, что $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, и $A_1 \cup ... \cup A_n \cup ... = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A$, то

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A)$$

Основные свойства:

Свойство 1. Для любого события A вероятность удовлетворяет неравенству $P(A) \geq 0$.

Доказательство: Свойство очевидно, так как отношение NA/N не может быть отрицательным.

Свойство 2. Для достоверного события Ω (которое содержит все N элементарных исходов) $P(\Omega) = 1$.

Свойство 3. Если события A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство: Действительно, если событию A благоприятствуют N_1 исходов, а событию B— N_2 исходов, то в силу несовместности A и B событию $A+B$ благоприятствуют $N_1 + N_2$ исходов. Следовательно,

$$P(A+B) = \frac{N_1 + N_2}{N} = \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} = P(A) + P(B)$$

Вопрос 4. Вывести формулу полной вероятности и формулу Байеса.

Будем говорить, что события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют **полную группу событий**, если они удовлеворяют следующим двум условиям:

1. События $H_1, H_2, ..., H_n$ являются попарно несовместными событиями, т.е. $H_i H_j \neq 0$ при $i \neq j$;
2. хоия бы одно из $H_1, H_2, ..., H_n$ обязательно должно произойти в результате опыта, другими словами, их *объединение* есть достоверное событие, т.е. $H_1 \cup ... \cup H_n = \Omega$.

Пусть события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий. Тогда для произвольного события A справедлива **формула полной вероятности**

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + ... + P(H_n)P(A|H_n)$$

Формула Байеса:

Пусть для некоторого события $A, P(A) > 0$, и гипотез $H_1, ..., H_n$ известны $P(H_1), ..., P(H_n)(P(H_i) > 0, i \neq 1, n)$ и $P(A|H_1), ..., P(A|H_n)$. Тогда условная вероятность $P(H_i|A), i \neq 1, n$, гипотезы H_i при условии события A определяется **формулой Байеса**

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + ... + P(H_n)}$$

Вопрос 5. Дать определение условной вероятности. Доказать теорему умножения. Дать определение независимых событий.

Определение: **Условной вероятностью** события A при условии (наступления) события B называют отношение вероятности *пересечения* событий A и B к вероятности события B:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

При этом предполагают, что $P(B) \neq 0$.

Теорема (теорема умножения вероятностей): Пусть событие $A = A_1 A_2 ... A_n$ (т.е. A - пересечение событий $A_1, A_2, ..., A_n$) и $P(A) > 0$. Тогда справедливо равенство

$$P(A) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) ... P(A_n|A_1 A_2 ... A_{n-1})$$

называемое **формулой умножения вероятностей**.

Доказательство: Пусть выполнено равенство $P(B|A) = P(B)$. Воспользовавшись формулой умножения вероятностей для двух событий, получим

$$P(AB) = P(A) P(B|A) = P(A) P(B).$$

К аналогичному выводу приходим и в случае выполнения равенства $P(A|B) = P(A)$, т.е. из условия независимости событий следует $P(AB) = P(A)P(B)$.

Обратно, пусть выполнено равенство $P(AB) = P(A)P(B)$. Тогда, согласно определению $P(A|B) = P(A)$ условной вероятности,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \text{ или } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$$

Определение: События A и B, имеющие ненулевую вероятность, **называют независимыми**, если условная вероятность A при условии B совпадает с безусловной вероятностью A или если условная вероятность B при условии A совпадает с безусловной вероятностью B, т.е.

$$P(A|B) = P(A) \text{ или } P(B|A) = P(B)$$

в противном случае события A и B называют зависимыми.

Вопрос 6. Изложить схему Бернулли, вывести формулу о вероятности успехов в схеме Бернулли и следствия из неё.

Схемой Бернулли (или последовательностью независимых одинаковых испытаний, или биномиальной схемой испытаний) называют последовательность испытаний, удовлетворяющую следующим условиям:

1. при каждом испытании различают лишь два *исхода*: появление некоторого события A, называемого “успехом”, либо появление его дополнения $\overline{A}$, называемого “неудачей”;
2. испытания являются независимыми, т.е. вероятность успеха в k-м испытании не зависит от исходов всех испытаний до k-го;
3. вероятность успеха во всех испытаниях постоянна $P(A) = p$.

Теорема Бернулли: Вероятность того, что в схеме Бернулли из n испытаний будет ровно k успехов, определяется формулой

$$P_{n(k)} = C_n^k p^k q^{n-k} k = 0, ..., n.$$

где $q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одном испытании

Следствие 1: Вероятность появления успеха в n испытаниях не более k_2 раз и не менее k_1 раз равна:

$$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \ (1.1)$$

Это следует из того, что события $\{\mu = k\}$ при разных k являются несовместными.

Следствие 2: В частном случае при $k_1 = 1$ и $k_2 = n$ из (1.1) получаем формулу для вычисления вероятности хотя бы одного успеха в n испытаниях: $P\{\mu \geqslant 1\} = 1 - q^n$

Вопрос 7. Дать определение функции распределения вероятности случайной величины. Сформулировать и доказать её свойства.

Определение: Случайной величиной ξ, называют любую функцию из Ω в R, для которой множество $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\}$ — является событием (т.е. принадлежит σ-алгебре событий A) для любого $x \in R$.

Определение: Функцией распределения (вероятностей) случайной величины ξ называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{\xi < x\}$, т.е. события, состоящего из тех и только тех элементарных исходов ω, для которых $\xi(\omega) < x$:

$$F(x) = P\{\xi < x\}$$

Свойство 1:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \text{ для любого } x \in \mathbb{R};$$

Доказательство: Поскольку значение функции распределения в любой точке x является вероятностью, то из свойства 4 вероятности вытекает утверждение 1.

Свойство 2:

$F(x) \leq F(y)$ для любых действительных $x < y$, т.е. $F(x)$ — неубывающая функция;

Доказательство: Так как $\{\xi < x\} \subset \{\xi < y\}$ при $x \leqslant y$, то из свойства вероятности вытекает, что $P\{\xi < x\} \leq P\{x < y\}$, т.е. $F(x) \leq F(y)$.

Свойство 3:

$$F(-\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 0;$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1;$$

Доказательство: Так как последовательность событий $\{\xi < n\}, n = 1, 2, \ldots,$ монотонно возрастает, т. е.

$$\ldots \subset \{\xi < n\} \subset \{\xi < n + 1\} \subset \ldots$$

и

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi < n\} = \Omega$$

то из аксиомы непрерывности вытекает

$$\lim_{n \to \infty} F(n) = \lim_{n \to \infty} P\{\xi < n\} = P(\Omega) = 1$$

Отсюда с учетом доказанной монотонности функции F(x) получаем, что $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$. Второе соотношение во втором свойстве доказывается аналогично.

Свойство 4:

$$P\{x \leq \xi \leq y\} = F(y) - F(x) \text{ для любых действительных } x < y;$$

Доказательство: Так как

$$\{\xi < y\} = \{\xi < x\} + \{x \leq \xi < y\}, \quad \{\xi < x\} \cap \{x \leq \xi < y\} = \emptyset,$$

то согласно аксиоме 3

$$\boldsymbol{P}\{\xi < y\} = \boldsymbol{P}\{\xi < x\} + \boldsymbol{P}\{x \leq \xi < y\}.$$

Отсюда и из определения функции распределения находим

$$\boldsymbol{P}\{x \leq \xi < y\} = F(y) - F(x).$$

Свойство 5:

$$F(x) = F(x-0), \text{где } F(x-0) = \lim_{y \to x-0} F(y) \text{ для любого } x \in R,$$

т.е. F(x) непрерывная слева функция;

Доказательство: Пусть числовая последовательность y_n возрастает и $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Тогда

$$\ldots \subset \{\xi < y_n\} \subset \{\xi < y_{n+1}\} \subset \ldots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi < y_n\} = \{\xi < x\}$$

и по аксиоме непрерывности

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\{\xi < y_n\} = \boldsymbol{P}\{\xi < x\}.$$

Отсюда с учетом монотонности $F(x)$ получим свойство 5. Теорема доказана.