

# Экзамен по Теории вероятностей и математической статистике

**Вопрос 1.** Дать определения случайного события, пространства элементарных событий. Привести примеры.

**Определение:** Элементарным исходом (или элементарным событием) называют любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Множество всех элементарных исходов будем называть **пространством элементарных событий**.

**Пример:**

Пусть опыт состоит в однократном подбрасывании монеты. При математическом описании этого опыта естественно отвлечься от несущественных возможностей (например, монета встанет на ребро) и ограничиться только двумя элементарными событиями: выпадением “герба” (можно обозначить этот событие  $\Gamma$ ,  $\omega_\Gamma$  или  $\omega_1$ ) и выпадением “цифры” ( $\Pi$ ,  $\omega_\Pi$  или  $\omega_2$ ). Таким образом,

$$\Omega = \{\Gamma, \Pi\}, \Omega = \{\omega_\Gamma, \omega_\Pi\}$$

или

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

При двукратном подбрасывании монеты (или однократном подбрасывании двух монет) пространство элементарных событий будет, очевидно, содержать 4 элемента, т.е.

$$\Omega = \{\omega_{\Gamma\Gamma}, \omega_{\Pi\Gamma}, \omega_{\Gamma\Pi}, \omega_{\Pi\Pi}\}$$

где  $\omega_{\Gamma\Gamma}$  – появление “герба” и при первом, и при втором подбрасываниях, и т.д.

**Вопрос 2.** Дать классическое определение вероятности, сформулировать основные свойства вероятности.

**Определение:** Вероятностью события  $A$  назовем отношение числа  $N_A$  благоприятствующих событию  $A$  элементарных событий (исходов) к общему числу  $N$  равновозможных элементарных событий, т.е.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Данное определение вероятности события принято называть **классическим определением вероятности**. Заметим, что наряду с названием “классическая схема” используют также на-звания “случайный выбор”, “равновероятный выбор” и т.д.

**Основные свойства:**

**Свойство 1.** Для любого события  $A$  вероятность удовлетворяет неравенству  $P(A) \geq 0$ .

**Свойство 2.** Для достоверного события  $\Omega$  (которое содержит все  $N$  элементарных исходов)  $P(\Omega) = 1$ .

**Свойство 3.** Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .

**Вопрос 3. Сформулировать аксиомы теории вероятности.  
Сформулировать и доказать основные свойства вероятности.**

**Аксиома 1 (аксиома неотрицательности):**  $P(A) \geq 0$ ;

**Аксиома 2 (аксиома нормированности):**  $P(\Omega) = 1$ ;

**Аксиома 3 (расширенная аксиома сложения):** для любых попарно несовместных событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  справедливо равенство

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Значение  $P(A)$  называется **вероятностью события  $A$** .

Иногда вместо аксиомы 3 удобно использовать две другие аксиомы.

**Аксиома 3' (аксиома сложения для двух событий):** для любых двух несовместных событий  $A$  и  $B$  справедливо равенство

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

;

**Аксиома 4 (аксиома непрерывности):** если последовательность событий  $A_1, \dots, A_n \dots$  такова, что  $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ , и  $A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$$

**Основные свойства:**

**Свойство 1.** Для любого события  $A$  вероятность удовлетворяет неравенству  $P(A) \geq 0$ .

**Доказательство:** Свойство очевидно, так как отношение  $NA/N$  не может быть отрицательным.

**Свойство 2.** Для достоверного события  $\Omega$  (которое содержит все  $N$  элементарных исходов)  $P(\Omega) = 1$ .

**Свойство 3.** Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .

**Доказательство:** Действительно, если событию  $A$  благоприятствуют  $N_1$  исходов, а событию  $B$  —  $N_2$  исходов, то в силу несовместности  $A$  и  $B$  событию  $A + B$  благоприятствуют  $N_1 + N_2$  исходов. Следовательно,

$$P(A + B) = \frac{N_1 + N_2}{N} = \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} = P(A) + P(B)$$

#### Вопрос 4. Вывести формулу полной вероятности и формулу Байеса.

Будем говорить, что события  $H_1, H_2, \dots, H_n$  образуют **полную группу событий**, если они удовлетворяют следующим двум условиям:

1. События  $H_1, H_2, \dots, H_n$  являются попарно несовместными событиями, т.е.  $H_i H_j \neq 0$  при  $i \neq j$ ;
2. хотя бы одно из  $H_1, H_2, \dots, H_n$  обязательно должно произойти в результате опыта, другими словами, их *объединение* есть достоверное событие, т.е.  $H_1 \cup \dots \cup H_n = \Omega$ .

Пусть события  $H_1, H_2, \dots, H_n$  образуют полную группу событий. Тогда для произвольного события  $A$  справедлива **формула полной вероятности**

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)$$

**Формула Байеса:**

Пусть для некоторого события  $A$ ,  $P(A) > 0$ , и гипотез  $H_1, \dots, H_n$  известны  $P(H_1), \dots, P(H_n)$  ( $P(H_i) > 0, i \neq 1, n$ ) и  $P(A|H_1), \dots, P(A|H_n)$ . Тогда условная вероятность  $P(H_i|A)$ ,  $i \neq 1, n$ , гипотезы  $H_i$  при условии события  $A$  определяется **формулой Байеса**

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)}$$

#### Вопрос 5. Дать определение условной вероятности. Доказать теорему умножения. Дать определение независимых событий.

**Определение: Условной вероятностью** события  $A$  при условии (наступления) события  $B$  называют отношение вероятности *пересечения* событий  $A$  и  $B$  к вероятности события  $B$ :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

При этом предполагают, что  $P(B) \neq 0$ .

**Теорема (теорема умножения вероятностей):** Пусть событие  $A = A_1A_2\dots A_n$  (т.е.  $A$  - пересечение событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ) и  $P(A) > 0$ . Тогда справедливо равенство

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1})$$

называемое **формулой умножения вероятностей**.

**Доказательство:** Пусть выполнено равенство  $P(B|A) = P(B)$ . Воспользовавшись формулой умножения вероятностей для двух событий, получим

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B).$$

К аналогичному выводу приходим и в случае выполнения равенства  $P(A|B) = P(A)$ , т.е. из условия независимости событий следует  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

Обратно, пусть выполнено равенство  $P(AB) = P(A)P(B)$ . Тогда, согласно определению  $P(A|B) = P(A)$  условной вероятности,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \text{ или } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$$

**Определение:** События  $A$  и  $B$ , имеющие ненулевую вероятность, называют **независимыми**, если условная вероятность  $A$  при условии  $B$  совпадает с безусловной вероятностью  $A$  или если условная вероятность  $B$  при условии  $A$  совпадает с безусловной вероятностью  $B$ , т.е.

$$P(A|B) = P(A) \text{ или } P(B|A) = P(B)$$

в противном случае события  $A$  и  $B$  называют **зависимыми**.

## Вопрос 6. Изложить схему Бернулли, вывести формулу о вероятности успехов в схеме Бернулли и следствия из неё.

**Схемой Бернулли** (или последовательностью независимых одинаковых испытаний, или биномиальной схемой испытаний) называют последовательность испытаний, удовлетворяющую следующим условиям:

1. при каждом испытании различают лишь два исхода: появление некоторого события  $A$ , называемого “успехом”, либо появление его дополнения  $\bar{A}$ , называемого “неудачей”;
2. испытания являются независимыми, т.е. вероятность успеха в  $k$ -м испытании не зависит от исходов всех испытаний до  $k$ -го;
3. вероятность успеха во всех испытаниях постоянна  $P(A) = p$ .

**Теорема Бернулли:** Вероятность того, что в схеме Бернулли из  $n$  испытаний будет ровно  $k$  успехов, определяется формулой

$$P_{n(k)} = C_n^k p^k q^{n-k} k = 0, \dots, n.$$

где  $q = 1 - p$  – вероятность неудачи в одном испытании

**Следствие 1:** Вероятность появления успеха в  $n$  испытаниях не более  $k_2$  раз и не менее  $k_1$  раз равна:

$$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \quad (1.1)$$

Это следует из того, что события  $\{\mu = k\}$  при разных  $k$  являются несовместными.

**Следствие 2:** В частном случае при  $k_1 = 1$  и  $k_2 = n$  из (1.1) получаем формулу для вычисления вероятности хотя бы одного успеха в  $n$  испытаниях:  $P\{\mu \geq 1\} = 1 - q^n$