

Экзамен по Теории вероятностей и математической статистике

Вопрос 1. Дать определения случайного события, пространства элементарных событий. Привести примеры.

Определение: Элементарным исходом (или элементарным событием) называют любой простейший (т.е. неделимый в рамках данного опыта) исход опыта. Множество всех элементарных исходов будем называть **пространством элементарных событий**.

Пример:

Пусть опыт состоит в однократном подбрасывании монеты. При математическом описании этого опыта естественно отвлечься от несущественных возможностей (например, монета встанет на ребро) и ограничиться только двумя элементарными событиями: выпадением “герба” (можно обозначить это событие Γ , ω_Γ или ω_1) и выпадением “цифры” (Π , ω_Π или ω_2). Таким образом,

$$\Omega = \{\Gamma, \Pi\}, \Omega = \{\omega_\Gamma, \omega_\Pi\}$$

или

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

При двукратном подбрасывании монеты (или однократном подбрасывании двух монет) пространство элементарных событий будет, очевидно, содержать 4 элемента, т.е.

$$\Omega = \{\omega_{\Gamma\Gamma}, \omega_{\Pi\Gamma}, \omega_{\Gamma\Pi}, \omega_{\Pi\Pi}\}$$

где $\omega_{\Gamma\Gamma}$ — появление “герба” и при первом, и при втором подбрасываниях, и т.д.

Вопрос 2. Дать классическое определение вероятности, сформулировать основные свойства вероятности.

Определение: Вероятностью события A назовем отношение числа N_A благоприятствующих событию A элементарных событий (исходов) к общему числу N равновозможных элементарных событий, т.е.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

Данное определение вероятности события принято называть **классическим определением вероятности**. Заметим, что наряду с названием “классическая схема” используют также названия “случайный выбор”, “равновероятный выбор” и т.д.

Основные свойства:

Свойство 1. Для любого события A вероятность удовлетворяет неравенству $P(A) \geq 0$.

Свойство 2. Для достоверного события Ω (которое содержит все N элементарных исходов) $P(\Omega) = 1$.

Свойство 3. Если события A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

**Вопрос 3. Сформулировать аксиомы теории вероятности.
Сформулировать и доказать основные свойства вероятности.**

Аксиома 1 (аксиома неотрицательности): $P(A) \geq 0$;

Аксиома 2 (аксиома нормированности): $P(\Omega) = 1$;

Аксиома 3 (расширенная аксиома сложения): для любых попарно несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n справедливо равенство

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

Значение $P(A)$ называется **вероятностью события A** .

Иногда вместо аксиомы 3 удобно использовать две другие аксиомы.

Аксиома 3' (аксиома сложения для двух событий): для любых двух несовместных событий A и B справедливо равенство

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

;

Аксиома 4 (аксиома непрерывности): если последовательность событий A_1, \dots, A_n, \dots такова, что $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, и $A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$$

Основные свойства:

Свойство 1. Для любого события A вероятность удовлетворяет неравенству $P(A) \geq 0$.

Доказательство: Свойство очевидно, так как отношение N_A/N не может быть отрицательным.

Свойство 2. Для достоверного события Ω (которое содержит все N элементарных исходов) $P(\Omega) = 1$.

Свойство 3. Если события A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство: Действительно, если событию A благоприятствуют N_1 исходов, а событию B — N_2 исходов, то в силу несовместности A и B событию $A + B$ благоприятствуют $N_1 + N_2$ исходов. Следовательно,

$$P(A + B) = \frac{N_1 + N_2}{N} = \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} = P(A) + P(B)$$

Вопрос 4. Вывести формулу полной вероятности и формулу Байеса.

Будем говорить, что события H_1, H_2, \dots, H_n образуют **полную группу событий**, если они удовлетворяют следующим двум условиям:

1. События H_1, H_2, \dots, H_n являются попарно несовместными событиями, т.е. $H_i H_j \neq 0$ при $i \neq j$;
2. хотя бы одно из H_1, H_2, \dots, H_n обязательно должно произойти в результате опыта, другими словами, их *объединение* есть достоверное событие, т.е. $H_1 \cup \dots \cup H_n = \Omega$.

Пусть события H_1, H_2, \dots, H_n образуют полную группу событий. Тогда для произвольного события A справедлива **формула полной вероятности**

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)$$

Формула Байеса:

Пусть для некоторого события $A, P(A) > 0$, и гипотез H_1, \dots, H_n известны $P(H_1), \dots, P(H_n) (P(H_i) > 0, i \neq 1, n)$ и $P(A|H_1), \dots, P(A|H_n)$. Тогда условная вероятность $P(H_i|A), i \neq 1, n$, гипотезы H_i при условии события A определяется **формулой Байеса**

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)}$$

Вопрос 5. Дать определение условной вероятности. Доказать теорему умножения. Дать определение независимых событий.

Определение: Условной вероятностью события A при условии (наступления) события B называют отношение вероятности *пересечения* событий A и B к вероятности события B :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

При этом предполагают, что $P(B) \neq 0$.

Теорема (теорема умножения вероятностей): Пусть событие $A = A_1 A_2 \dots A_n$ (т.е. A - пересечение событий A_1, A_2, \dots, A_n) и $P(A) > 0$. Тогда справедливо равенство

$$P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

называемое **формулой умножения вероятностей**.

Доказательство: Пусть выполнено равенство $P(B|A) = P(B)$. Воспользовавшись формулой умножения вероятностей для двух событий, получим

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B).$$

К аналогичному выводу приходим и в случае выполнения равенства $P(A|B) = P(A)$, т.е. из условия независимости событий следует $P(AB) = P(A)P(B)$.

Обратно, пусть выполнено равенство $P(AB) = P(A)P(B)$. Тогда, согласно определению $P(A|B) = P(A)$ условной вероятности,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \text{ или } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$$

Определение: События A и B , имеющие ненулевую вероятность, **называют независимыми**, если условная вероятность A при условии B совпадает с безусловной вероятностью A или если условная вероятность B при условии A совпадает с безусловной вероятностью B , т.е.

$$P(A|B) = P(A) \text{ или } P(B|A) = P(B)$$

в противном случае события A и B называют зависимыми.

Вопрос 6. Изложить схему Бернулли, вывести формулу о вероятности успехов в схеме Бернулли и следствия из неё.

Схемой Бернулли (или последовательностью независимых одинаковых испытаний, или биномиальной схемой испытаний) называют последовательность испытаний, удовлетворяющую следующим условиям:

1. при каждом испытании различают лишь два *исхода*: появление некоторого события A , называемого “успехом”, либо появление его дополнения \bar{A} , называемого “неудачей”;
2. испытания являются независимыми, т.е. вероятность успеха в k -м испытании не зависит от исходов всех испытаний до k -го;
3. вероятность успеха во всех испытаниях постоянна $P(A) = p$.

Теорема Бернулли: Вероятность того, что в схеме Бернулли из n испытаний будет ровно k успехов, определяется формулой

$$P_{n(k)} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad k = 0, \dots, n.$$

где $q = 1 - p$ – вероятность неудачи в одном испытании

Следствие 1: Вероятность появления успеха в n испытаниях не более k_2 раз и не менее k_1 раз равна:

$$P\{k_1 \leq X \leq k_2\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \quad (1.1)$$

Это следует из того, что события $\{\mu = k\}$ при разных k являются несовместными.

Следствие 2: В частном случае при $k_1 = 1$ и $k_2 = n$ из (1.1) получаем формулу для вычисления вероятности хотя бы одного успеха в n испытаниях: $P\{\mu \geq 1\} = 1 - q^n$